DS8 (version A)

Exercice 1 (ESC 2008)

On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on définit les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & y \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{C}$.
On note id l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice I dans la base canonique $\mathcal{C}$.

1. a) Calculer $(A-2I)^2$, puis vérifier que $(A-2I)^3 = 0_3$ (matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$).

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$(A-2\,I)^2 \; = \; (A-2\,I)(A-2\,I) \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{(A-2\,I)^2 \; = \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}}$$

- Ensuite :

$$(A-2\,I)^3 \; = \; (A-2\,I)(A-2\,I)^2 \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \; = \; 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

$$\boxed{(A-2\,I)^3 \; = \; 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

□

b) En déduire que le réel 2 est l'unique valeur propre de A et déterminer une base et la dimension du sous espace propre de A associé à la valeur propre 2.

Démonstration.

- D'après la question précédente, le polynôme $Q(X) = (X-2)^3$ est un polynôme annulateur de la matrice A.
- Ainsi : $\mathrm{Sp}(A) \; \subset \; \{\text{racines de } Q\} \; = \; \{2\}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que 2 est la seule valeur propre possible de } A.}$$

- Démontrons que 2 est valeur propre de A.

$$A - 2\,I \; = \; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est non inversible car possède 2 colonnes colinéaires ($C_2 = -C_3$).

$$\boxed{\text{On en déduit que 2 est l'unique valeur propre de } A.}$$

- Déterminons $E_2(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2 \cdot X\}$ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2(A) & \Longleftrightarrow & (A - 2\,I)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & & & & & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & & & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \overset{\substack{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & & & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\[6pt]
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & 0 \\ & & y & = & z \end{array} \right.
\end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 0 \quad \text{et} \quad y = z \right\} \\[6pt]
& = & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\[6pt]
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).}$$

- Ainsi, la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:
  - × engendre $E_2(A)$,
  - × est libre car constituée uniquement d'un vecteur non nul.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } \mathcal{F} \text{ est une base de } E_2(A) \text{ et} \\ \dim\left(E_2(A)\right) \ = \ \text{Card}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \ = \ 1.\end{array}}$$

□

2. Montrer par la méthode du pivot que P_y est inversible si et seulement si $y \neq -1$.

Démonstration.

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & y \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftrightarrow L_3 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & y \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & y \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & y \\ 0 & 0 & 1+y \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right.$$

- La réduite obtenue est triangulaire (supérieure). Elle est donc inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, c'est-à-dire $1 + y \neq 0$. Ainsi cette réduite est inversible si et seulement si $y \neq -1$, et il en est de même de la matrice initiale P_y.

$$\boxed{\text{On en déduit que } P_y \text{ est inversible si et seulement si } y \neq -1.}$$

□

Commentaire

L'énoncé demande explicitement l'utilisation de la méthode du pivot de Gauss. On a présenté ici la détermination de l'inverse de P_y. Mais comme on peut le voir, la matrice de droite n'est ici d'aucune utilité. Il est donc plutôt conseillé de présenter cette méthode à l'aide d'un calcul du rang.

$$\text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & y \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right) \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & y \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & y \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right) \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & y \\ 0 & 0 & 1+y \end{pmatrix} \right)$$

3. On note dans toute la suite les vecteurs $u_1 = (0,4,4)$ et $u_2 = (2,0,2)$.

a) Déterminer l'unique vecteur u_3 de la forme $u_3 = (1,y,0)$ tel que $f(u_3) = u_2 + 2\,u_3$.

Démonstration.

On note $U_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$.

Par passerelle endomorphisme-matrice :

$$\begin{aligned} f(u_3) = u_2 + 2\cdot u_3 \quad &\Leftrightarrow \quad A\,U_3 = U_2 + 2\cdot U_3 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3+y & = & 2+2 \\ 1+y & = & 2\,y \\ 2 & = & 2 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que l'unique vecteur } u_3 \text{ de la forme } (1,y,0) \text{ vérifiant } f(u_3) = u_2 + 2\,u_3 \text{ est } u_3 = (1,1,0).}$$

□

b) Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{C}$ à la famille $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$.
Montrer à l'aide de la question ***2.*** que P est inversible puis justifier que la famille $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Par définition :
$$P = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u_1), \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u_2), \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u_3))$$
$$\boxed{\text{Ainsi : } P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.}$$
- On remarque : $P = P_1$. Donc $P = P_y$ avec $y = 1 \neq -1$.
On en déduit, d'après ***2.***, que la matrice P est inversible.
- Comme P est inversible : $\mathrm{rg}(P) = 3$.
Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = (U_1, U_2, U_3)$ est libre.
Il en est donc de même pour $\mathscr{B}' = \big((0,4,4), (2,0,2), (1,1,0)\big)$.
Ainsi, la famille $\mathscr{B}'$:
× est libre,
× vérifie : $\mathrm{Card}(\mathscr{B}') = 3 = \dim\left(\mathbb{R}^3\right)$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathscr{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Commentaire

Détaillons l'obtention de la liberté de la famille $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ à partir de celle de (U_1, U_2, U_3).
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in R^3$.

$$\begin{array}{rrcl} & \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3 & = & 0_{\mathbb{R}^3} \\ \Leftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \lambda_3 \cdot u_3) & = & \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(0_{\mathbb{R}^3}) \\ \Leftrightarrow & \lambda_1 \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u_1) + \lambda_2 \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u_2) + \lambda_3 \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u_3) & = & 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \quad \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\cdot)\textit{)} \\ \Leftrightarrow & \lambda_1 \cdot U_1 + \lambda_2 \cdot U_2 + \lambda_3 \cdot U_3 & = & 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \end{array}$$

Or la famille (U_1, U_2, U_3) est libre, donc : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
D'où $\mathscr{B}'$ est libre. $\square$

c) Exprimer $f(u_1)$ en fonction de u_1, puis $f(u_2)$ en fonction de u_1 et u_2.
En déduire que la matrice T de l'endomorphisme f dans la base $\mathscr{B}'$ est $T = 2I + N$.
Donner, en la justifiant en une seule ligne, la relation liant les matrices A, T, P et P^{-1}.

Démonstration.

- $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\big(f(u_1)\big) \ = \ A\,U_1 \ = \ = \ 2 \cdot U_1 \quad$ car $\quad U_1 \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = E_2(A)$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } f(u_1) = 2 \cdot u_1.}$$

- On cherche à exprimer le vecteur $f(u_2)$ en fonction de u_1 et u_2.
Autrement dit, on cherche $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(u_2) = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2$. Or :

$$\begin{array}{cll} & f(u_2) = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 & \\ \Longleftrightarrow & \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\big(f(u_2)\big) = \alpha \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u_1) + \beta \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u_2) & \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\cdot)\textit{)} \\ \Longleftrightarrow & A\,U_2 = \alpha \cdot U_1 + \beta \cdot U_2 & \\ \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} & \textit{(en calculant } A\,U_2\textit{)} \\ \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcl} & & 2\,\beta & = & 4 \\ 4\,\alpha & & & = & 4 \\ 4\,\alpha & + & 2\,\beta & = & 8 \end{array}\right. & \\ \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{4} L_2}{\overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{\begin{array}{rcrcl} & & \beta & = & 2 \\ \alpha & & & = & 1 \\ 4\,\alpha & + & 2\,\beta & = & 8 \end{array}\right. & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } f(u_2) = 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2.}$$

- D'après les calculs précédents :

  × $f(u_1) = 2 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$. Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(f(u_1)\big) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  × $f(u_2) = 1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$. Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(f(u_2)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- De plus, d'après la question ***3.a)*** : $f(u_3) = 0 \cdot u_1 + 1 \cdot u_2 + 2 \cdot u_3$. Ainsi : $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}\big(f(u_3)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } T = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\,I + N.}$$

- La formule de changement de base stipule :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \;=\; P_{\mathcal{C},\mathscr{B}'} \times \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times P_{\mathscr{B}',\mathcal{C}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } A = PTP^{-1}.}$$

□

On cherche maintenant à déterminer l'ensemble S des endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la relation $(\mathbf{R})$:

$$(\mathbf{R}) \qquad f \circ h = h \circ f$$

4. a) On note M' la matrice de l'endomorphisme h relativement à la base $\mathscr{B}'$.
Montrer : $(\mathbf{R}) \Leftrightarrow (N\,M' = M'\,N)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}) &\Leftrightarrow f \circ h = h \circ f \\ &\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f \circ h) = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(h \circ f) \\ &\Leftrightarrow \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(h) = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(h) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) \\ &\Leftrightarrow T\,M' = M'\,T \end{aligned}$$

- De plus :

  × $TM' \;=\; (2\,I + N)\,M' \;=\; 2\,M' + N\,M'$

  × $M'T \;=\; M'\,(2\,I + N) \;=\; 2\,M' + M'\,N$.

  Ainsi :

$$TM' = M'T \quad \Leftrightarrow \quad \cancel{2M'} + NM' = \cancel{2M'} + M'N \quad \Leftrightarrow \quad NM' = M'N$$

$$\boxed{\text{Finalement : } (\mathbf{R}) \Leftrightarrow NM' = M'N.}$$

Commentaire

L'énoncé omet ici la quantification de l'endomorphisme h. On devrait lire : « Soit $h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. On note M' la matrice de cet endomorphisme relativement à la base $\mathscr{B}'$ ».

□

b) En posant $M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$, montrer : $(\mathbf{R}) \Leftrightarrow M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & a & a' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll} (\mathbf{R}) & \Leftrightarrow & NM' = M'N & \textit{(d'après la question précédente)} \\[2mm] & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \\[2mm] & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & a' \\ 0 & b & b' \\ 0 & c & c' \end{pmatrix} & \\[2mm] & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ b' & = & a \\ b'' & = & a' \\ c & = & 0 \\ c' & = & b \\ c'' & = & b' \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & c \\ 0 & = & c' \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = c = c' = 0 \\ b' = c'' = a \\ b'' = a' \end{array} \right. & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } (\mathbf{R}) \Leftrightarrow M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & a & a' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.}$$

□

c) Calculer la matrice N^2 et en déduire que $S = \mathrm{Vect}\big(\mathrm{id}, f - 2\,\mathrm{id}, (f - 2\,\mathrm{id})^2\big)$.

Démonstration.

- On calcule :

$$N^2 \;=\; N \times N \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} (\mathbf{R}) & \Leftrightarrow & M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & a & a' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} & \textit{(d'après la question précédente)} \\[2mm] & \Leftrightarrow & M' = a \cdot I + a' \cdot N + a'' \cdot N^2 & \end{array}$$

- Or : $N \ = \ T - 2\,I \ = \ \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f - 2\,\text{id})$. D'où :

$$\begin{aligned}
& h \in S \\
\Leftrightarrow \quad & (\mathbf{R}) \\
\Leftrightarrow \quad & \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(h) = a \cdot \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(\text{id}) + a' \cdot \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f - 2\,\text{id}) + a'' \cdot \text{Mat}_{\mathscr{B}'}\left((f - 2\,\text{id})^2\right) \\
\Leftrightarrow \quad & \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(h) = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}\left(a \cdot \text{id} + a' \cdot (f - 2\,\text{id}) + a'' \cdot (f - 2\,\text{id})^2\right) && \textit{(par linéarité de } \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(\cdot)\textit{)} \\
\Leftrightarrow \quad & h = a \cdot \text{id} + a' \cdot (f - 2\,\text{id}) + a'' \cdot (f - 2\,\text{id})^2 \\
\Leftrightarrow \quad & h \in \text{Vect}\left(\text{id}, f - 2\,\text{id}, (f - 2\,\text{id})^2\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } S = \text{Vect}\left(\text{id}, f - 2\,\text{id}, (f - 2\,\text{id})^2\right).}$$

□

d) On note $\mathcal{G} = (I, N, N^2)$. Montrer que $\mathcal{G}$ est libre et en déduire la dimension de S.
On note $\mathcal{F}' = (\text{id}, f, f^2)$. Montrer que $\mathcal{F}'$ est une base de S.

Démonstration.

- Montrons que $\mathcal{G}$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot N + \lambda_3 \cdot N^2 \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\
\Leftrightarrow \quad & \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } \mathcal{G} \text{ est libre.}}$$

- Montrons que la famille $\mathcal{D} = \left(\text{id}, f - 2\,\text{id}, (f - 2\text{id})^2\right)$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 \cdot \text{id} + \lambda_2 \cdot (f - 2\,\text{id}) + \lambda_3 \cdot (f - 2\,\text{id})^2 \ = \ 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)} \\
\Leftrightarrow \quad & \text{Mat}_{\mathscr{B}'}\left(\lambda_1 \cdot \text{id} + \lambda_2 \cdot (f - 2\,\text{id}) + \lambda_3 \cdot (f - 2\,\text{id})^2\right) \ = \ \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}) \\
\Leftrightarrow \quad & \lambda_1 \cdot \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(\text{id}) + \lambda_2 \cdot \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f - 2\,\text{id}) + \lambda_3 \cdot \text{Mat}_{\mathscr{B}'}\left((f - 2\,\text{id})^2\right) \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} && \textit{(par linéarité de } \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(\cdot)\textit{)} \\
\Leftrightarrow \quad & \lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot N + \lambda_3 \cdot N^2 \ = \ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Or la famille $\mathcal{G} = (I, N, N^2)$ est libre, donc : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
D'où $\mathcal{D}$ est libre.

- Ainsi la famille $\mathcal{D}$:

  $\times$ est libre,

  $\times$ engendre S

  On en déduit que $\mathcal{D}$ est une base de S.

$$\boxed{\text{D'où : } \dim(S) \ = \ \text{Card}(\mathcal{D}) \ = \ 3.}$$

- Montrons que la famille $\mathcal{F}'$ est génératrice de S.

$$\begin{array}{rcll} S & = & \text{Vect}\left(\text{id}, f-2\cdot\text{id}, (f-2\cdot\text{id})^2\right) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{4.c)}}\textit{)} \\ & = & \text{Vect}\left(\text{id}, f-2\,\text{id}, f^2-4\cdot f+4\cdot\text{id}\right) & \\ & = & \text{Vect}\left(\text{id}, f, f^2-4\cdot f\right) & \textit{(on met à jour le } 2^{\text{ème}} \textit{ (resp. le } 3^{\text{ème}}\textit{) endomorphisme en lui retirant 2 fois (resp. 4 fois) le } 1^{er}\textit{)} \\ & = & \text{Vect}\left(\text{id}, f, f^2\right) & \textit{(on met à jour le } 3^{\text{ème}} \textit{ endomorphisme en lui ajoutant 4 fois le } 2^{\text{ème}}\textit{)} \end{array}$$

  Donc la famille $\mathcal{F}'$ engendre S.

- Ainsi la famille $\mathcal{F}'$:

  $\times$ engendre S,

  $\times$ vérifie : $\text{Card}(\mathcal{F}') \ = \ 3 \ = \ \dim(S)$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{F}' \text{ est une base de } S.}$$

$\square$

Exercice 2 (EML 2014)

On considère l'application $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. On admet $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Étude de la fonction φ

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$, calculer, pour tout x de $]0,+\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{3x+1}{x^5}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$ car elle est la composée $h_2 \circ h_1$ où :
  - × $h_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ qui ne s'annule pas sur cet intervalle,
    - telle que : $h_1(]0,+\infty[) \subset \mathbb{R}$.
  - × $h_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}$.

  On en déduit que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$ en tant que somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0,+\infty[$.

- Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$\varphi'(x) = \mathrm{e}^x - \left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - x\ \frac{1}{x^2}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right) = \mathrm{e}^x + \left(\frac{1}{x} - 1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

$$\varphi''(x) = \mathrm{e}^x - \frac{1}{x^2}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{x} - 1\right)\ \frac{1}{x^2}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^x - \frac{1}{x^3}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

$$\varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \frac{3}{x^4}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^3}\ \frac{1}{x^2}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^x + \left(\frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^x + \frac{3x+1}{x^5}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'(x) = \mathrm{e}^x + \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ \varphi''(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x^3}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ \varphi'''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{3x+1}{x^5}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \end{array}}$$

□

2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variation de φ', et montrer : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'(x) \geqslant \mathrm{e}$.

Démonstration.

- Soit $x \in]0,+\infty[$. Déterminons le signe de $\varphi'''(x)$.
  - × Tout d'abord : $\mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > 0$.
  - × Ensuite, comme $x > 0$: $\dfrac{3x+1}{x^5} > 0$

  On en déduit : $\varphi'''(x) > 0$.

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi'''(x)$		$+$		$+$	
Variations de φ''	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau :
  × tout d'abord : $\varphi''(1) \ = \ e^1 - \dfrac{1}{1^3}\, e^{\frac{1}{1}} \ = \ e - e \ = \ 0.$
  × ensuite : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3}\, e^{\frac{1}{x}} \ = \ 0 \times 1 \ = \ 0$. De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \ = \ +\infty$. Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi''(x) = +\infty$.
  × enfin : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x^3}\, e^{\frac{1}{x}} \ = \ +\infty$. De plus : $\lim\limits_{x\to0^+} e^x \ = \ e^0 \ = \ 1$. Ainsi : $\lim\limits_{x\to0^+} \varphi''(x) = -\infty$.
- On déduit le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de φ'	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau :
  × tout d'abord : $\varphi'(1) \ = \ e^1 - \cancel{\left(\dfrac{1}{1} - 1\right)} e^{\frac{1}{1}} \ = \ e.$
  × ensuite : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) e^{\frac{1}{x}} = -1$. De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$. Ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = +\infty$.
  × enfin : $\lim\limits_{x\to0^+} \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) e^{\frac{1}{x}} = +\infty$. De plus : $\lim\limits_{x\to0^+} e^x = 1$. Ainsi : $\lim\limits_{x\to0^+} \varphi'(x) = +\infty$.
- La fonction φ' est :
  × strictement décroissante sur $]0, 1]$,
  × strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

  Elle admet donc un minimum en e.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \,]0, +\infty[,\ \varphi'(x) \geqslant \varphi'(1) = e.}$$

□

3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\lim\limits_{x\to0^+} e^x = e^0 = 1$.
- Ensuite, pour tout $x \in \,]0, +\infty[$: $x\, e^{\frac{1}{x}} \ = \ \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$.

  On pose alors le changement de variable : $X = \dfrac{1}{x}$ (*i.e.* $x = \dfrac{1}{X}$). Ainsi : $x \to 0^+ \Leftrightarrow X \to +\infty$.

On obtient alors :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty \quad \textit{(par croissances comparées)}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty.}$$

□

4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $x \in \,]0, +\infty[$.

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$$

Or :

× par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

× $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^0 = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty.}$$

- Pour tout $x \in \,]0, \infty[$: $\varphi(x) = x\, \dfrac{\varphi(x)}{x}$.

$$\boxed{\text{D'après le calcul de limite précédent : } \lim_{x\to +\infty} \varphi(x) = +\infty.}$$

□

5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3, +\infty[,\ \varphi(x) \geqslant \mathrm{e}\, x$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de φ.

Démonstration.

- On note $h : x \mapsto \varphi(x) - \mathrm{e}\, x$.
La fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \,]0, +\infty[$.

$$h'(x) = \varphi'(x) - \mathrm{e} \geqslant 0 \quad \textit{(d'après \textbf{2.})}$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		3		$+\infty$
Signe de $h'(x)$		$+$		$+$	
Variations de h	$-\infty$	$\nearrow$	$h(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

- En particulier : $\forall x \in [3, +\infty[,\ h(x) \geqslant h(3)$. Or :

$$h(3) = \varphi(3) - 3\,\mathrm{e} > 15 - 3\,\mathrm{e} > 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit, pour tout } x \in [3, +\infty[\text{ : } h(x) \geqslant 0, \text{ c'est-à-dire } \varphi(x) \geqslant \mathrm{e}\, x.}$$

Commentaire

On pouvait également démontrer cette inégalité en utilisant la convexité de φ.

- D'après la question *2.* : $\forall x \in \,]1, +\infty[$, $\varphi''(x) > 0$.
  La fonction φ est donc convexe sur $]1, +\infty[$. Sa courbe représentative est donc située au-dessus de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 3, droite d'équation :
  $$y \; = \; \varphi'(3)(x-3) + \varphi(3)$$
- Soit $x \in [3, +\infty[$.

Comme	$\varphi'(3) \geqslant \mathrm{e}$	*(d'après la question* ***2.****)*
alors	$\varphi'(3)(x-3) \geqslant \mathrm{e}\,(x-3)$	*(car $x - 3 \geqslant 0$)*
d'où	$\varphi'(3)(x-3) + \varphi(3) \geqslant \mathrm{e}\,(x-3) + 15$	*(car $\varphi(3) > 15$ d'après l'énoncé)*

- De plus, comme $\mathrm{e} < 3$:
  $$\mathrm{e}\,(x-3) + 15 \; = \; \mathrm{e}\,x - 3\,\mathrm{e} + 15 \; \geqslant \; \mathrm{e}\,x$$

Finalement : $\forall x \in [3, +\infty[$, $\varphi(x) \; \geqslant \; \varphi'(3)(x-3) + \varphi(3) \; \geqslant \; \mathrm{e}\,x$.

□

6. Montrer que $\mathcal{C}$ admet un unique point d'inflexion, déterminer les coordonnées de celui-ci et l'équation de la tangente en ce point.

Démonstration.

- La fonction φ'' est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ change donc de convexité en 1, seul point d'inflexion de la courbe représentative de } \varphi.}$$

- Les coordonnées de ce point d'inflexion sont $\big(1, \varphi(1)\big)$. Or :
  $$\varphi(1) \; = \; \mathrm{e}^1 - 1\,\mathrm{e}^{\frac{1}{1}} \; = \; \mathrm{e} - \mathrm{e} \; = \; 0$$

$$\boxed{\text{La courbe représentative de } \varphi \text{ admet pour point d'inflexion, le point de coordonnées } (1,0).}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{L'équation de la tangente à la courbe représentative de } \varphi \text{ en 1 est :} \\ y \; = \; \varphi'(1)(x-1) + \varphi(1) \; = \; \mathrm{e}\,(x-1).\end{array}}$$

□

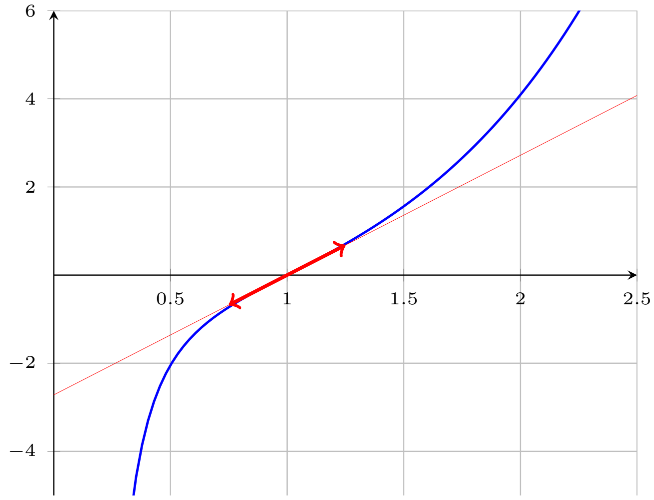
7. Dresser le tableau de variations de φ, avec les limites en 0 et en $+\infty$, et la valeur en 1.
Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et faire apparaître la tangente au point d'inflexion.

Démonstration.

- D'après la question *2.* : $\forall x \in \,]0, +\infty[$, $\varphi'(x) \geqslant \mathrm{e} > 0$.
  On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		$+$		$+$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- L'obtention des différents éléments de ce tableau a été détaillée en questions *3* et *4*.
- On en déduit que $\mathcal{C}$ admet la représentation graphique suivante.



Commentaire

- Un point d'inflexion de $\mathcal{C}$ est un point en lequel $\mathcal{C}$ change de convexité. Si la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I d'étude, une condition suffisante d'existence de point d'inflexion est que la fonction φ'' s'annule **en changeant de signe** en l'abscisse de ce point.
- L'énoncé demande de représenter la tangente en le point d'inflexion. Il est important que le dessin de la courbe mette en évidence :
  - × la notion de tangente : la courbe de $\mathcal{C}$ et la tangente doivent apparaître comme confondues à proximité du point $(1, 0)$.
  - × la notion de point d'inflexion : sur $]0, 1[$ la fonction est concave et sur $]1, +\infty[$ la fonction est convexe. Cela doit apparaître clairement sur la représentation graphique. En particulier, la tangente obtenue « traverse » la courbe $\mathcal{C}$.

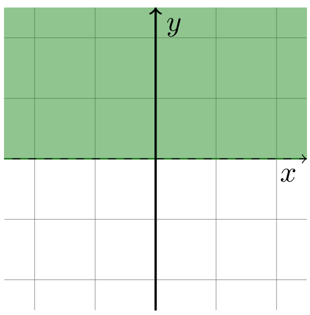
□

Partie II : Étude d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $U = \mathbb{R}\times\ ]0, +\infty[$ et on considère l'application : $f : U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy - \mathrm{e}^x \ln(y)$.

8. Représenter graphiquement l'ensemble U.

Démonstration.



□

9. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U et calculer, pour tout (x,y) de U, les dérivées partielles premières et les dérivées partielles secondes de f au point (x,y).

Démonstration.

- La fonction $(x,y) \mapsto \ln(y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car elle est la composée $\psi_1 \circ h_1$ où :
  - × $h_1 : (x,y) \mapsto y$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur U en tant que fonction polynomiale,
    - telle que : $h_1(U) \subset \,]0,+\infty[$.
  - × $\psi_1 : t \mapsto \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.
- La fonction $(x,y) \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car elle est la composée $\psi_2 \circ h_2$ où :
  - × $h_2 : (x,y) \mapsto x$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur U en tant que fonction polynomiale,
    - telle que : $h_2(U) \subset \mathbb{R}$.
  - × $\psi_2 : t \mapsto \mathrm{e}^t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $(x,y) \mapsto xy$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U en tant que fonction polynomiale.

Finalement, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U en tant que somme et produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

Commentaire

Le détail d'une seule des deux compositions suffit sans doute à obtenir la totalité des points alloués à cette partie de la question.

$$\forall (x,y) \in U, \quad \partial_1(f)(x,y) = y - \ln(y)\,\mathrm{e}^x, \quad \partial_2(f)(x,y) = x - \frac{\mathrm{e}^x}{y}$$

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = -\ln(y)\,\mathrm{e}^x, \quad \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = 1 - \frac{\mathrm{e}^x}{y}$$

$$\partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 1 - \frac{\mathrm{e}^x}{y}, \quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = \frac{\mathrm{e}^x}{y^2}$$

□

10. Établir que, pour tout (x,y) de U, (x,y) est un point critique de f si et seulement si :

$$x > 0 \quad \text{et} \quad y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 0$$

Démonstration.

Soit $(x,y) \in U$.

Le couple (x,y) est un point critique de f si et seulement si $\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y - \ln(y)\,\mathrm{e}^x & = & 0 \\ x - \dfrac{\mathrm{e}^x}{y} & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y - \ln(y)\,\mathrm{e}^x & = & 0 \\ x & = & \dfrac{\mathrm{e}^x}{y} \end{array}\right.$$

Deux cas se présentent alors.

- Si $x \leqslant 0$, alors l'équation $x = \dfrac{\mathrm{e}^x}{y}$ n'admet pas de solution car $\dfrac{\mathrm{e}^x}{y} > 0$.

  La fonction f n'admet donc pas de point critique sur $]-\infty,0] \times]0,+\infty[$.
- Si $x > 0$, alors, en reprenant les équivalences :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y - \ln(y)\,\mathrm{e}^x & = & 0 \\ x & = & \dfrac{\mathrm{e}^x}{y} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & \ln(y)\,\mathrm{e}^x \\ \dfrac{1}{x} & = & \dfrac{y}{\mathrm{e}^x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{y}{\mathrm{e}^x} & = & \ln(y) \\ \dfrac{1}{x} & = & \dfrac{y}{\mathrm{e}^x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{x} & = & \ln(y) \\ \dfrac{1}{x} & = & \dfrac{y}{\mathrm{e}^x} \end{array}\right.$$

où la première équivalence est vérifiée car $x \neq 0$. Ensuite :

$$\left\{\begin{array}{rcl} e^{\frac{1}{x}} & = & y \\ x & = & \dfrac{e^x}{y} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e^{\frac{1}{x}} & = & y \\ x & = & \dfrac{e^x}{e^{\frac{1}{x}}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e^{\frac{1}{x}} & = & y \\ x\,e^{\frac{1}{x}} & = & e^x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e^{\frac{1}{x}} & = & y \\ e^x - x\,e^{\frac{1}{x}} & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} e^{\frac{1}{x}} & = & y \\ \varphi(x) & = & 0 \end{array}\right.$$

Finalement, pour tout (x, y) de U, (x, y) est un point critique de f si et seulement si :
$x > 0$ et $y = e^{\frac{1}{x}}$ et $\varphi(x) = 0$.

Commentaire

- On pouvait aussi remarquer : $x = \dfrac{e^x}{y} \Leftrightarrow y = \dfrac{e^x}{x}$.
  Il est classique de tenter d'écrire une variable en fonction de l'autre. Ce faisant, on peut remplacer y par son expression en x dans la première ligne : $\dfrac{e^x}{x} = \ln\left(\dfrac{e^x}{x}\right) e^x$. Par des manipulations usuelles, on démontre alors que cette équation est équivalente à : $\varphi(x) = 0$.
- On a opéré ici par disjonction de cas pour pouvoir gérer en amont la difficulté « $x > 0$ ».
  Cependant, on aurait pu traiter ce point au moment où il apparaît dans la démonstration.
  Détaillons la démonstration.
- Soit $(x, y) \in U$. On a :

$$\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y - \ln(y)\,e^x & = & 0 \\ x - \dfrac{e^x}{y} & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} y - \ln(y)\,e^x & = & 0 & (1) \\ x & = & \dfrac{e^x}{y} & (2) \end{array}\right.$$

Or, comme $y > 0$ et $e^x > 0$, on a : (2) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} x & = & \dfrac{e^x}{y} & (2) \\ x > 0 & & & \end{array}\right.$. On en déduit alors :

$$\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} y - \ln(y)\,e^x & = & 0 & (1) \\ x & = & \dfrac{e^x}{y} & (2) \\ x > 0 & & & (3) \end{array}\right.$$

On peut alors reprendre la liste d'équivalences de la démonstration précédente en adjoignant à chaque système la propriété (3).
- Cette manière de procéder peut sembler un peu subtile ou lourde d'écriture.
  Il est aussi possible de raisonner par implication en remarquant que la propriété (2) et le fait que $y \in U$ **implique** $x > 0$. On peut alors une nouvelle fois conclure avec la succession d'équivalences de la démonstration page précédente. Il faut cependant bien comprendre qu'avec cette présentation, on perd la succession d'équivalence (on a introduit une implication dans cette succession). Il faudra alors bien penser à traiter la réciproque, à savoir :

$$x > 0 \quad \text{et} \quad y = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad \varphi(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla(f)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$$

□

11. En déduire que f admet un point critique et un seul, et qu'il s'agit de $(1, \mathrm{e})$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in U$.

- D'après la question précédente :

$$(x, y) \text{ est un point critique de } f \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{rcl} x & > & 0 \\ y & = & \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ \varphi(x) & = & 0 \end{array} \right.$$

- Or la fonction φ est :
  - × continue sur $]0, +\infty[$ (car elle est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0, +\infty[$ d'après ***1.***),
  - × strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (d'après ***7***).

  Ainsi, φ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\varphi\big(]0, +\infty[\big)$ où, d'après les questions ***3.*** et ***4.*** :

$$\varphi\big(]0, +\infty[\big) \ = \ \left] \lim_{x \to 0^+} \varphi(x), \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) \right[\ = \ ]-\infty, +\infty[$$

  Or : $0 \in \ ]-\infty, +\infty[$. On en déduit que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$.
  De plus, d'après ***7.*** : $\varphi(1) = 0$.

  On en conclut que le réel 1 est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = 0$ sur $]0, +\infty[$.

- On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & > & 0 \\ y & = & \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ \varphi(x) & = & 0 \end{array} \right. \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{rcl} x & > & 0 \\ y & = & \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ x & = & 1 \end{array} \right. \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \\ x & = & 1 \end{array} \right. \ \Leftrightarrow \ \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \mathrm{e}^{\frac{1}{1}} \ = \ \mathrm{e} \\ x & = & 1 \end{array} \right.$$

On en déduit que f admet un unique point critique sur U de coordonnées $(1, \mathrm{e})$. □

12. Est-ce que f admet un extremum local en $(1, \mathrm{e})$?

Démonstration.

- Pour conlure quant à la nature du point critique $(1, \mathrm{e})$, on cherche à déterminer le signe des valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(1, \mathrm{e})$
- Or, d'après la question ***9.*** :

$$\nabla^2(f)(1, \mathrm{e}) \ = \ \begin{pmatrix} -\ln(1)\,\mathrm{e}^1 & 1 - \dfrac{\mathrm{e}^1}{1} \\ 1 - \dfrac{\mathrm{e}^1}{1} & \dfrac{\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^2} \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} -\mathrm{e} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}$$

- La matrice $\nabla^2(f)(1, \mathrm{e})$ est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.
  Ainsi : $\mathrm{Sp}\left(\nabla^2(f)(1, \mathrm{e})\right) = \left\{-\mathrm{e}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right\}$.

La matrice $\nabla^2(f)(1, \mathrm{e})$ admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative. On en déduit que $(1, \mathrm{e})$ n'est pas un extremum local (c'est un point selle). □

13. Est-ce que f admet un extremum local sur U ?

Démonstration.
La fonction f admet $(1, \mathrm{e})$ comme **unique** point critique sur U, d'après ***11.***. Or, d'après la question précédente, ce point n'est pas un extremum local.

On en déduit que f n'admet pas d'extremum local sur U. □

Partie III : Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

14. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$.
(On pourra utiliser les résultats de la ***Partie I***).

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \left\{\begin{array}{l} u_n \text{ existe} \\ u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n \end{array}\right.$

- **Initialisation** :
  D'après l'énoncé : $u_0 = 3$. Or : $3\,\mathrm{e}^0 = 3$. D'où : $u_0 \geqslant 3\,\mathrm{e}^0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} \text{ existe} \\ u_{n+1} \geqslant 3\,\mathrm{e}^{n+1} \end{array}\right.$).
  - Par hypothèse de récurrence, u_n existe et : $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$. En particulier : $u_n > 0$.
    Donc $\varphi(u_n)$ est bien défini. On en déduit que u_{n+1} existe.
  - Par hypothèse de récurrence : $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n \geqslant 3$. Donc : $u_n \in [3, +\infty[$.
    Alors, d'après la question ***5.*** :

$$\begin{array}{ccccc} \varphi(u_n) & \geqslant & \mathrm{e}\,u_n & & \\ \| & & \geqslant & & \\ u_{n+1} & & \mathrm{e} \times 3\,\mathrm{e}^n & = & 3\,\mathrm{e}^{n+1} \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n.}$$

□

15. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  D'après la question précédente : $u_n \in [3, +\infty[$.
  Ainsi, d'après la question ***5.*** :

$$\begin{array}{ccc} \varphi(u_n) & \geqslant & \mathrm{e}\,u_n \\ \| & & \vee \\ u_{n+1} & & u_n \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

- Toujours d'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$$

  Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\,\mathrm{e}^n = +\infty$.

$$\boxed{\text{Par théorème de comparaison : } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

□

16. Écrire un programme **Scilab** qui affiche et calcule le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.

Démonstration.

```
1  n = 0
2  u = 3
3  while u < 10 ^ 3
4    u = exp(u) - u * exp(1/u)
5    n = n + 1
6  end
7  disp(n)
```

Détaillons les éléments de ce programme.

- **Début du programme**
  La variable `n` est initialisée à 0.
  La variable `u`, qui contiendra les valeurs successives de la suite (u_n), est initialisée à $u_0 = 3$.

```
1  n = 0
2  u = 3
```

- **Structure itérative**
  Les lignes 3 à 6 consistent à déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$. On doit donc calculer les valeurs successives de la suite (u_n) jusqu'à ce que $u_n \geqslant 10^3$. Autrement dit, on doit calculer ces valeurs successives tant que $u_n < 10^3$. Pour cela on met en place une structure itérative (while) :

```
3  while u < 10 ^ 3
```

Tant que $u_n < 10^3$, on calcule u_{n+1} et on stocke toujours cette valeur dans la variable `u` :

```
4    u = exp(u) - u * exp(1/u)
```

On met alors à jour en conséquence la variable `n` : on ajoute 1 pour signaler qu'on a calculé u_{n+1}.

```
5    n = n + 1
```

- **Fin du programme**
  À l'issue de cette boucle, la variable `n` contient le plus petit entier n tel que $u_n \geqslant 10^3$.
  On affiche alors enfin la valeur de la variable `n`

```
7  disp(n)
```

Commentaire

Afin de permettre une bonne compréhension des mécanismes en jeu, on a détaillé la réponse à cette question. Cependant, compléter correctement le programme **Scilab** démontre la bonne compréhension de la simulation demandée et permet certainement d'obtenir la majorité des points alloués à cette question.
On procèdera de même dans les autres questions **Scilab**.

□

17. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \geqslant 3\,\mathrm{e}^n$, par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$:
$$\frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{3\,\mathrm{e}^n}$$
- On obtient :
  × $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$
  × la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \in\ ]-1, 1[$. C'est donc une série convergente. Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ l'est aussi.

Par critère de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{u_n}$ est convergente.

□

Exercice 3 (EML 2012)

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \, dx$ est convergente.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction $x \mapsto x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur ce même intervalle.
- De plus :
  - × $\forall x \in [1, +\infty[$, $x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$,
  - × $x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$. En effet :

$$\frac{x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{\frac{1}{x^2}} = x^{n+2} \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(par croissances comparées)}$$

  - × $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $2 > 1$.
    C'est donc une intégrale convergente.

  Par critère de négligeabilité d'intégrales généralisées de fonctions continues positives, $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \, dx$ est convergente.
- Enfin, comme la fonction $x \mapsto x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ est continue sur le **segment** $[0, 1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^n \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \, dx$ est bien définie.

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } I_n \text{ est convergente.}}$$

□

2. ***a)*** Rappeler une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance nulle et de variance a^2.
En déduire : $I_0 = a \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Démonstration.

- On note X une v.a.r. de loi $\mathcal{N}\left(0, a^2\right)$.

$$\boxed{\text{Une densité de } X \text{ est : } f_X : x \mapsto \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2}.}$$

- On sait déjà, d'après la question précédente, que I_0 est une intégrale convergente. De plus :

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \, dx = a\sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \, dx = a\sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} f_X(x) \, dx$$

- On effectue le changement de variable $\boxed{u = -x}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -x \text{ (et donc } x = -u) \\ \hookrightarrow du = -\ dx \quad \text{ et } \quad dx = -\ du \\ \bullet\ x = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \\ \bullet\ x = +\infty \ \Rightarrow\ u = -\infty \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0]$.
On obtient :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_X(x)\ dx &=& \displaystyle\int_0^{-\infty} f_X(-u)(-du) & \\ &=& \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_X(-u)\ du & \\ &=& \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_X(u)\ du & \textit{(par parité de } f_X\textit{)} \end{array}$$

On a alors :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\ dx &=& \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_X(x)\ dx + \int_0^{+\infty} f_X(x)\ dx & \textit{(par relation de Chasles)} \\ &=& 2\displaystyle\int_0^{+\infty} f_X(x)\ dx & \textit{(d'après ce qui précède)} \end{array}$$

Comme f_X est une densité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\ dx = 1$ et : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_X(x)\ dx \ = \ \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } I_0 \ = \ a\sqrt{2\pi} \times \frac{1}{2} \ = \ a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

Commentaire

- Le programme officiel stipule que « les changements de variables affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque ». Pour autant, ce type de changement de variable ne peut se faire qu'après avoir démontré la convergence (ce qu'on a fait en question précédente).
- Cela signifie aussi que, de manière générale, on ne peut effectuer de changement de variable directement sur une intégrale impropre : on doit se ramener au préalable sur une intégrale sur un segment.

$\square$

b) Calculer la dérivée de l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.
En déduire : $I_1 = a^2$.

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = -\frac{1}{a^2}\ x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}}$$

- Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^A x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx &= -a^2 \int_0^A -\frac{1}{a^2}\,x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= -a^2 \int_0^A \varphi'(x)\,dx \\
&= -a^2\,\big[\,\varphi(x)\,\big]_0^A = -a^2\big(\varphi(A)-\varphi(0)\big) \\
&= -a^2\,\mathrm{e}^{-\frac{A^2}{2a^2}} + a^2 \\
&\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} a^2 && \textit{(par croissances comparées)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } I_1 = a^2.}$$

□

3. ***a)*** Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$:

$$\int_0^t x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx = -a^2\,t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)a^2 \int_0^t x^{n-2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$. Soit $t \in [0, +\infty[$. On remarque :

$$\int_0^t x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx = \int_0^t x^{n-1} \times x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx$$

On effectue l'intégration par parties (IPP) suivante :

$$\left|\begin{array}{rclcrcl}
u(x) &=& x^{n-1} & & u'(x) &=& (n-1)x^{n-2} \\
v'(x) &=& x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} & & v(x) &=& -a^2\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}
\end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, t]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^t x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx &= \left[\,-a^2\,x^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,\right]_0^t + a^2(n-1) \int_0^t x^{n-2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx \\
&= -a^2 t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)a^2 \int_0^t x^{n-2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in [0, +\infty[,\ \int_0^t x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx = -a^2 t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)a^2 \int_0^t x^{n-2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,dx}$$

Commentaire

Le programme officiel stipule que « les techniques de calculs (**intégration par parties**, changement de variables) seront pratiqués sur des intégrales sur un segment ». Dans cette question, l'énoncé détaille cette étape afin d'aboutir à un résultat sur l'intégrale impropre I_n (en question suivante).

□

b) En déduire, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $I_n = (n-1)\, a^2\, I_{n-2}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- On sait déjà, d'après la question ***1.***, que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\, dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n-2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\, dx$ sont convergentes.
- De plus, par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}} = 0$.
- En passant à la limite quand t tend vers $+\infty$ dans l'égalité obtenue en question précédente, on obtient alors :

$$\int_0^{+\infty} x^n\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\, dx \;=\; +(n-1)a^2 \int_0^{+\infty} x^{n-2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\, dx$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \geqslant 2 : I_n = (n-1)a^2\, I_{n-2}.}$$

□

c) Calculer I_2 et I_3.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $I_2 \;=\; (2-1)a^2\, I_{2-2} \;=\; a^2\, I_0$.
  Or, d'après ***2.a)*** : $I_0 = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } I_2 = a^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}.}$$

- D'après la la question précédente : $I_3 \;=\; (3-1)a^2\, I_{3-2} \;=\; 2a^2\, I_1$.
  Or, d'après ***2.b)*** : $I_1 = a^2$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } I_3 = 2a^4.}$$

□

On considère l'application $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{a^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

4. Montrer que g_a est une densité.

Démonstration.

- La fonction g_a est continue :
  - × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } g_a \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in\,]-\infty, 0]$, alors : $g_a(x) = 0 \geqslant 0$.
  - × si $x \in\,]0, +\infty[$, alors : $g_a(x) = \dfrac{x}{a^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ g_a(x) \geqslant 0.}$$

- Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)\, dx$ converge et vaut 1.
  × La fonction g_a est nulle en dehors de $]0,+\infty[$, donc :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)\, dx \;=\; \int_{0}^{+\infty} g_a(x)\, dx$$
  × D'après la question ***2.b)***, l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\, dx$ converge et vaut a^2.
  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{a^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\, dx$ converge et, par linéarité de l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{a^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\, dx \;=\; \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\, dx \;=\; \frac{1}{a^2}\, I_1 \;=\; \frac{1}{a^2}\, a^2 \;=\; 1$$

On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_a(x)\, dx$ converge et vaut 1.

Finalement, g_a est une densité.

□

On considère une variable aléatoire X admettant g_a comme densité.

Commentaire

- On est ici en présence d'un cas particulier d'une « loi classique hors programme » : la loi exponentielle linéaire.
- On retrouve exactement ce cas particulier dans l'`EDHEC 2018`. L'étude du cas général (loi à 2 paramètres et non 1) est l'objet du sujet `HEC 2017`.

5. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
× si $x \in\,]-\infty,0]$, alors, comme g_a est nulle en dehors de $]0,+\infty[$:
$$F_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} g_a(t)\, dt \;=\; 0$$
× si $x \in\,]0,+\infty[$, alors :
$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} g_a(t)\, dt \;=\; \int_0^x g_a(t)\, dt && \textit{(car } g_a \textit{ est nulle en dehors de }]0,+\infty[\textit{)} \\ &= \int_0^x \frac{t}{a^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\, dt \;=\; -\int_0^x \varphi'(t)\, dt && \textit{(d'après } \textbf{2.b)}\textit{)} \\ &= -\big[\,\varphi(t)\,\big]_0^x \;=\; -\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big) \\ &= 1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \end{aligned}$$

Finalement : $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in\,]-\infty,0] \\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x \in\,]0,+\infty[\end{cases}$.

□

6. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et : $\mathbb{E}(X) = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g_a(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m g_a(t)\ dt$.
- La fonction g_a est nulle en dehors de $]0,+\infty[$, donc :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, g_a(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{+\infty} t\, g_a(t)\ dt$$
- De plus, pour tout $t \in\ ]0,+\infty[$:
$$t\, g_a(t) \ = \ t \times \frac{t}{a^2}\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}} \ = \ \frac{1}{a^2} \times t^2\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}$$
Or, d'après la question ***1.***, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^2\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\ dt$ converge.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ admet une espérance.}}$$

- De plus, d'après la question ***3.c)*** :
$$\mathbb{E}(X) \ = \ \frac{1}{a^2}\ I_2 \ = \ \frac{1}{a^2}\ a^3\sqrt{\frac{\pi}{2}} \ = \ a\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$
$$\boxed{\mathbb{E}(X) \ = \ a\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

□

7. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $\mathbb{V}(X)$ et calculer $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une moment d'ordre 2 si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, g_a(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moments du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m g_a(t)\ dt$.
- La fonction g_a est nulle en dehors de $]0,+\infty[$, donc :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, g_a(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{+\infty} t^2\, g_a(t)\ dt$$
- De plus, pour tout $t \in\ ]0,+\infty[$:
$$t^2\, g_a(t) \ = \ t^2 \times \frac{t}{a^2}\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}} \ = \ \frac{1}{a^2} \times t^3\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}$$
Or, d'après la question ***1.***, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^3\, \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\ dt$ converge.

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ admet un moment d'ordre 2, donc une variance.}}$$

- De plus, d'après la question ***3.c)*** :

$$\mathbb{E}(X^2) \;=\; \frac{1}{a^2}\, I_3 \;=\; \frac{1}{a^2}\, 2\, a^4 \;=\; 2\, a^2$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) \;=\; 2\, a^2}$$

- D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) \;=\; \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2 \;=\; 2\, a^2 - \left(a \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2 \;=\; 2\, a^2 - a^2\, \frac{\pi}{2} \;=\; a^2 \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) \;=\; \frac{4-\pi}{2}\, a^2}$$

□

8. a) On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$. Montrer que la variable aléatoire $Z = a\,\sqrt{-2\ln(U)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.

Démonstration.

- On note $h : x \mapsto a\,\sqrt{-2\,\ln(x)}$ de telle sorte que $Z = h(U)$.
  On sait tout d'abord : $U(\Omega) = \,]0,1]$. On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} Z(\Omega) & = & \big(h(U)\big)(\Omega) \;=\; h\big(U(\Omega)\big) & \\ & = & h(]0,1]) & \\ & = & \left[h(1), \displaystyle\lim_{x\to 0^+} h(x)\right[& \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement décroissante sur }]0,1]\textit{) } (*) \\ & = & [0,+\infty[& \end{array}$$

Détaillons $(*)$:

× La fonction h est continue sur $]0,1]$ en tant que composée de fonctions continues (sur $]0,1]$ et sur $[0,+\infty[$)

× La fonction h est dérivable sur $]0,1[$ pour la même raison.
Soit $x \in\,]0,1[$.

$$h'(x) \;=\; a\, \frac{-\frac{\cancel{2}}{x}}{\cancel{2}\,\sqrt{-2\,\ln(x)}} \;=\; -\frac{a}{x\,\sqrt{-2\,\ln(x)}} \;<\; 0 \quad \textit{(car } a > 0 \textit{ et } x \in\,]0,1[\textit{)}$$

Donc la fonction h est bien strictement décroissante sur $]0,1]$.

$$\boxed{Z(\Omega) = [0,+\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x \in\,]-\infty, 0[$, alors : $[Z \leqslant x] = \varnothing$, car $Z(\Omega) = [0,+\infty[$. Donc :

$$F_Z(x) \;=\; \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

× si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_Z(x) & = & \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[a\sqrt{-2\,\ln(U)} \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{-2\,\ln(U)} \leqslant \dfrac{x}{a}\right]\right) & \textit{(car } a > 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[-2\,\ln(U) \leqslant \left(\dfrac{x}{a}\right)^2\right]\right) & \textit{(par stricte croissance de } x \mapsto x^2 \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\ln(U) \geqslant -\dfrac{x^2}{2a^2}\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[U \geqslant \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right]\right) & \textit{(par stricte croissance de } x \mapsto e^x \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & 1 - \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right]\right) & \textit{(car } U \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ & = & 1 - F_U\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) & \end{array}$$

De plus : $-\dfrac{x^2}{2a^2} \leqslant 0$. Ainsi, par croissance de $x \mapsto \mathrm{e}^x$: $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \leqslant 1$. D'où :

$$0 \ < \ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} \ \leqslant \ 1$$

Or :

$$F_U : u \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } u \in \,]-\infty, 0] \\ u & \text{si } u \in \,]0, 1] \\ 1 & \text{si } u \in \,]1, +\infty[\end{array} \right.$$

On en déduit :

$$F_Z(x) \ = \ 1 - F_U\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\right) \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Z : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0] \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x \in \,]0, +\infty[\end{array} \right. .}$$

- D'après la question ***5.***, on reconnaît la fonction de répartition de la v.a.r. X. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Z \text{ suit la même loi que } X.}$$

Commentaire

- Détaillons l'obtention de la continuité de la fonction h.
  La fonction h est continue sur $]0, 1]$ car elle est la composée $h_2 \circ h_1$ où :
  × $h_1 : x \mapsto -2\,\ln(x)$ est :
    - continue sur $]0, 1]$,
    - telle que : $h_1(]0, 1]) \subset [0, +\infty[$
  × $h_2 : x \mapsto a\sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Rappelons que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, mais dérivable sur $]0, +\infty[$, ce qui explique (en détaillant la composition comme ci-dessus), que la fonction h soit continue sur $]0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.

□

b) En déduire un programme en **Scilab**, utilisant la fonction `rand`, simulant la variable aléatoire X, le réel a strictement positif étant entré par l'utilisateur.
(On rappelle que la commande `rand()` simule une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$).

Démonstration.
D'après la question précédente, si $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$, alors la v.a.r. $a\sqrt{-2\ln(U)}$ suit la même loi que la v.a.r. X. On en déduit le script suivant :

```
a = input('Prière d'entrer une valeur strictement positive')
u = rand()
x = a * sqrt(-2 * log(u))
disp(x)
```

□

Soit un entier n tel que $n \geqslant 2$.
On dit que les variables aléatoires à densité $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont indépendantes si, pour tout, n-uplet $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de réels, les événements $[X_1 \leqslant x_1]$, $[X_2 \leqslant x_2]$, $\cdots$, $[X_n \leqslant x_n]$ sont mutuellement indépendants.
On admet que si n variables aléatoires à densité $X_1, X_2, \cdots, X_n$ admettent une espérance, alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ admet une espérance qui est égale à la somme des espérances.
On admet que si n variables aléatoires à densité $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont indépendantes et admettent variance alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance qui est égale à la somme des variances.
On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \cdots, X_n$ suivant toutes la même loi que la variable aléatoire X.
Soit Y_n une variable aléatoire. On donne les deux définitions suivantes :

- si Y_n admet une espérance, on dit que Y_n est un estimateur sans biais de a si : $\mathbb{E}(Y_n) = a$.
- si de plus Y_n admet une variance, on appelle risque quadratique de Y_n le réel $r(Y_n)$ défini par : $r(Y_n) = \mathbb{E}\left((Y_n - a)^2\right)$.

9. On considère la variable aléatoire $A_n = \dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

a) Montrer que la variable aléatoire A_n, est un estimateur sans biais de a.

Démonstration.

- La v.a.r. $A_n = f(X_1, \ldots, X_n)$, où la fonction f ne dépend pas du paramètre a.

  On en déduit que A_n est un estimateur de a.

- La v.a.r. A_n admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une ($X_1, \ldots, X_n$ admettent une espérance d'après ***6.***).
- On obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(A_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{n} \left(a\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\right) && \textit{(d'après \textbf{6.}, car } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi que } X\textit{)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \times na\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \ = \ a
\end{aligned}$$

La v.a.r. A_n est un estimateur sans biais de a.

□

b) Déterminer le risque quadratique de l'estimateur A_n.

Démonstration.

- La v.a.r. A_n admet une variance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une (X_1, ..., X_n admettent une variance d'après ***7.***).
- Par définition du risque quadratique de A_n :

$$\begin{array}{rcll} r(A_n) & = & \mathbb{E}\left((A_n - a)^2\right) & \\ & = & \mathbb{E}\left((A_n - \mathbb{E}(A_n))^2\right) & \textit{(car } A_n \textit{ est un estimateur sans biais de } a\textit{)} \\ & = & \mathbb{V}(A_n) & \textit{(par définition de la variance)} \end{array}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(A_n) & = & \mathbb{V}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) & \\ & = & \left(\dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}\right)^2 \mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) & \\ & = & \dfrac{2}{n^2\,\pi} \mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) & \\ & = & \dfrac{2}{n^2\,\pi} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) & \textit{(par indépendance de } X_1, \ldots, X_n\textit{)} \\ & = & \dfrac{2}{n^2\,\pi} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{4-\pi}{2}\, a^2\right) & \textit{(d'après } \mathbf{7.}\textit{, car } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi que } X\textit{)} \\ & = & \dfrac{2}{n^2\,\pi} \times n \dfrac{4-\pi}{2}\, a^2 & \\ & = & \dfrac{4-\pi}{\pi}\, \dfrac{a^2}{n} & \end{array}$$

$$\boxed{r(A_n) \ = \ \dfrac{4-\pi}{\pi}\, \dfrac{a^2}{n}}$$

□

On définit la variable aléatoire $M_n = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$.

10. a) Montrer, pour tout $t \in [0, +\infty[$: $\mathbb{P}([M_n > t]) = \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2a^2}}$.

Démonstration.
Soit $t \in [0, +\infty[$.

- Tout d'abord :

$$[M_n > t] \ = \ \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > t]$$

- On obtient :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([M_n < t]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i > t]\right) & \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i > t]) & \textit{(par indépendance de } X_1, \ldots, X_n\textit{)} \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X > t]) & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi que } X\textit{)} \\
& = & \big(\mathbb{P}([X > t])\big)^n & \\
& = & \big(1 - \mathbb{P}([X \leqslant t])\big)^n & \\
& = & \big(1 - F_X(t)\big)^n & \\
& = & \left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right)\right)^n & \textit{(d'après } \textbf{5.}\textit{, car } t \in [0, +\infty[\textit{)} \\
& = & \left(\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\right)^n \ = \ \mathrm{e}^{-\frac{n\,t^2}{2a^2}} &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall t \in [0, +\infty[,\ \mathbb{P}([M_n > t]) = \mathrm{e}^{-\frac{n\,t^2}{2a^2}}}$$

□

b) En déduire la fonction de répartition de M_n.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

- si $t \in\,]-\infty, 0[$, alors, avec le même raisonnement qu'en question précédente :

$$\begin{array}{rcll}
F_{M_n}(t) & = & \mathbb{P}([M_n \leqslant t]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([M_n > t]) & \\
& = & 1 - \big(1 - F_X(t)\big)^n & \\
& = & 1 - \big(1 - 0\big)^n & \textit{(d'après } \textbf{5.}\textit{, car } t \in]-\infty, 0[\textit{)} \\
& = & 0 &
\end{array}$$

- si $t \in [0, +\infty[$, alors, d'après la question précédente :

$$F_{M_n}(t) \ = \ \mathbb{P}([M_n \leqslant t]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([M_n > t]) \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{n\,t^2}{2a^2}}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{M_n} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in\,]-\infty, 0[\\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{n\,t^2}{2a^2}} & \text{si } t \in [0, +\infty[\end{cases}.}$$

□

c) Montrer que M_n est une variable aléatoire à densité, admettant g_b comme densité avec $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$.

Démonstration.

- On rappelle qu'une v.a.r. Y de densité g_b admet comme fonction de répartition, d'après ***5.*** :

$$G_b : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \,]-\infty, 0] \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2b^2}} & \text{si } t \in \,]0, +\infty[\end{cases}$$

  En prenant, $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$, on obtient, pour tout $t \in \,]0, +\infty[$:

$$\exp\left(-\frac{t^2}{2\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)^2}\right) \;=\; \exp\left(-\frac{t^2}{2\,\frac{a^2}{n}}\right) \;=\; \exp\left(-\frac{n\,t^2}{2a^2}\right)$$

  D'où :

$$G_b : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \,]-\infty, 0] \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{n\,t^2}{2a^2}} & \text{si } t \in \,]0, +\infty[\end{cases}$$

- On remarque : $F_{M_n} = G_b$.
  Or la fonction de répartition caractérise la loi. On en déduit que les v.a.r. M_n et Y.

De plus, Y est une v.a.r. à densité. La v.a.r. M_n est donc aussi une v.a.r. à densité.

- La v.a.r. Y admet g_b pour densité.

Comme Y et M_n ont même loi, on en déduit qu'une densité de M_n est g_b avec $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$.

Commentaire

On pouvait également utiliser la définition de v.a.r. à densité.

- La fonction F_{M_n} est continue :
  - × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]0, +\infty[$ en tant que composée de fonctions continues sur $]0, +\infty[$,
  - × en 0. En effet, d'une part : $\lim\limits_{t \to 0^-} F_{M_n}(t) = 0$.
    D'autre part :
    $$\lim_{t \to 0^+} F_{M_n}(t) \;=\; F_{M_n}(0) \;=\; 1 - 1 \;=\; 0$$
    Finalement, on a bien :
    $$\lim_{t \to 0^+} F_{M_n}(t) \;=\; F_{M_n}(0) \;=\; \lim_{t \to 0^-} F_{M_n}(t)$$
- La fonction F_{M_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

On en déduit que M_n est une v.a.r. à densité.

Commentaire

Pour déterminer une densité f_{M_n} de M_n, on dérive la fonction F_{M_n} sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ (qui sont bien des intervalles ouverts).
Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $t \in]-\infty, 0[$:
$$f_{M_n}(t) \ = \ F'_{M_n}(t) \ = \ 0$$

× si $t \in]0, +\infty[$:
$$f_{M_n}(t) \ = \ F'_{M_n}(t) \ = \ \frac{n\,t}{a^2}\ \mathrm{e}^{-\frac{n\,t^2}{2a^2}}$$

Enfin, on choisit la valeur arbitraire : $f_{M_n}(0) = 0$.

On en déduit : $f_{M_n} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0] \\ \dfrac{n\,t}{a^2}\ \mathrm{e}^{-\frac{n\,t^2}{2a^2}} & \text{si } t \in]0, +\infty[\end{cases}$.

On a bien : $f_{M_n} = g_b$ avec $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$. □

d) Montrer que la variable aléatoire M_n, admet une espérance $\mathbb{E}(M_n)$ et une variance $\mathbb{V}(M_n)$. Calculer $\mathbb{E}(M_n)$ et $\mathbb{V}(M_n)$.

Démonstration.

- D'après les questions ***6.*** et ***7.***, la v.a.r. Y admet une espérance et une variance.
Or Y et M_n ont même loi si $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } M_n \text{ admet une espérance et une variance.}}$$

- D'après la question ***6.*** :
$$\mathbb{E}(M_n) \ = \ \frac{a}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$
$$\boxed{\mathbb{E}(M_n) \ = \ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\,n}}\ a}$$

- D'après la question ***7.*** :
$$\mathbb{V}(M_n) \ = \ \frac{4-\pi}{2} \left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right)^2$$
$$\boxed{\mathbb{V}(M_n) \ = \ \frac{4-\pi}{2}\ \frac{a^2}{n}}$$
□

11. *a)* En déduire un estimateur B_n sans biais de a, de la forme $\lambda_n M_n$ avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

- La v.a.r. $B_n = \lambda_n\, M_n$ admet une espérance car la v.a.r. M_n en admet une.
- On cherche λ_n tel que $\mathbb{E}(\lambda_n\, M_n) = a$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(\lambda_n\, M_n) = a & \Leftrightarrow & \lambda_n \mathbb{E}(M_n) = a & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & \Leftrightarrow & \lambda_n\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\,n}}\ a = a & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & \Leftrightarrow & \lambda_n\, \cancel{a} = \dfrac{\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}}\ \cancel{a} & \end{array}$$

- On a bien que $B_n = \dfrac{\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}}\ M_n = f(X_1, \ldots, X_n)$, où f ne dépend pas du paramètre a.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } B_n = \dfrac{\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}}\ M_n \text{ est un estimateur sans biais de } a.}$$

□

b) Déterminer le risque quadratique de l'estimateur B_n.

Démonstration.

- La v.a.r. B_n admet une variance car la v.a.r. M_n en admet une.
- Tout d'abord, par définition du risque quadratique de B_n :

$$\begin{array}{rcll} r(B_n) & = & \mathbb{E}\left((B_n - a)^2\right) & \\ & = & \mathbb{E}\left(\left(B_n - \mathbb{E}(B_n)\right)^2\right) & \textit{(car } B_n \textit{ est un estimateur sans biais de } a\textit{)} \\ & = & \mathbb{V}(B_n) & \textit{(par définition de la variance)} \end{array}$$

- Ensuite, d'après la question précédente :

$$\mathbb{V}(B_n) \ = \ \mathbb{V}\left(\dfrac{\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}}\ M_n\right) \ = \ \left(\dfrac{\sqrt{2n}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 \mathbb{V}(M_n) \ = \ \dfrac{\cancel{2n}}{\pi} \times \dfrac{4-\pi}{\cancel{2}}\ \dfrac{a^2}{\cancel{n}} \ = \ \dfrac{4-\pi}{\pi}\ a^2$$

$$\boxed{r(B_n) \ = \ \dfrac{4-\pi}{\pi}\ a^2}$$

Commentaire

On peut noter que les v.a.r. A_n et B_n sont deux estimateurs sans biais de a. De plus :

$$\lim_{n\to+\infty} r(A_n) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} r(B_n) = \dfrac{4-\pi}{\pi}\ a^2 \neq 0$$

L'estimateur A_n est donc, en plus d'être sans biais, un estimateur convergent, contrairement à B_n.
L'estimateur A_n est donc à privilégier pour l'estimation de a.

□