DS9 vB /120

I. Exercice : suites et calcul matriciel (ESSEC III - 2007) /36

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) les trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par leur premier terme :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0$$

et les relations de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{array}\right.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$, et on note A la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *a)* Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit AX_n.

- **1 pt :** $A\,X_n = X_{n+1}$

b) En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices A, X_0 et de l'entier naturel n.

- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

2. *a)* Démontrer que A admet une seule valeur propre.

- **3 pts :** $\mathrm{Sp}(A) = \{2\}$

b) Déterminer le sous-espace vectoriel propre de A associé à l'unique valeur propre.
La matrice A est-elle diagonalisable ?

- **3 pts :** $E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **(1 pt pour obtention système, 1 pt pour résolution, 1 pt pour écriture sous forme de sev engendré)**
- **1 pt :** $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ **base de** $E_2(A)$
- **1 pt :** A **non diagonalisable**

$\hookrightarrow$ **si la vp 2 non déterminée, attribuer 2 pts au raisonnement par l'absurde démontrant qu'une matrice non scalaire ne peut posséder une unique vp**

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire tel que A soit la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer une base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice T de f dans cette base vérifie :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

et que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour troisième composante 1, -1 et 2.

- **1 pt :** $e'_1 = (0, 1, 1)$
- **2 pts :** $e'_2 = (1, 0, -1)$
- **2 pts :** $e'_3 = (0, 1, 2)$

On notera dorénavant $\mathscr{B}'$ la base (e_1', e_2', e_3').

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton et de la décomposition suivante T :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

déterminer l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n.

- **1 pt :** $\forall k \geqslant 3$**,** $N^k = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$
- **1 pt :** $2 \cdot I\, N = 2 \cdot N = N\,(2 \cdot I)$
- **1 pt :** $T^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ (2 \cdot I)^{n-k}\ N^k$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{n}\ \ldots = \sum\limits_{k=0}^{2}\ \ldots + \sum\limits_{k=3}^{n}\ \ldots$ **car** $n \geqslant 2$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=2}^{n}\ \ldots = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ **car :** $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0$
- **1 pt :** $T^n = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 2^3 & 2^2\ n & n(n-1) \\ 0 & 2^3 & 2^2\ n \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$
- **1 pt : propriété vraie au rang** 0
- **1 pt : propriété vraie au rang** 1

4. Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

a) Exprimer A en fonction de T, P et P^{-1}, puis A^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.

- **2 pt : formule de changement de base (1 pt pour** $A = PTP^{-1}$ **et 1 pt pour** $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ **etc)**
- **2 pts : 1 pt pour le résultat, 1 pt pour l'explication**

b) Calculer P^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie).

- **1 pt :** $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- **3 pts :** $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Déterminer les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de l'entier naturel n.

- **3 pts :** $u_n = 2^{n-1}\ (n+2)$**,** $v_n = 2^{n-3}\ n(n+3)$ **et** $w_n = 2^{n-3}\ n(n-1)$

Problème (ESSEC-I 2007) /83

Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

I. Préliminaires /16

Dans cette partie **I.**, λ désigne un réel strictement positif.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

a) Déterminer la fonction : $x \mapsto \mathbb{P}([X > x])$ (appelée *fonction de survie de* X).

- 1 pt : survie $x \mapsto \begin{cases} \mathrm{e}^{-\lambda x} & \textbf{si } x \geqslant 0 \\ 1 & \textbf{si } x < 0 \end{cases}$

b) Pour tous nombres réels strictement positifs x et y, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y])$; justifier alors que, si X modélise la durée de vie d'un phénomène, on dise de ce dernier qu'il est « sans vieillissement ».

- 1 pt : $\mathbb{P}([X > x]) > 0$

- 1 pt : $[X > x + y] \subset [X > x]$ **car** $y > 0$

- 1 pt : $x + y \geqslant 0$ **et** $x \geqslant 0$

- 1 pt : $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y]) = \mathbb{P}([X > y])$

- 1 pt : interprétation

2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

- 1 pt : existence espérance / variance

- 1 pt : $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{n}{\lambda}$ **(1 pt pour linéarité)**

- 2 pts : $\mathbb{V}(S_n) = \dfrac{n}{\lambda^2}$ **(1 pt pour indépendance, 1 pt pour** (X_i) **suivent** $\mathcal{E}(\lambda)$**)**

b) Démontrer par récurrence que, pour tout n de$\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n admet pour densité la fonction f_n :

$$t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t} t^{n-1} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Pour cela, on admettra que, si U et V sont des variables aléatoires indépendantes admettant respectivement pour densité les fonctions f_U et f_V, alors la variable aléatoire $U + V$ admet pour densité la fonction f_{U+V} définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{U+V}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(x) f_V(t - x)\ dx$$

- 1 pt : initialisation

- 5 pts : hérédité (1 pt pour hypothèse v.a.r. densité, 1 pt pour lemme des coalitions, 1 pt pour $f_{S_{n+1}}$ **sur** $]-\infty, 0[$**, 2 pts pour cas** $[0, +\infty[$**)**

II. Loi de Pareto (Vilfredo Pareto (1848-1923), sociologue et économiste italien) /22

Soient a et b des réels strictement positifs. Par définition, on dit d'une variable aléatoire qu'elle suit la loi de Pareto de paramètres a et b si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < b\,; \\ a\dfrac{b^a}{t^{a+1}} & \text{si } t \geqslant b. \end{cases}$$

Soit alors X une variable aléatoire de loi de Pareto de paramètres a et b.

3. Vérifier que l'égalité : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$ est bien satisfaite ; calculer l'espérance et la variance de X, en précisant à quelles conditions chacune de ces quantités existe.

- **- 1 pt : f nulle en dehors de $[b, +\infty[$**
- **- 1 pt : f continue sur le segment $[b, B]$**
- **- 1 pt : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$**
- **- 1 pt : convvergence absolue**
- **- 1 pt : X admet une espérance ssi $a > 1$**
- **- 1 pt : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{a\,b}{a-1}$**
- **- 2 pts : $\mathbb{E}(X^2) = \dfrac{a\,b^2}{a-2}$ (dont 1 pt pour existence ssi $a > 2$)**
- **- 1 pt : $\mathbb{V}(X) = \dfrac{a\,b^2}{(a-2)(a-1)^2}$**

4. Déterminer la fonction de répartition de X. Préciser la fonction de survie : $x \mapsto \mathbb{P}([X > x])$.

- **- 1 pt : $F_X(x) = 0$ si $x < b$**
- **- 2 pts : $F_X(x) = 1 - \left(\dfrac{b}{x}\right)^a$ si $x \geqslant b$**
- **- 1 pt : fonction de survie**

5. Démontrer que, pour tout réel y positif ou nul, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y])$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$. De façon analogue à la question ***I.1.b)***, que peut-on dire d'un phénomène dont la durée de vie est modélisée par X ?

- **- 1 pt : $[X > x + y] \subset [X > x]$**
- **- 1 pt : $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y]) = \left(\dfrac{x}{x+y}\right)^a$**
- **- 1 pt : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{x+y}\right)^a = 1$**
- **- 1 pt : interprétation**

6. On pose dans cette question : $Y = \ln \dfrac{X}{b}$.
Démontrer que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

- **- 1 pt : $Y(\Omega) = [0, +\infty[$**
- **- 1 pt : cas $]-\infty, 0[$**
- **- 2 pts : cas $[0, +\infty[$ (1 pt pour stricte croissance exp, 1 pt pour $b\,\mathrm{e}^x \geqslant b$)**
- **- 1 pt : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$**

III. Estimation des paramètres d'une loi de Pareto /42

Les instants aléatoires des arrivées de paquets (symboles binaires représentant de l'information de type audio, vidéo, données, ...) dans un canal de communication sont modélisés par une variable aléatoire X suivant une loi de Pareto de paramètres α et β ($\alpha > 0$, $\beta > 0$).
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de même loi que X.

7. On suppose tout d'abord que le paramètre β fait partie des caractéristiques connues du canal de communication ; on se propose de déterminer un estimateur de α par une méthode dite du « maximum de vraisemblance ». Pour cela, n désignant un entier naturel non nul et x_1, ..., x_n des réels supérieurs ou égaux à β, on introduit la fonction $\mathcal{L}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\mathcal{L}(a) = f_a(x_1) \times \cdots \times f_a(x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_a(x_k),$$

où f_a est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < \beta\,; \\ a\dfrac{\beta^a}{t^{a+1}} & \text{si } t \geqslant \beta. \end{cases}$$

a) Exprimer $\mathcal{L}(a)$, puis $\ln(\mathcal{L}(a))$.

- 1 pt : $\mathcal{L}(a) = \dfrac{(a\,\beta^a)^n}{(x_1 \cdots x_n)^{a+1}}$

- 1 pt : $\ln(\mathcal{L}(a)) = n\,\ln(a) + n\,a\,\ln(\beta) - (a+1)\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(x_k)$

b) On considère la fonction φ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$:

$$a \mapsto n\ln(a) + na\ln(\beta) - (a+1)\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)\,.$$

(i) Démontrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera w.

- 1 pt : φ est dérivable sur $]0, +\infty[$

- 1 pt : $\varphi'(a) = \dfrac{n}{a} - \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{x_k}{\beta}\right)$

- 2 pts : $\varphi'(a) \geqslant 0$ ssi $a \leqslant w$, où $w = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{x_k}{\beta}\right)}$

- 1 pt : w est l'unique maximum de φ

(ii) Exprimer w en fonction de x_1, ..., x_n.

- 1 pt : $w = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\dfrac{x_k}{\beta}\right)}$

(iii) Que peut-on dire de w pour la fonction $\mathcal{L}$?

- 1 pt

c) On pose dorénavant, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$W_n = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{X_k}{\beta}\right)}.$$

(La suite $(W_n)_{n\geqslant 1}$ est appelée *estimateur du maximum de vraisemblance.*)

(i) Justifier que la variable aléatoire $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{X_k}{\beta}\right)$ admet pour densité la fonction f_n définie dans ***I.2.b)*** en prenant $\lambda = \alpha$.

- **1 pt :** $\ln\left(\frac{X_k}{\beta}\right) \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$
- **1 pt :** $(\ln\left(\frac{X_i}{\beta}\right))$ **indépendantes**
- **1 pt : question *I.2.b)***

(ii) À l'aide du théorème de transfert, en déduire que W_n admet pour espérance $\dfrac{n\alpha}{n-1}$ lorsque $n \geqslant 2$, puis proposer un estimateur sans biais de α construit sur W_n.

- **1 pt : théorème de transfert**
- **1 pt : convergence absolue**
- **1 pt :** $g(t)\, f_n(t) = \dfrac{n}{n-1}\, \alpha\, f_{n-1}(t)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(W_n) = \dfrac{n}{n-1}\, \alpha$
- **1 pt :** $\dfrac{n-1}{n}\, W_n$ **sans biais**

d) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$W'_n = \frac{n-1}{n} W_n.$$

(i) Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

En admettant que le moment d'ordre 2 de W'_n est égal à $\dfrac{(n-1)\alpha^2}{n-2}$, calculer la variance de W'_n puis établir, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que pour tout réel ε strictement positif, on a l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left(\left[W'_n - \varepsilon < \alpha < W'_n + \varepsilon\right]\right) \geqslant 1 - \frac{\alpha^2}{\varepsilon^2(n-2)}.$$

- **1 pt :** $\mathbb{V}(W'_n) = \dfrac{\alpha^2}{n-2}$
- **1 pt : inégalité de Bienaymé-Tchebychev (0 sans argument existence de la variance)**
- **1 pt : événement contraire**
- **1 pt :** $|W'_n - \alpha| < \varepsilon$ **ssi** $W'_n - \varepsilon < \alpha < W'_n - \varepsilon$

(ii) On suppose dans cette question (et elle seule) que α est strictement compris entre 1 et 2. Déterminer un entier naturel N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N, $\left[W'_n - \dfrac{1}{10}\ ,\ W'_n + \dfrac{1}{10}\right]$ soit un intervalle de confiance du paramètre réel α au niveau de confiance 0,95.

- **1 pt : question précédente avec** $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$
- **3 pts :** $n \geqslant 8002$

8. On suppose maintenant que seul le paramètre α est déjà identifié et qu'il vérifie : $\alpha > 2$.

a) Pour tout entier strictement positif n, on pose :

$$Y_n = c_n \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

où le réel c_n est choisi de sorte que $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ soit un estimateur sans biais de β.

(i) Calculer c_n.

- 1 pt : $c_n = \dfrac{\alpha - 1}{\alpha\, n}$

(ii) Quelle est la limite de la variance de Y_n quand n tend vers $+\infty$?
(On dit que l'estimateur est convergent.)

- 1 pt : existence $\mathbb{V}(Y_n)$

- 2 pts : $\mathbb{V}(Y_n) = \dfrac{\beta^2}{\alpha(\alpha-2)} \dfrac{1}{n}$

- 1 pt : $\mathbb{V}(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

b) Pour tout entier strictement positif n, on pose : $Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$.

(i) Déterminer la fonction de répartition de Z_n, puis reconnaître sa loi et préciser son espérance. Quelle est la limite de cette dernière quand n tend vers $+\infty$?

- 1 pt : $Z_n(\Omega) \subset [\beta, +\infty[$

- 1 pt : $F_{Z_n}(x) = 0$ **si** $x < \beta$

- 2 pts : $F_{Z_n}(x) = 1 - \left(\dfrac{\beta}{x}\right)^{\alpha\, n}$ **si** $x \geqslant \beta$ **(1 pt pour** X_i **indépendantes, 1 pt pour** (X_i) **ont même loi)**

- 1 pt : $\mathbb{E}(Z_n) = \dfrac{\alpha\, n\, \beta}{\alpha\, n - 1}$

- 1 pt : $\mathbb{E}(Z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta$

(ii) Pour tout entier strictement positif n, on pose : $Z'_n = d_n Z_n$, où le réel d_n est choisi de telle sorte que $(Z'_n)_{n\geqslant 1}$ soit un estimateur sans biais de β.
Quelle est la limite de la variance de Z'_n quand n tend vers $+\infty$?

- 1 pt : $d_n = \dfrac{n\,\alpha - 1}{n\,\alpha}$

- 1 pt : $\mathbb{V}(Z'_n) = \dfrac{\beta^2}{n\,\alpha(n\,\alpha - 2)}$

- 1 pt : $\mathbb{V}(Z'_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

(iii) Démontrer que l'estimateur $(Z'_n)_{n\geqslant 1}$ est plus efficace que l'estimateur $(Y_n)_{n\geqslant 1}$, c'est-à-dire, qu'à partir d'un certain rang, la variance de Z'_n est inférieure à celle de Y_n.

- 3 pts : $\mathbb{V}(Z'_n) \leqslant \mathbb{V}(Y_n)$ **ssi** $n \geqslant 1$