DS8 (version B) - ESSEC-I 2014 / 124

Ce problème est constitué de trois parties. Les résultats de la partie 1 sont utilisés dans les parties 2 et 3. Les parties 2 et 3 sont indépendantes entre elles.
Dans tout le sujet, $I =]a, b[$ est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, où a et b sont réels ou infinis.
On dit qu'une densité vérifie l'hypothèse CSP(I) lorsque f est :

- × continue sur I ;
- × strictement positive sur I ;
- × nulle en dehors de I.

On écrira alors simplement : f est CSP(I).
On admettra que les principaux résultats du cours concernant l'indépendance des variables aléatoires discrètes s'appliquent également aux variables aléatoires à densité.

Partie 1 - Calcul d'une probabilité / 36

On considère dans cette partie :

- × X une variable aléatoire réelle continue à valeurs dans I, de fonction de répartition F et admettant une densité de probabilité f qui est CSP(I).
- × U une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $]0, 1[$ et qui est indépendante de X.
- × h une fonction continue sur I à valeurs dans $[0, 1]$.

On se propose d'établir la formule suivante :

$$\mathbb{P}([U \leqslant h(X)]) \ = \ \mathbb{P}([U < h(X)]) \ = \ \int_a^b f(t)\, h(t)\, dt$$

On définit sur I la fonction Ψ par : $\Psi(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [U \leqslant h(X)])$.

1. Pour tous réels x et y dans I tels que $x < y$, on pose $M(x,y) = \max\limits_{t\in[x,y]} h(t)$ et $m(x,y) = \min\limits_{t\in[x,y]} h(t)$.

a) Soit x dans I. Justifier que pour tout y dans l'intervalle $]x, b[$, il existe α_y dans l'intervalle $[x, y]$ tel que $M(x, y) = h(\alpha_y)$.

- **2 pts : la fonction h est continue sur le segment $[x, y]$ donc bornée et atteint ses bornes** *(tout ou rien)*.

b) En déduire : $\lim\limits_{\substack{y\to x\\ y>x}} M(x, y) = h(x)$.

- **3 pts : démontrer que $t : y \mapsto \alpha_y$ admet x comme limite en x^+ (1 pt pour l'idée, 2 pts pour le faire formellement)**
- **1 pt : composition des limites** $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{y\to x\\ y>x}} t(y) = x \\ \lim\limits_{Y\to x} h(Y) = h(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{y\to x\\ y>x}} h\big(t(y)\big) = \lim\limits_{Y\to x} h(Y) = h(x)$

c) Montrer de même que, pour tout y dans I : $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x<y}} M(x, y) = h(y)$.

- **2 pts : il suffit de mettre en place la démonstration précédente en inversant le rôle des variables x et y (*tout ou rien*).**

On montrerait de manière analogue (on ne demande pas de le vérifier) :

$$\lim_{\substack{y\to x\\ y>x}} m(x,y) = h(x) \quad \text{ et } \quad \lim_{\substack{x\to y\\ x<y}} m(x,y) = h(y)$$

2. Soit x et y deux réels de I tels que $x < y$.

a) Établir l'inclusion suivante entre événements :

$$[x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)] \ \subset \ [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant M(x,y)]$$

En déduire l'inégalité :

$$\Psi(y) - \Psi(x) \ \leqslant \ (F(y) - F(x))\, M(x,y)$$

- **2 pts : démo de** $[x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)] \ \subset \ [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant M(x,y)]$ **dont 1 pt pour introduction des** ω**, 1 pt pour la démonstration**
- **2 pts :** $\Psi(y) - \Psi(x) \ = \ \mathbb{P}\big(\, [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)] \,\big)$ **(FPT ou différence ensembliste)**
- **1 pt :** $\Psi(y) - \Psi(x) \ = \ \mathbb{P}\big(\, [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)] \,\big) \ \leqslant \ \mathbb{P}\big(\, [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant M(x,y)] \,\big)$ **Par croissance de** $\mathbb{P}$**.**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\, [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant M(x,y)] \,\big) = \big(F(y) - F(x)\big) \times M(x,y)$ **(dont indépendance)**

b) Établir une minoration analogue pour $\Psi(y) - \Psi(x)$, puis l'encadrement :

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x}\ m(x,y) \ \leqslant \ \frac{\Psi(y) - \Psi(x)}{y - x} \ \leqslant \ \frac{F(y) - F(x)}{y - x}\ M(x,y)$$

- **2 pts :** $\Psi(y) - \Psi(x) \ \geqslant \ \big(F(y) - F(x)\big)\ m(x,y)$

  dont 1 pt : $\mathbb{P}\big(\, [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant m(x,y)] \,\big) \ \leqslant \ \mathbb{P}\big(\, [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant h(X)] \,\big)$

  dont 1 pt : $\Psi(y) - \Psi(x) = \mathbb{P}\big(\, [x < X \leqslant y] \cap [U \leqslant m(x,y)] \,\big) = \big(F(y) - F(x)\big) \times F_U\big(m(x,y)\big)$
- **1 pt : affirmer** $\big(F(y) - F(x)\big)\ m(x,y) \ \leqslant \ \Psi(y) - \Psi(x) \ \leqslant \ \big(F(y) - F(x)\big)\ M(x,y)$ **et diviser par** $y - x > 0$

c) Montrer que Ψ est dérivable sur I, et exprimer sa dérivée en fonction de f et h.

- **1 pt :** F **est dérivable à droite en** x
- **1 pt :** $\lim\limits_{\substack{v \to x \\ v > x}} \dfrac{F(v) - F(x)}{v - x}\ m(x,v) = f(x)h(x) = \lim\limits_{\substack{v \to x \\ v > x}} \dfrac{F(v) - F(x)}{v - x}\ M(x,v)$ **et donc** Ψ **dérivable à droite par théorème d'encadrement**
- **1 pt : de la même manière** Ψ **dérivable à gauche par théorème d'encadrement**
- **1 pt :** $\lim\limits_{u \to x^-} \tau_x(\Psi)(u) = f(x)\ h(x) = \lim\limits_{v \to x^+} \tau_x(\Psi)(v)$ **donc** Ψ **dérivable en** x

3. ***a)*** En déduire que, pour tout x et y dans I :

$$\Psi(y) - \Psi(x) \ = \ \int_x^y \ f(t)\, h(t)\ dt$$

- **1 pt :** $f \times h$ **est continue sur le segment** $[x, y]$ **donc** $\int_x^y f(t)\, h(t)\ dt$ **est bien définie**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_x^y \ f(t)\, h(t)\ dt = \int_x^y \ \Psi'(t)\ dt = [\ \Psi(t)\ ]_x^y = \Psi(y) - \Psi(x)$

b) Établir : pour tout x dans I, $\Psi(x) \leqslant F(x)$, puis montrer : $\lim\limits_{x \to a} \Psi(x) = 0$. En déduire :

$$\forall x \in I, \quad \Psi(x) = \int_a^x f(t)\, h(t)\ dt$$

- **1 pt :** $\Psi(x) = \mathbb{P}\big([X \leqslant x] \cap [U \leqslant h(X)] \big) \leqslant \mathbb{P}\big([X \leqslant x] \big) = F(x)$ **par croissance de** $\mathbb{P}$
- **2 pts :** $\lim\limits_{x \to a} F(x) = 0$ **(1 pt pour le cas** $a = -\infty$**)**
- **1 pt : par théorème d'encadrement,** $\lim\limits_{x \to a} \Psi(x) = 0$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to a} \Psi(y) = \lim\limits_{x \to a} \left(\displaystyle\int_x^y f(t)\, h(t)\ dt + \Psi(x) \right) = \lim\limits_{x \to a} \displaystyle\int_x^y f(t)\, h(t)\ dt + \lim\limits_{x \to a} \Psi(x)$

c) Établir, pour tout x dans I : $\mathbb{P}([X > x] \cap [U \leqslant h(X)]) = \mathbb{P}([U \leqslant h(X)]) - \Psi(x)$.
En déduire : $\lim\limits_{x \to b} \Psi(x) = \mathbb{P}([U \leqslant h(X)])$ puis :

$$\mathbb{P}([U \leqslant h(X)]) = \int_a^b f(t)\, h(t)\ dt$$

- **1 pt : par FPT sur le SCE** $([X \leqslant x]\,, [X > x])$ **on a**
  $\mathbb{P}\big([U \leqslant h(X)] \big) = \mathbb{P}\big([X \leqslant x] \cap [U \leqslant h(X)] \big) + \mathbb{P}\big([X > x] \cap [U \leqslant h(X)] \big)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X > x] \cap [U \leqslant h(X)] \big) \leqslant \mathbb{P}\big([X > x] \big) = 1 - \mathbb{P}\big([X \leqslant x] \big)$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to b} (1 - F(x)) = 0$ **(comme précédent)**
- **1 pt : par théorème d'encadrement :** $\lim\limits_{x \to b} \mathbb{P}\big([X > x] \cap [U \leqslant h(X)] \big) = 0$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to b} \Psi(x) = \mathbb{P}\big([U \leqslant h(X)] \big) + 0 = \mathbb{P}\big([U \leqslant h(X)] \big)$
- **0 pt :** $\lim\limits_{x \to b} \displaystyle\int_a^x f(t)\, h(t)\ dt = \int_a^b f(t)\, h(t)\ dt$

4. Montrer : $\mathbb{P}([U < h(X)]) = 1 - \mathbb{P}([1 - U \leqslant 1 - h(X)])$, en déduire :

$$\mathbb{P}([U < h(X)]) = \int_a^b f(t)\, h(t)\ dt$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}([U < h(X)]) = 1 - \mathbb{P}([1 - U \leqslant 1 - h(X)])$ **par opérations algébriques**
- **1 pt : appliquer le résultat précédent à** $V = 1 - U$ **et** $\tilde{h} : x \mapsto 1 - h(x)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([U < h(X)]) = 1 - \mathbb{P}([1 - U \leqslant 1 - h(X)]) = 1 - \mathbb{P}\Big(\big[V \leqslant \tilde{h}(X) \big] \Big) = \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \displaystyle\int_a^b f(t)\, h(t)\ dt \right)$

Partie 2 - Le modèle économique de Leontiev fermé / 22

Soit α et β deux nombres réels appartenant à l'intervalle $]0,1[$.
On s'intéresse à un modèle économique composé de trois secteurs d'activité S_1, S_2 et S_3.
On suppose que :

× pour produire une unité de biens du secteur 1, il faut α unités du secteur 1 et α unités du secteur 2.

× pour produire une unité de biens du secteur 2, il faut β unités du secteur 1 et α unités du secteur 3.

× pour produire une unité de biens du secteur 3, il faut β unités du secteur 2 et β unités du secteur 3.

On dira que ce modèle est *viable* s'il existe des quantités de productions x_1, x_2 et x_3 des secteurs respectifs S_1, S_2 et S_3, strictement positives et telles que chaque secteur soit excédentaire en quantité.

5. ***a)*** Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 > \alpha x_1 + \beta x_2 \\ x_2 > \alpha x_1 + \beta x_3 \\ x_3 > \alpha x_2 + \beta x_3 \end{array} \right.$$

- 2 pts : tout ou rien

b) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$. Montrer que le modèle est viable si et seulement s'il existe une matrice colonne X à composantes strictement positives telle que la matrice colonne $X - AX$ n'a que des composantes strictement positives.

- 1 pt : $X - AX = \begin{pmatrix} x_1 - (\alpha\, x_1 + \beta\, x_2) \\ x_2 - (\alpha\, x_1 + \beta\, x_3) \\ x_3 - (\alpha\, x_2 + \beta\, x_3) \end{pmatrix}$

- 1 pt : conclusion

6. ***a)*** Vérifier que $\alpha + \beta$ est valeur propre de A et déterminer le sous espace vectoriel associé.

- 1 pt : $\alpha + \beta$ **valeur propre de** A **et** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **est vecteur propre**

- 1 pt : $\text{rg}(A - (\alpha + \beta)\, I_3) = 2$ **(calcul)**

- 1 pt : théorème du rang $\dim\big(E_{\alpha+\beta}(A)\big) = 3 - 2 = 1$ **et** $E_{\alpha+\beta}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

Ou calcul direct de $E_{\alpha+\beta}(A)$

b) En déduire que si $\alpha + \beta < 1$, alors le modèle est viable.

- 1 pt : avec $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$**, on a :** $X - AX = X - (\alpha + \beta) \cdot X = \begin{pmatrix} 1 - (\alpha + \beta) \\ 1 - (\alpha + \beta) \\ 1 - (\alpha + \beta) \end{pmatrix}$ **à coeff** > 0

On admet pour la suite que le modèle est viable si et seulement si le spectre de A est inclus dans $]-1,1[$.

7. ***a)*** Montrer que le modèle est viable si et seulement si $\alpha + \beta < 1$.

- 1 pt : d'après *6.b)*, $\alpha + \beta < 1 \;\Rightarrow\;$ **Le système est viable**

- 1 pt : $\alpha + \beta < 1 \;\Leftarrow\;$ **Le système est viable d'après le résultat fourni dans l'énoncé**

b) Déterminer les valeurs propres de A autres que $\alpha + \beta$, et vérifier qu'elles sont dans l'intervalle $]-1, 1[$.

- 3 pts : calcul de $\text{rg}\left(\begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \beta & 0 \\ \alpha & -\lambda & \beta \\ 0 & \alpha & \beta - \lambda \end{pmatrix}\right)$

- 1 pt : A **a pour valeur propre** $\sqrt{\alpha\,\beta} \in \,]0,1[$ **et** $-\sqrt{\alpha\,\beta} \in \,]-1,0[$

8. On suppose, dans cette question seulement, que α est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$ et que β est une variable aléatoire à valeurs dans $]0, 1[$, admettant une densité de probabilité f qui est $\text{CSP}(]0, 1[)$.
En utilisant les résultats de la **Partie 1**, montrer que la probabilité que le modèle soit viable vaut $1 - \mathbb{E}(\beta)$.

- 1 pt : la probabilité que le système soit viable est donc : $\mathbb{P}([\alpha + \beta < 1])$

- 1 pt : considérer la fonction $h : t \mapsto 1 - t$

- 1 pt : $\mathbb{P}\big(\,[\alpha + \beta < 1]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[\alpha < h(\beta)]\,\big) = \displaystyle\int_0^1 \ f(t)\,h(t)\ dt = \int_0^1 \ f(t)\,(1-t)\ dt$

- 1 pt : $= \displaystyle\int_0^1 \ f(t)\ dt - \int_0^1 \ t\,f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \ f(t)\ dt - = 1 - \mathbb{E}(\beta)$

9. On suppose désormais que α et β sont tels que le modèle est viable. Pour $i = 1, 2$ ou 3, on note y_i le coût de production d'une unité de bien dans le secteur i, et $y_i + z_i$, le prix de vente d'une unité de bien du secteur i. La marge z_i est appliquée uniquement en cas de vente à un autre secteur, l'achat à l'intérieur d'un même secteur se faisant au prix coûtant y_i.
On définit les deux matrices lignes : $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$ ainsi que la matrice carrée $B = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

a) Établir la relation matricielle (1) : $Y = Y\,A + Z\,B$.

- 2 pts : tout ou rien

b) Justifier sans calculs l'inversibilité de $I_3 - A$.
En déduire que pour Z fixé, il existe un unique Y vérifiant la relation (1).

- 1 pt : 1 **n'est pas valeur propre de** A **et donc** $I_3 - A$ **est inversible**

- 1 pt : $Y = (I_3 - A)^{-1}\,Z\,B$

Partie 3 - Simulation de variables aléatoires

La plupart des langages informatiques possèdent un générateur de nombres aléatoires. En **Scilab** par exemple, on dispose de la fonction `rand`. Cette fonction simule une v.a.r. de loi uniforme sur $]0,1[$.
On propose dans la suite deux méthodes permettant de simuler des lois continues quelconques en utilisant ce générateur aléatoire.
Jusqu'à la fin du problème : on note Z une variable aléatoire continue à valeurs dans I, de fonction de répartition G et admettant une densité g qui est CSP(I).

A - Simulation par la méthode d'inversion / 30

10. ***a)*** On note H la restriction de G à I. Montrer que H réalise une bijection de I sur $]0,1[$.
On note H^{-1} la bijection réciproque. Dresser le tableau de variation de H^{-1}.

- **1 pt :** G **de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $]a,b[$ **car** g **est continue sur** $]a,b[$
- **2 pts :** G **réalise une bijection de** $]a,b[$ **sur** $G\big(]a,b[\big) = \big]\lim\limits_{x\to a} G(x), \lim\limits_{x\to b} G(x)\big[=]0,1[$
- **1 pt :** $H^{-1} :]0,1[\to]a,b[$ **strictement croissante**

Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$.
On pose $X = H^{-1}(U)$, et on note F la fonction de répartition de X.

b) Montrer que pour tout x dans I, $F(x) = G(x)$.

- **1 pt :** $F(x) = \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) = \mathbb{P}\big(\big[H^{-1}(U) \leqslant x\big]\big) = \mathbb{P}\big([U \leqslant H(x)]\big)$ **car** H **est strictement croissante sur** $]a,b[$
- **1 pt :** $= F_U(H(x)) = H(x)$ **car** $H(x) \in]0,1[$ **et par définition de** F_U **sur** $]0,1[$

c) En déduire que X suit la même loi que Z.

- **0 pt :** $Z(\Omega) \subset]a,b[$
- **1 pt :** $X(\Omega) = \big(H^{-1}(U)\big)(\Omega) = H^{-1}\big(U(\Omega)\big) \subset H^{-1}\big(]0,1[\big) =]a,b[$
- **1 pt :** $\forall x \in]a,b[$**,** $F(x) = G(x)$
- **1 pt :** $\forall x \notin]a,b[$**,** $F(x) = G(x)$

11. Simulation de lois exponentielles.
On suppose dans cette question que Z suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Expliciter l'intervalle I et les fonctions g, G et H^{-1}.

- **0 pt :** $I =]0,+\infty[$
- **1 pt :** $$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \textbf{si } x \in]-\infty,0] \\ \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \textbf{si } x \in]0,+\infty[\end{array} \right. \end{array}$$
- **1 pt :** $$G : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \textbf{si } x \in]-\infty,0] \\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \textbf{si } x \in]0,+\infty[\end{array} \right. \end{array}$$
- **1 pt :** $y = H(x) \ \Leftrightarrow\ x = -\dfrac{1}{\lambda}\, \ln(1-y)$ **en précisant** $x \in]0,+\infty[$ **et** $y \in]0,1[$**.**
- **1 pt :** $$H^{-1} : \begin{array}{rcl}]0,1[& \to &]0,+\infty[\\ y & \mapsto & -\dfrac{1}{\lambda}\, \ln(1-y) \end{array}$$

b) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function z = expo(lambda)` qui simule la loi exponentielle de paramètre `lambda`.

- **1 pt : indentation correcte**
- **1 pt : pas d'erreur de langage**
- **1 pt :** `u = rand()`
- **1 pt :** `z = -(1 / lambda) * log(1-u)`

12. Simulation de la loi de Laplace.
On cherche dans cette question à simuler une variable aléatoire de densité g donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-|x|} \qquad \text{(densité de Laplace)}$$

Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.
Soit V une variable aléatoire indépendante de Y suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, ce qui signifie $\mathbb{P}([V = -1]) = \mathbb{P}([V = 1]) = \dfrac{1}{2}$.
On pose $X = VY$.

a) Vérifier que g est une densité de probabilité qui est CSP($\mathbb{R}$).

- **1 pt : continuité et caractère strictement positif**
- **1 pt : nulle en dehors de $\mathbb{R}$ ce qui signifie qu'elle ne s'annule jamais**

b) Établir :

× pour tout $x \geqslant 0$, $\mathbb{P}([X > x]) = \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y > x])$;

× pour tout $x \leqslant 0$, $\mathbb{P}([X \leqslant x]) = \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y \geqslant -x])$.

- **1 pt : FPT** $\mathbb{P}\big([X > x]\big) = \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}\big([Y < -x]\big) + \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}\big([X > x]\big)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([Y < -x]\big) = \mathbb{P}\big([Y \leqslant -x]\big) = F_Y(-x) = 0$
- **1 pt : de même** $\mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) = \dfrac{1}{2}\,\mathbb{P}\big([Y \geqslant -x]\big) + \dfrac{1}{2}\,\cancel{\mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big)}$

c) En déduire une expression de la fonction de répartition de X.

- **1 pt : Si $x \geqslant 0$ alors** $\mathbb{P}([X \leqslant x]) = 1 - \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-x}$
- **1 pt : Si $x \leqslant 0$ alors** $\mathbb{P}([X \leqslant x]) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{x}$

d) Conclure que X est une variable aléatoire continue admettant g comme densité.

- **1 pt : F_X est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ et en 0**
- **1 pt : F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$**
- **1 pt : dériver F_X sur les intervalles ouverts**
- **1 pt : ajouter** $f_X(0) = \dfrac{1}{2}$

e) Compléter la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle simule la loi de Laplace :

- **1 pt :** `if r > 1/2 then`
- **1 pt :** `z = -y`

B - Simulation par la méthode du rejet / 36

Dans la méthode dite du rejet, pour simuler la loi de Z de densité g (voir les notations en préambule de la partie 3), on commence par déterminer une loi de probabilité que l'on sait simuler, de densité f qui est CSP(I), et qui vérifie : il existe une constante $c > 0$ telle que : $\forall x \in I,\ g(x) \leqslant c\, f(x)$.

13. Montrer qu'il existe une fonction h continue sur I et à valeurs dans $[0, 1]$ telle que, pour tout $x \in I$, $g(x) = c\, f(x)\, h(x)$.

- **1 pt :** $h(x) = \dfrac{g(x)}{c\, f(x)}$ **si** $x \in\ ]a, b[$
- **1 pt :** h **continue sur** $]a, b[$ **car elle est le quotient** $h = \frac{h_1}{h_2}$ **où ...**
- **1 pt :** $0 < h(x) = \dfrac{g(x)}{c\, f(x)} \leqslant 1$ **si** $x \in\ ]a, b[$

Pas de sanction si h définie seulement sur $]a, b[$

On considère alors :

× une suite de variable aléatoires $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui suivent une loi uniforme sur $]0, 1[$.

× une suite de variable aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ à valeur dans $]a, b[$ ayant toutes la même loi, de densité de probabilité f et de fonction de répartition F.

On suppose de plus que pour tout entier $n \geqslant 1$, les variables $X_1, \ldots, X_n, U_1, \ldots, U_n$ sont mutuellement indépendantes.
On définit N la variable aléatoire prenant comme valeur le premier indice k vérifiant $U_k \leqslant h(X_k)$.

14. En utilisant la **Partie 1**, prouver l'égalité, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}([U_k \leqslant h(X_k)]) = \dfrac{1}{c}$.
En déduire que N suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre, l'espérance et la variance.

- **1 pt : rappeler que l'on est dans le cadre d'application de la *3.b)* (X_k de densité f qui est CSP($]a, b[$), $U_k \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 0[)$ indépendante de X_k, h continue sur $]a, b[$ à valeurs dans $[0, 1]$)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,[U_k \leqslant h(X_k)]\,\big) = \displaystyle\int_a^b \cancel{f(t)}\, \frac{g(t)}{c\, \cancel{f(t)}}\ dt = \frac{1}{c} \int_a^b g(t)\ dt = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\ dt = \frac{1}{c}$
- **2 pts :** $N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{c}\right)$ **(dont 1 pt pour l'indépendance)**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(N) = c$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(N) = c\,(c-1)$

On définit la variable aléatoire X comme étant la valeur de X_N, c'est à dire la valeur de X_k pour le premier indice k vérifiant $U_k \leqslant h(X_k)$.

15. Soit $x \in I$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Exprimer l'événement $[X \leqslant x] \cap [N = n]$ à partir des événements $[X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]$ et $[U_k > h(X_k)]$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

- **1 pt :** $[X \leqslant x] \cap [N = n] = [X_N \leqslant x] \cap [N = n] = [X_n \leqslant x] \cap [N = n]$
- **1 pt :** $= [X_n \leqslant x] \cap \left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n-1} [U_k > h(X_k)]\right) \cap [U_n \leqslant h(X_n)]$

b) En utilisant la question *3.b)*, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]) = \frac{1}{c}\, G(x)$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(\,[X_n \leqslant x]\, \cap\, [U_n \leqslant h(X_n)]\,\big) = \displaystyle\int_a^x \cancel{f(t)}\, \frac{g(t)}{c\, \cancel{f(t)}}\ dt = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^x g(t)\ dt = \frac{1}{c}\, G(x)$

(*cf* question *14.*)

c) En déduire $\mathbb{P}([X_n \leqslant x] \cap [N = n])$ en fonction de c et de $G(x)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X_n \leqslant x] \cap [N = n]\big) = \mathbb{P}\left(\Big([X_n \leqslant x] \cap [U_n \leqslant h(X_n)]\Big) \cap \Big(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1} [U_k > h(X_k)]\Big)\right)$
- **1 pt : indépendance de ces deux événements**
- **1 pt : indépendance des v.a.r.** $U_1 - h(X_1)$**, . . . ,** $U_n - h(X_n)$
- **1 pt : calcul et** $\mathbb{P}\big([X_n \leqslant x] \cap [N = n]\big) = \dfrac{1}{c} \left(1 - \dfrac{1}{c}\right)^{n-1} G(x)$

d) Montrer finalement : $\mathbb{P}([X \leqslant x]) = G(x)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N = n] \cap [X \leqslant x]\big)$ **par la FPT**
- **1 pt :** $= G(x) \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{c} \left(1 - \dfrac{1}{c}\right)^{n-1} = G(x) \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([N = n]\big) = G(x)$ **car** $N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{c}\right)$

16. Conclure.

- **1 pt :** $Z(\Omega) \subset \,]a, b[$ **et** $X(\Omega) \subset \,]a, b[$
- **1 pt : si** $x \in \,]a, b[$ **alors** $F(x) = G(x)$ **d'après la question précédente**
- **1 pt : si** $x \notin \,]a, b[$**,** $\mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) = \mathbb{P}\big([Z \leqslant x]\big)$

17. Simulation de la loi normale.
Dans cette question, Z suit la loi normale centrée réduite, donc $I = \mathbb{R}$.
Soit f la densité de Laplace (question ***12.***), définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{2} e^{-|x|}$.

a) Donner une densité g de Z qui est CSP($\mathbb{R}$).

- **1 pt :** $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}x^2}$
- **1 pt :** g **est CSP(**$\mathbb{R}$**)**

b) Étudier les variations sur $[0, +\infty[$ de la fonction $a : x \mapsto e^{x - \frac{x^2}{2}}$.

- **1 pt :** a **est dérivable sur** $[0, +\infty[$ **(au moins cité même sans explication)**
- **1 pt :** $a'(x) = (1 - x)\ e^{x - \frac{x^2}{2}}$ **et tableau de variation correspondant**

c) Expliciter une constante $c > 0$ telle que, pour tout $x \geqslant 0$: $g(x) \leqslant \dfrac{c}{2}\ e^{-x}$.

- **1 pt :** $a(x) \leqslant e^{\frac{1}{2}}$ **pour tout** $x \geqslant 0$
- **1 pt : d'où** $\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ e^{\frac{x^2}{2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ e^{\frac{1}{2}}\ e^{-x}$ **et** $c = \sqrt{\dfrac{2\,e}{\pi}}$

d) En déduire, pour tout x réel : $g(x) \leqslant c\, f(x)$.

- **1 pt : si** $x \geqslant 0$ **alors, d'après la question précédente** $g(x) \leqslant c\, \dfrac{1}{2}\, e^{-x} = c\, \dfrac{1}{2}\, e^{-|x|} = c\, f(x)$
- **2 pts : si** $x < 0$ **on a la même inégalité par parité des fonctions**

e) Expliquer alors comment mettre en place la méthode du rejet pour simuler la loi normale centrée réduite. On explicitera la fonction h introduite à la question ***13***.

- **1 pt : pour rappeler les v.a.r.** Z, $(U_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ **et leur indépendance**

- **1 pt :** $h : x \mapsto \dfrac{g(x)}{c\,f(x)} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{2}{\sqrt{2\,\pi}}\ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\ \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-|x|}} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}-|x|-\frac{x^2}{2}}$

- **1 pt :** Z **avait même loi que la v.a.r.** X_N **où** N **est la v.a.r. prenant comme valeur le premier indice** k **vérifiant** $U_k \leqslant h(X_k)$

- **1 pt : explication de la boucle**

f) Compléter la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle simule la loi normale centrée réduite :

```
1 function z = normale()
2   x = laplace()
3   u = rand()
4   while u > exp(-1/2 - abs(x) - x^2/2)
5     x = laplace()
6     u = rand()
7   end
8   z = x
9 endfunction
```

- **1 pt : ligne 4**

- **1 pt : ligne 8**

(tout le travail est fait en question précédente)