DS9 (version A) /144

I. Exercice : suites et calcul matriciel (ESSEC III - 2007) /36

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par leur premier terme :

$$u_0 = 1, \ \ v_0 = 0, \ \ w_0 = 0$$

et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, et on note A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *a)* Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit AX_n.

- **1 pt :** $A\,X_n = X_{n+1}$

b) En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A, X_0 et de l'entier naturel n.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

2. *a)* Démontrer que A admet une seule valeur propre.

- **3 pts :** $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$

b) Déterminer le sous-espace vectoriel propre de A associé à l'unique valeur propre.
La matrice A est-elle diagonalisable ?

- **3 pts :** $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **(1 pt pour obtention système, 1 pt pour résolution, 1 pt pour écriture sous forme de sev engendré)**
- **1 pt :** $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **base de** $E_2(A)$
- **1 pt :** A **non diagonalisable**

$\hookrightarrow$ **si la vp 2 non déterminée, attribuer 2 pts au raisonnement par l'absurde démontrant qu'une matrice non scalaire ne peut posséder une unique vp**

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire tel que A soit la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer une base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice T de f dans cette base vérifie :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

et que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour troisième composante 1, -1 et 2.

- **1 pt :** $e'_1 = (0, 1, 1)$
- **2 pts :** $e'_2 = (1, 0, -1)$
- **2 pts :** $e'_3 = (0, 1, 2)$

On notera dorénavant $\mathscr{B}'$ la base (e'_1, e'_2, e'_3).

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton et de la décomposition suivante T :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

déterminer l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n.

- **1 pt :** $\forall k \geqslant 3$**,** $N^k = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $2 \cdot I\, N = 2 \cdot N = N\,(2 \cdot I)$
- **1 pt :** $T^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ (2 \cdot I)^{n-k}\ N^k$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n} \ldots = \sum\limits_{k=0}^{2} \ldots + \sum\limits_{k=3}^{n} \ldots$ **car** $n \geqslant 2$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=2}^{n} \ldots = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ **car :** $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0$
- **1 pt :** $T^n = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 2^3 & 2^2\ n & n(n-1) \\ 0 & 2^3 & 2^2\ n \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$
- **1 pt : propriété vraie au rang** 0
- **1 pt : propriété vraie au rang** 1

4. Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

a) Exprimer A en fonction de T, P et P^{-1}, puis A^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.

- **2 pt : formule de changement de base (1 pt pour** $A = PTP^{-1}$ **et 1 pt pour** $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ **etc)**
- **2 pts : 1 pt pour le résultat, 1 pt pour l'explication**

b) Calculer P^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie).

- **1 pt :** $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- **3 pts :** $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Déterminer les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de l'entier naturel n.

- **3 pts :** $u_n = 2^{n-1}\ (n+2)$**,** $v_n = 2^{n-3}\ n(n+3)$ **et** $w_n = 2^{n-3}\ n(n-1)$

II. Problème (ESSEC II - 2012) /107

En psychologie, on s'intéresse à la façon dont un individu est amené à sélectionner une action quand un choix se présente entre différentes actions possibles. Ce choix peut être influencé par un grand nombre de facteurs impondérables, ce qui fait qu'il est légitime de le modéliser à l'aide de variables aléatoires. L'objet du problème est de présenter quelques éléments simples de la théorie des modèles de choix discret. Dans le modèle binaire le plus simple, le choix se fait en fonction de la réaction à un stimulus. Dans une première partie, on étudie la modélisation élémentaire de la réponse à un stimulus. Dans une seconde partie, on regarde le cas où les différents choix possibles engendrent des réactions aléatoires et on étudie des propriétés de la réaction optimale. **Les deux parties sont indépendantes**.
Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Si elles existent, on note $\mathbb{E}(T)$ et $\mathbb{V}(T)$ l'espérance et la variance d'une variable aléatoire T.

II.1. Modèles avec réponse discrète /47

Soit α un réel (positif ou négatif) représentant un niveau de stimulus. On considère une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{R}$ représentant la tolérance de l'individu au stimulus en question. On considère donc que l'individu réagit si $X \leqslant \alpha$ et ne réagit pas si $X > \alpha$. On considère la variable aléatoire Y indicatrice de la réaction définie par :

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } X \leqslant \alpha \\ 0 & \text{si } X > \alpha \end{cases}$$

Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

1. Déterminer la loi de Y, son espérance θ et sa variance.

- **1 pt :** $Y(\Omega) = \{0, 1\}$
- **1 pt :** $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(F(\alpha))$
- **1 pt :** $\theta = \mathbb{E}(Y) = F(\alpha)$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(Y) = F(\alpha)(1 - F(\alpha)) = \theta(1-\theta)$

2. On considère n individus dont on observe la réaction au stimulus. La tolérance de l'individu i est une variable aléatoire X_i dont on suppose qu'elle suit la même loi que X. En outre, les tolérances pour les différents individus sont supposées indépendantes.

a) Soit N la variable aléatoire égale au nombre d'individus réagissant au stimulus. Déterminer la loi de N, son espérance et sa variance.

- **1 pt :** $N(\Omega) = [\![0, n]\!]$
- **2 pts :** $N \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \theta)$ **(1 pt pour** $N = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$**, 1 pt pour stabilité des lois binomiales)**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(N) = n\theta$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(N) = n\theta(1-\theta)$

b) Construire à l'aide de N un estimateur sans biais de θ.

- **1 pt : pour expression indépendante de** θ
- **1 pt : pour mention de** n**-échantillon**
- **1 pt :** $\overline{Y}_n = \dfrac{1}{n} N$ **est sans biais)**

3. Soient m un réel et σ un réel strictement positif.
On suppose que la tolérance X est obtenue comme résultante d'un « grand nombre » n de facteurs indépendants de petite taille c'est-à-dire $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, où les X_i sont supposées être des variables aléatoires de même loi d'espérance $\dfrac{m}{n}$ et de variance $\dfrac{\sigma^2}{n}$.

a) Déterminer l'espérance et l'écart-type de X.

- **1 pt :** $\mathbb{E}(X) = m$
- **2 pts :** $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$ **(dont 1 pt pour indépendance)**
- **1 pt :** $\sigma(X) = \sigma$

b) Montrer que pour tout réel a,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\frac{X - m}{\sigma} \leqslant a\right]\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

- **1 pt :** $S_n^* \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z$ **par TCL**
- **2 pts :** $S_n^* = \dfrac{X - m}{\sigma}$
- **1 pt :** $\forall a \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{n \to +\infty} F_{\frac{X-m}{\sigma}}(a) = \Phi(a)$

c) Le résultat précédent justifie que pour n grand on peut considérer que la variable aléatoire $\dfrac{X - m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite. Trouver dans ce cas l'expression de θ en fonction de α, m et σ.

- **2 pts :** $\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{\alpha - m}{\sigma}} \mathbf{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, du$

d) Déterminer $\lim\limits_{\sigma \to +\infty} \theta$ et interpréter le résultat.

- **2 pts :** $\lim\limits_{\sigma \to +\infty} \theta = \dfrac{1}{2}$ **(dont 1 pt pour la convergence de l'intégrale)**
- **1 pt : interprétation**

4. Plutôt que d'utiliser la loi normale, on préfère souvent une loi plus simple dont on étudie dans cette question quelques propriétés.

a) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ F(y) = \frac{1}{1 + e^{-y}}$$

Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. On dit alors que cette variable aléatoire suit la *loi logistique*.

- **1 pt :** F **dérivable sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt :** F **croissante sur** $\mathbb{R}$
- **1 pt :** F **continue à droite en tout point de** $\mathbb{R}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

b) On suppose que X suit une loi logistique. Déterminer θ.

- **1 pt :** $\theta = \dfrac{1}{1 + \mathbf{e}^{-\alpha}}$

On considère Z une variable aléatoire suivant la loi logistique.

c) Déterminer une densité de probabilité de Z.

- **1 pt : Z est une v.a. à densité**
- **1 pt : $f : y \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-y}}{(1+\mathrm{e}^{-y})^2}$**

d) Soit y un réel positif. Établir une relation entre $F(y)$ et $F(-y)$.

- **2 pts : $F(-y) = 1 - F(y)$**

e) Montrer que Z admet une espérance et la déterminer.

- **1 pt : absolue convergence**
- **0 pt : $y \mapsto yf(y)$ continue**
- **1 pt : $yf(y) = \underset{y\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{y^2}\right)$**
- **2 pts : critère de comparaison d'intégrales généralisées de fonctions continues positives (1 pt pour positivité, 1 pt pour intégrale de Riemann)**
- **1 pt : continuité sur $[0,1]$**
- **1 pt : $y \mapsto y\,f(y)$ impaire**
- **1 pt : $\mathbb{E}(Z) = 0$**

f) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur]0,1[. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$.

- **1 pt : $V(\Omega) = \mathbb{R}$**
- **3 pts : $F_V : x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$ (1 pt pour stricte croissance de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$, 1 pt pour $\forall \omega \in \Omega$, $1 - U(\omega) > 0$, 1 pt pour $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} \in \,]0,1[$)**
- **1 pt : caractérisation de la loi par sa fdr**

II.2. Utilités aléatoires /65

On suppose maintenant que l'individu doit choisir une action dans un ensemble fini d'actions possibles A. à chaque action i de l'ensemble d'actions $A = \{1, 2, \dots, n\}$ est associée une variable aléatoire U_i représentant l'utilité de l'action i. L'individu est alors amené à choisir l'action qui maximise ces utilités. On suppose que les variables U_i sont indépendantes et que la loi de U_i est donnée par la fonction de répartition F_i. On s'intéresse dans cette partie à la valeur U de l'utilité maximale, c'est à dire à $U = \max(U_1, \dots, U_n)$.

5. *a)* Déterminer la fonction de répartition G_n de U. Que vaut G_n dans le cas particulier où les U_i suivent la même loi de fonction de répartition F ?

- **2 pts : $G_n : x \mapsto \prod\limits_{i=1}^{n} F_i(x)$ (1 pt pour $[\max(U_1, \dots, U_n) \leqslant x] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [U_i \leqslant x]$, 1 pt pour indépendance)**
- **1 pt : $G_n : x \mapsto \big(F(x)\big)^n$**

On suppose désormais que les U_i ont même loi.

b) Pour x réel donné, étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x)$.

- **1 pt : si $F(x) = 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 1$**
- **1 pt : si $F(x) < 1$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 0$**

c) Montrer que les seules lois pour lesquelles on a $G_n = F$ pour tout $n \geqslant 1$ sont les lois de variables aléatoires constantes.

- **2 pts : analyse (1 pt pour $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \in \,]-\infty, x_0[\\ 1 & \textbf{si } x \in [x_0, +\infty[\end{cases}$ par croissance et continuité à droite, 1 pt pour reconnaître la fdr d'une v.a.r. constante égale à x_0)**
- **2 pts : synthèse (1 pt pour cas $F(x) = 0$, 1 pt pour cas $F(x) = 1$)**

6. Pour obtenir un type de loi plus intéressant pour U, on va chercher des lois admettant une densité strictement positive sur $\mathbb{R}$ et dont la fonction de répartition F vérifie que pour tout $n \geqslant 1$ il existe $b_n \leqslant 0$ tel que pour tout x réel, $(F(x))^n = F(x + b_n)$.

On suppose qu'une telle loi existe et on cherche des conditions qu'elle vérifie.

a) Montrer que F est une fonction continue et strictement croissante telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. F définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

- **1 pt : F continue sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : F strictement croissante sur $\mathbb{R}$**
- **1 pt : $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$**

b) Montrer que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

- **1 pt : $F(x + b_{n+1}) \ = \ F(x)(F(x))^n$**
- **1 pt : $0 \ < \ F(x) \ < \ 1$**
- **1 pt : $F(x + b_{n+1}) < F(x + b_n)$**
- **1 pt : F^{-1} strictement croissante sur $]0, 1[$.**

c) Soit (n, N) un couple d'entiers strictement positifs. On considère $U_1, \dots, U_{nN}$, nN variables aléatoires indépendantes de même loi F, et on pose pour j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$Y_j = \max(U_{(j-1)N+1}, \dots, U_{jN}).$$

Montrer que les variables Y_j sont indépendantes.

- **2 pts**

d) Quelle est la fonction de répartition de Y_j ?

- **3 pts : $F_{Y_j} : x \mapsto \big(F(x)\big)^N$ (1 pt pour $[Y_j \leqslant x] \ = \ \bigcap\limits_{k=1}^{N} \big[U_{(j-1)N+k} \leqslant x\big]$, 1 pt pour indépendance, 1 pt pour $U_{(j-1)N+1}$, …, U_{jN} ont même fonction de répartition F)**

e) En remarquant que $\max(Y_1, \dots, Y_n) = \max(U_1, \dots, U_{nN})$, montrer que pour tout x réel,

$$F(x)^{nN} = F(x + b_n + b_N) = F(x + b_{nN}).$$

Déduire que pour tout couple (n, N) d'entiers strictement positifs , $b_{nN} = b_n + b_N$.

- **1 pt :** $\big(F(x)\big)^{nN} \ = \ F(x + b_{nN})$
- **2 pts :** $(F(x))^{nN} \ = \ F(x + b_n + b_N)$
- **1 pt :** $b_n + b_N = b_{nN}$ **car** F **bijective**

f) Montrer que pour tout entier n strictement positif et tout $k \in \mathbb{N}$, $b_{n^k} = kb_n$.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

g) Soient p et m deux entiers strictement positifs. Montrer qu'il existe un unique $k_m \in \mathbb{N}$ tel que $2^{k_m} \leqslant p^m < 2^{k_m+1}$ et que $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \frac{k_m}{m} = \frac{\ln(p)}{\ln(2)}$.

- **2 pts :** $k_m = \left\lfloor m \, \dfrac{\ln(p)}{\ln(2)} \right\rfloor$
- **2 pts :** $\displaystyle\lim_{m \to +\infty} \frac{k_m}{m} = \frac{\ln(p)}{\ln(2)}$

h) En déduire qu'il existe un réel γ tel que pour tout entier p strictement positif, $b_p = \gamma \ln p$.

- **1 pt :** $b_{2^{k_m+1}} \ < \ b_{p^m} \ \leqslant \ b_{2^{k_m}}$ **car** (b_n) **strictement décroissante**
- **1 pt :** $(k_m + 1)\, b_2 \ < \ m\, b_p \ \leqslant \ k_m\, b_2$ **par *6.f***
- **1 pt :** $k_m \ \leqslant \ m \, \dfrac{b_p}{b_2} \ < \ k_m + 1$ **car** $b_2 < 0$
- **1 pt :** $\dfrac{k_m}{m} \ \leqslant \ \dfrac{b_p}{b_2} \ < \ \dfrac{k_m}{m} + \dfrac{1}{m}$ **car** $m > 0$
- **1 pt :** $\dfrac{b_p}{b_2} = \dfrac{\ln(p)}{\ln(2)}$ **(par théorème d'encadrement)**
- **1 pt :** $\gamma = \dfrac{b_2}{\ln(2)}$

i) Montrer que la fonction $F(x) = \exp(-\mathrm{e}^{-x})$ satisfait aux conditions cherchées. La loi ainsi définie est dite loi de Gumbel.

- **1 pt :** X **v.a.r. à densité**
- **1 pt :** f **strictement positive**
- **2 pts :** $(F(x)))^n = F(x + b_n)$ **avec** $b_n = -\ln(n)$ **(1 pt pour relation, 1 pt pour** $b_n \leqslant 0$**)**

7. Dans cette section, on étudie un certain nombre de propriétés de la loi de Gumbel. Soit X une variable aléatoire de loi de Gumbel c'est-à-dire de fonction de répartition F telle que $F(x) = \exp(-\mathrm{e}^{-x})$.

a) Déterminer une densité de probabilité de X.

- **1 pt :** $f : x \mapsto \mathbf{e}^{x} \exp\left(-\mathbf{e}^{-x}\right)$

b) On pose $Z = \mathrm{e}^{-X}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire Z.

- **1 pt :** $Z(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$
- **3 pts :** $F_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \textbf{si } x \in \,]-\infty, 0[\\ 1 - \exp(-x) & \textbf{si } x \in \,]0, +\infty[\end{cases}$
  (1 pt pour cas $x < 0$, 2 pts pour cas $x \geqslant 0$)
- **1 pt :** $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$

c) Soient x et y deux réels strictement positifs.
Établir une relation entre $\mathbb{P}_{[X \leqslant - \ln(x)]}\big([X \leqslant - \ln(x+y)] \big)$ et $\mathbb{P}\big([X \leqslant - \ln(y)] \big)$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X \leqslant - \ln(x)]) \neq 0$
- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[X \leqslant - \ln(x)]}([X \leqslant - \ln(x+y)]) \ = \ \dfrac{\mathbb{P}([X \leqslant - \ln(x)] \cap [X \leqslant - \ln(x+y)])}{\mathbb{P}([X \leqslant - \ln(x)])}$
- **1 pt :** $[X \leqslant - \ln(x+y)] \subset [X \leqslant - \ln(x)]$
- **2 pts : reste calculs jusqu'à** $\mathbb{P}_{[X \leqslant - \ln(x)]}([X \leqslant - \ln(x+y)]) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant - \ln(y)])$

d) On considère $(Y_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1. Soit L une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1 indépendante de $(Y_i)_{i \geqslant 1}$. On considère la variable aléatoire $W = \max(Y_1, \ldots, Y_L)$ telle que pour tout $k \geqslant 1$, et tout $\omega \in [L = k]$, $W(\omega) = \max(Y_1(\omega), \ldots, Y_k(\omega))$ et $W(\omega) = 0$ si $L(\omega) = 0$.

Montrer que pour tous réels a et b tels que $0 < a < b$, on a $\mathbb{P}([a \leqslant W \leqslant b]) = \mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])$.
Que vaut $\mathbb{P}([W = 0])$?

- **1 pt : FPT :** $\mathbb{P}([a \leqslant W \leqslant b]) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([a \leqslant W \leqslant b] \cap [L = k])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([L = 0] \cap [a \leqslant W \leqslant b]) \ = \ 0$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([L = k] \cap [a \leqslant W \leqslant b]) \ = \ \mathbb{P}([L = k])\, \mathbb{P}([a \leqslant \max(Y_1, \ldots, Y_k) \leqslant b])$ **(car les v.a.r. L et $\max(Y_1, \ldots, Y_k)$ sont indépendantes par lemme des coalitions)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([\max(Y_1, \ldots, Y_k) \leqslant b]) = \big(1 - \mathbf{e}^{-b}\big)^k$
- **0 pt :** $\mathbb{P}([\max(Y_1, \ldots, Y_k) < a]) = (1 - \mathbf{e}^{-a})^k$ **car Y_1, …, Y_k v.a.r. à densité**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([a \leqslant \max(Y_1, \ldots, Y_k) \leqslant b]) \ = \ \big(1 - \mathbf{e}^{-b}\big)^k - (1 - \mathbf{e}^{-a})^k$
- **1 pt : reste calculs jusqu'à** $\mathbb{P}([a \leqslant W \leqslant b]) = \mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([W = 0]) \ = \ \mathbf{e}^{-1}$