
DS8 (version B)

Ce problème est constitué de trois parties. Les résultats de la partie 1 sont utilisés dans les parties 2 et 3. Les parties 2 et 3 sont indépendantes entre elles.

Dans tout le sujet, $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} , où a et b sont réels ou infinis.

On dit qu'une densité vérifie l'hypothèse $\text{CSP}(I)$ lorsque f est :

- × continue sur I ;
- × strictement positive sur I ;
- × nulle en dehors de I .

On écrira alors simplement : f est $\text{CSP}(I)$.

On admettra que les principaux résultats du cours concernant l'indépendance des variables aléatoires discrètes s'appliquent également aux variables aléatoires à densité.

Partie 1 - Calcul d'une probabilité

On considère dans cette partie :

- × X une variable aléatoire réelle continue à valeurs dans I , de fonction de répartition F et admettant une densité de probabilité f qui est $\text{CSP}(I)$.
- × U une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $]0, 1[$ et qui est indépendante de X .
- × h une fonction continue sur I à valeurs dans $[0, 1]$.

On se propose d'établir la formule suivante :

$$\mathbb{P}([U \leq h(X)]) = \mathbb{P}([U < h(X)]) = \int_a^b f(t) h(t) dt$$

On définit sur I la fonction Ψ par : $\Psi(x) = \mathbb{P}([X \leq x] \cap [U \leq h(X)])$.

1. Pour tous réels x et y dans I tels que $x < y$, on pose $M(x, y) = \max_{t \in [x, y]} h(t)$ et $m(x, y) = \min_{t \in [x, y]} h(t)$.

a) Soit x dans I . Justifier que pour tout y dans l'intervalle $]x, b[$, il existe α_y dans l'intervalle $[x, y]$ tel que $M(x, y) = h(\alpha_y)$.

b) En déduire : $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} M(x, y) = h(x)$.

c) Montrer de même que, pour tout y dans I : $\lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x < y}} M(x, y) = h(y)$.

On montrerait de manière analogue (on ne demande pas de le vérifier) :

$$\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y > x}} m(x, y) = h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x < y}} m(x, y) = h(y)$$

2. Soit x et y deux réels de I tels que $x < y$.

a) Établir l'inclusion suivante entre évènements :

$$[x < X \leq y] \cap [U \leq h(X)] \subset [x < X \leq y] \cap [U \leq M(x, y)]$$

En déduire l'inégalité :

$$\Psi(y) - \Psi(x) \leq (F(y) - F(x)) M(x, y)$$

b) Établir une minoration analogue pour $\Psi(y) - \Psi(x)$, puis l'encadrement :

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x} m(x, y) \leq \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} \leq \frac{F(y) - F(x)}{y - x} M(x, y)$$

c) Montrer que Ψ est dérivable sur I , et exprimer sa dérivée en fonction de f et h .

3. a) En déduire que, pour tout x et y dans I :

$$\Psi(y) - \Psi(x) = \int_x^y f(t) h(t) dt$$

b) Établir : pour tout x dans I , $\Psi(x) \leq F(x)$, puis montrer : $\lim_{x \rightarrow a} \Psi(x) = 0$. En déduire :

$$\forall x \in I, \quad \Psi(x) = \int_a^x f(t) h(t) dt$$

c) Établir, pour tout x dans I : $\mathbb{P}([X > x] \cap [U \leq h(X)]) = \mathbb{P}([U \leq h(X)]) - \Psi(x)$.
 En déduire : $\lim_{x \rightarrow b} \Psi(x) = \mathbb{P}([U \leq h(X)])$ puis :

$$\mathbb{P}([U \leq h(X)]) = \int_a^b f(t) h(t) dt$$

4. Montrer : $\mathbb{P}([U < h(X)]) = 1 - \mathbb{P}([1 - U \leq 1 - h(X)])$, en déduire :

$$\mathbb{P}([U < h(X)]) = \int_a^b f(t) h(t) dt$$

Partie 2 - Le modèle économique de Leontiev fermé

Soit α et β deux nombres réels appartenant à l'intervalle $]0, 1[$.

On s'intéresse à un modèle économique composé de trois secteurs d'activité S_1 , S_2 et S_3 .

On suppose que :

- × pour produire une unité de biens du secteur 1, il faut α unités du secteur 1 et α unités du secteur 2.
- × pour produire une unité de biens du secteur 2, il faut β unités du secteur 1 et α unités du secteur 3.
- × pour produire une unité de biens du secteur 3, il faut β unités du secteur 2 et β unités du secteur 3.

On dira que ce modèle est *vable* s'il existe des quantités de productions x_1 , x_2 et x_3 des secteurs respectifs S_1 , S_2 et S_3 , strictement positives et telles que chaque secteur soit excédentaire en quantité.

5. a) Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, tels que :

$$\begin{cases} x_1 > \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2 > \alpha x_1 + \beta x_3 \\ x_3 > \alpha x_2 + \beta x_3 \end{cases}$$

b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe une matrice colonne X à composantes strictement positives telle que la matrice colonne $X - AX$ n'a que des composantes strictement positives.

6. a) Vérifier que $\alpha + \beta$ est valeur propre de A et déterminer le sous espace vectoriel associé.
b) En déduire que si $\alpha + \beta < 1$, alors le modèle est viable.
On admet pour la suite que le modèle est viable si et seulement si le spectre de A est inclus dans $] - 1, 1[$.
7. a) Montrer que le modèle est viable si et seulement si $\alpha + \beta < 1$.
b) Déterminer les valeurs propres de A autres que $\alpha + \beta$, et vérifier qu'elles sont dans l'intervalle $] - 1, 1[$.
8. On suppose, dans cette question seulement, que α est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$ et que β est une variable aléatoire à valeurs dans $]0, 1[$, admettant une densité de probabilité f qui est CSP($]0, 1[$).
En utilisant les résultats de la **Partie 1**, montrer que la probabilité que le modèle soit viable vaut $1 - \mathbb{E}(\beta)$.
9. On suppose désormais que α et β sont tels que le modèle est viable. Pour $i = 1, 2$ ou 3 , on note y_i le coût de production d'une unité de bien dans le secteur i , et $y_i + z_i$, le prix de vente d'une unité de bien du secteur i . La marge z_i est appliquée uniquement en cas de vente à un autre secteur, l'achat à l'intérieur d'un même secteur se faisant au prix coûtant y_i .
On définit les deux matrices lignes : $Y = (y_1 \ y_2 \ y_3)$ et $Z = (z_1 \ z_2 \ z_3)$ ainsi que la matrice carrée $B = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$.
- a) Établir la relation matricielle (1) : $Y = Y A + Z B$.
b) Justifier sans calculs l'inversibilité de $I_3 - A$.
En déduire que pour Z fixé, il existe un unique Y vérifiant la relation (1).

Partie 3 - Simulation de variables aléatoires

La plupart des langages informatiques possèdent un générateur de nombres aléatoires. En **Scilab** par exemple, on dispose de la fonction `rand`. Cette fonction simule une v.a.r. de loi uniforme sur $]0, 1[$.

On propose dans la suite deux méthodes permettant de simuler des lois continues quelconques en utilisant ce générateur aléatoire.

Jusqu'à la fin du problème : on note Z une variable aléatoire continue à valeurs dans I , de fonction de répartition G et admettant une densité g qui est CSP(I).

A - Simulation par la méthode d'inversion

10. a) On note H la restriction de G à I . Montrer que H réalise une bijection de I sur $]0, 1[$.
On note H^{-1} la bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de H^{-1} .
Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$.
On pose $X = H^{-1}(U)$, et on note F la fonction de répartition de X .
- b) Montrer que pour tout x dans I , $F(x) = G(x)$.
c) En déduire que X suit la même loi que Z .

11. Simulation de lois exponentielles.

On suppose dans cette question que Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Expliciter l'intervalle I et les fonctions g , G et H^{-1} .

b) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function z = expo(lambda)` qui simule la loi exponentielle de paramètre `lambda`.

12. Simulation de la loi de Laplace.

On cherche dans cette question à simuler une variable aléatoire de densité g donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \quad (\text{densité de Laplace})$$

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.

Soit V une variable aléatoire indépendante de Y suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, ce qui signifie

$$\mathbb{P}([V = -1]) = \mathbb{P}([V = 1]) = \frac{1}{2}.$$

On pose $X = VY$.

a) Vérifier que g est une densité de probabilité qui est CSP(\mathbb{R}).

b) Établir :

$$\times \text{ pour tout } x \geq 0, \mathbb{P}([X > x]) = \frac{1}{2} \mathbb{P}([Y > x]);$$

$$\times \text{ pour tout } x \leq 0, \mathbb{P}([X \leq x]) = \frac{1}{2} \mathbb{P}([Y \geq -x]);$$

c) En déduire une expression de la fonction de répartition de X .

d) Conclure que X est une variable aléatoire continue admettant g comme densité.

e) Compléter la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle simule la loi de Laplace :

```
1  function z = laplace()
2     y = expo(1)
3     v = rand()
4     if ... then
5         z = y
6     else
7         z = ...
8     end
9  endfunction
```

B - Simulation par la méthode du rejet

Dans la méthode dite du rejet, pour simuler la loi de Z de densité g (voir les notations en préambule de la **Partie 3**), on commence par déterminer une loi de probabilité que l'on sait simuler, de densité f qui est CSP(I), et qui vérifie : il existe une constante $c > 0$ telle que : $\forall x \in I, g(x) \leq c f(x)$.

13. Montrer qu'il existe une fonction h continue sur I et à valeurs dans $[0, 1]$ telle que, pour tout $x \in I$, $g(x) = c f(x) h(x)$.

On considère alors :

\times une suite de variable aléatoires $(U_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ qui suivent une loi uniforme sur $]0, 1[$.

\times une suite de variable aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ à valeur dans $]a, b[$ ayant toutes la même loi, de densité de probabilité f et de fonction de répartition F .

On suppose de plus que pour tout entier $n \geq 1$, les variables $X_1, \dots, X_n, U_1, \dots, U_n$ sont mutuellement indépendantes.

On définit N la variable aléatoire prenant comme valeur le premier indice k vérifiant $U_k \leq h(X_k)$.

14. En utilisant la **Partie 1**, prouver l'égalité, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([U_k \leq h(X_k)]) = \frac{1}{c}$.

En déduire que N suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre, l'espérance et la variance.

On définit la variable aléatoire X comme étant la valeur de X_N , c'est à dire la valeur de X_k pour le premier indice k vérifiant $U_k \leq h(X_k)$.

15. Soit $x \in I$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Exprimer l'événement $[X \leq x] \cap [N = n]$ à partir des événements $[X_n \leq x] \cap [U_n \leq h(X_n)]$ et $[U_k > h(X_k)]$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

b) En utilisant la question 3.b), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([X_n \leq x] \cap [U_n \leq h(X_n)]) = \frac{1}{c} G(x)$$

c) En déduire $\mathbb{P}([X_n \leq x] \cap [N = n])$ en fonction de c et de $G(x)$.

d) Montrer finalement : $\mathbb{P}([X \leq x]) = G(x)$.

16. Conclure.

17. Simulation de la loi normale.

Dans cette question, Z suit la loi normale centrée réduite, donc $I = \mathbb{R}$.

Soit f la densité de Laplace (question 12.), définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

a) Donner une densité g de Z qui est CSP(\mathbb{R}).

b) Étudier les variations sur $[0, +\infty[$ de la fonction $a : x \mapsto e^{x - \frac{x^2}{2}}$.

c) Expliciter une constante $c > 0$ telle que, pour tout $x \geq 0$: $g(x) \leq \frac{c}{2} e^{-x}$.

d) En déduire, pour tout x réel : $g(x) \leq c f(x)$.

e) Expliquer alors comment mettre en place la méthode du rejet pour simuler la loi normale centrée réduite. On explicitera la fonction h introduite à la question 13.

f) Compléter la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle simule la loi normale centrée réduite :

```

1  function z = normale()
2      x = laplace()
3      u = rand()
4      while ...
5          x = laplace()
6          u = rand()
7      end
8      z = ...
9  endfunction
    
```