Algèbre

Exercice 1 : EDHEC 2016

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 6A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

2. ***a)*** En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).

b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.

4. ***a)*** On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 3.

c) En écrivant $T = 3I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, pus de I et T.

5. ***a)*** Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^n I$.

b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.

c) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

Exercice 2 : Suites récurrentes et algèbre linéaire (ESSEC I - 2003)

Soit a un nombre réel. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$, et F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3a\ u_{n+1} + (1-3a)\ u_n$.

L'objet de cet exercice est l'étude de l'ensemble F.

I. Étude du cas particulier $a = 1$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par ses trois premiers termes u_0, u_1, u_2, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3\ u_{n+1} - 2\ u_n$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et on note M la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit MX_n.
En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.

2. ***a)*** Déterminer les valeurs propres de la matrice M et leur sous-espace propre associé.

b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que la matrice T de f dans $\mathscr{B}'$ vérifie $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.

b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de T^n.

4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Exprimer M en fonction de T, P et P^{-1}, puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.

5. ***a)*** Calculer P^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie).

b) Pour tout entier naturel n, calculer les cœfficients de la première ligne de M^n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de l'entier naturel n.

II. Étude du cas général

On revient au cas général où a est un réel quelconque.

1. **Structure de F**

a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

b) On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$
Démontrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
En déduire que F est de dimension finie et préciser sa dimension.

c) Justifier que des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F forment une base de F si, et seulement si, la matrice $\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix}$ est inversible.

d) On suppose dans cette question : $a = 0$.

On note s, s', s'' les suites définies par :

$$s = \varphi^{-1}\left((1,0,0)\right), \quad s' = \varphi^{-1}\left((0,1,0)\right), \quad s'' = \varphi^{-1}\left((0,0,1)\right)$$

Déterminer s, s', s'' (on donnera les dix premiers termes de chacune de ces trois suites).
En déduire la forme générale d'un élément de F.

e) Reprendre la question précédente dans le cas $a = \frac{1}{3}$.

2. **Suites géométriques de F**

a) Démontrer que la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F si, et seulement si, le réel r est racine de la fonction polynomiale $p : x \mapsto x^3 - 3a\ x + 3a - 1$.
(avec la convention : $0^0 = 1$)

b) Déterminer, en fonction du réel a, le nombre de racines de la fonction p ainsi que leur valeur.

3. **Cas où p admet trois racines distinctes**

a) Démontrer que, lorsque la fonction p admet trois racines distinctes 1, r_1 et r_2, les suites $\left(1\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left({r_1}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left({r_2}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de l'espace vectoriel F.

b) Dans le cas où $a = 7$, exprimer, en fonction de l'entier naturel n, le terme général u_n de la suite, appartenant à F, qui vérifie : $u_0 = 1$, $u_1 = 10$, $u_2 = -8$.

4. **Cas où p admet une racine double**

a) Soit r un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général nr^n.
Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+3} - 3a\ u_{n+1} - (1 - 3a)\, u_n = r^n \left(n\ p\,(r) + r\ p'\,(r)\right)$$

b) En déduire que, lorsque p admet une racine double r_0 et une racine simple r_1 la suite $(n\ {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F, et démontrer que les suites $({r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n\ {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F.

c) Dans le cas où $a = \frac{1}{4}$, exprimer le terme général u_n d' un élément quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F en fonction de u_0, u_1 et u_2 et de l'entier naturel n.
Préciser la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 : EDHEC 2014

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que la matrice $A - \lambda\, I$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$.

b) Étudier la fonction f qui, à tout réel x, associe $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$, puis dresser son tableau de variations.
(on précisera les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, on notera m le minimum local de f sur $\mathbb{R}$, M le maximum local de f sur $\mathbb{R}$ et on ne cherchera ni à calculer m, ni à calculer M)

c) Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis déterminer les signes de m et M.

d) Montrer que $A - \lambda\, I$ n'est pas inversible pour exactement trois valeurs de λ, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

e) **Seulement pour les cubes (les autres pourront se servir de ce résultat sans démonstration)** : En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que

$A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

2. L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble E des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A c'est-à-dire qui vérifient $AM = MA$.

a) Montrer que les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

b) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) M est une matrice de E.

(ii) $P^{-1}MP$ commute avec D.

c) Établir que toute matrice M de E est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :

$$P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, \qquad P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, \qquad P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

d) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

e) **Seulement pour les cubes :** Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de A, qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à 2. En déduire que $(I,\ A,\ A^2)$ est une base de E.

Exercice 4 : HEC 2005

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et Id l'application identité de E.
L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation $(*)$: $f \circ f = 4\,\mathrm{Id}$.

A. Étude du cas n = 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = \left(\sqrt{2}-2,\ \sqrt{2}\right)$.

1. Montrer que f vérifie l'équation $(*)$, puis préciser le noyau et l'image de f.

2. On note $F = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$.

a) Montrer que G est engendré par le vecteur u.
En déduire la dimension de F et donner une base de F. On notera v le vecteur de cette base.

b) Montrer que $G = \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{Id})$.

3. *a)* Justifier que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

b) **Seulement pour les carrés :** Déterminer la matrice représentative de f dans la base (u, v).
Seulement pour les cubes : Montrer que f est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

B. Étude du cas général

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation $(*)$.

4. *a)* Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f.

b) **Seulement pour les cubes :** Déterminer les valeurs propres possibles de f.

c) Vérifier que $2\,\mathrm{Id}$ et $-2\,\mathrm{Id}$ satisfont l'équation $(*)$.

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2\,\mathrm{Id}$ et $f \neq -2\,\mathrm{Id}$ et on note $F = \mathrm{Ker}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$ et $G = \mathrm{Im}\,(f - 2\,\mathrm{Id})$.

5. Soit x un élément de E. Montrer que $(f(x) - 2x) \in \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$ et que $(f(x) + 2x) \in F$.
En déduire que $G \subset \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$ et que $\mathrm{Im}\,(f + 2\,\mathrm{Id}) \subset F$.
Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f.

6. Soit x un vecteur de $\mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$.

a) Exprimer $(f - 2\,\mathrm{Id})\,(x)$ en fonction de x uniquement.
En déduire que x appartient à G, puis que $G = \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{Id})$.

b) **Seulement pour les cubes :** Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 5 : EML 2015

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.
On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle de E dans E :

$$i : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & 0_E \end{array} \right.$$

On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, \quad f^2 + i \neq \theta, \quad f \circ (f^2 + i) = \theta$$

où f^2 désigne $f \circ f$.

1. ***a)*** Montrer que f n'est pas bijectif.

b) En déduire que 0 est valeur propre de f, puis montrer qu'il existe u appartenant à E tel que : $u \neq 0_E$ et $f(u) = 0_E$.

Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.

2. Montrer : $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

3. Est-ce que f est diagonalisable ?

4. Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que : $v \neq 0_E$ et $f^2(v) = -v$.

Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.

5. Montrer : $f(v_3) = -v_2$.

6. ***a)*** Montrer que la famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathscr{B}$.

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

et le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C), c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{a\, A + b\, B + c\, C \ / \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

7. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.

8. Montrer : $\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ CM = MC\} = \mathcal{F}$

9. ***a)*** Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(a\, A + b\, B + c\, C)^2$.

b) En déduire une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

10. On note $g = f^2 - i$.
Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et de i.

Exercice 6 : `HEC 2015`

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit v un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dans la base $\mathscr{B}$ et qui vérifie $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe le vecteur $f(x)$ défini par : $f(x) = x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v$.

1. ***a)*** Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

b) Montrer que $f \circ f = f$.

2. Déterminer le spectre de f.

3. ***a)*** Montrer que le vecteur y appartient à l'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, si et seulement si $f(y) = y$.

b) Montrer que la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est inférieure ou égale à $n-1$.

c) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $(e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$.

d) En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. Quel est le rang de f ?

4. ***a)*** Déterminer une base du noyau de f.

b) Quels sont les sous-espaces propres de f ?

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

5. Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et la matrice M' de f dans une base de vecteurs propres.

Exercice 7 : `EDHEC 2006`

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice unité et O la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. ***a)*** Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(u)$.

b) La matrice A est-elle inversible ?

2. ***a)*** Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et tel que $f(v) = u$.

b) Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0, 1, -1)$.

c) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathscr{B}'$. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

3. ***a)*** Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathscr{B}'$. En déduire la seule valeur propre de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

b) Donner la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1}, puis en déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a : $A^k = O$.

4. On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A),

a) Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = \text{Vect}\left(I, N, N^2\right)$.
On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Établir que : $M \in C_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in C_N$.
En déduire que $C_A = \text{Vect}\left(I, A, A^2\right)$. Quelle est la dimension de C_A ?

Exercice 8 : EML 2005

On considère les éléments suivants de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J et K.
Pour toute matrice M de E, on note $M^0 = I$, et si M est inversible, on note, pour tout entier naturel k, $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1. Déterminer la dimension de E.

2. Calculer J^2, JK, KJ et K^2.

3. Soit la matrice $L = I + J$.

a) Montrer, pour tout entier naturel n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

b) Vérifier que L est inversible et montrer, pour tout entier relatif n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

c) Exprimer, pour tout entier relatif n, L^n à l'aide de I, L, L^2 et n.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e l'application identique de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

4. Montrer que f admet une valeur propre et une seule que l'on déterminera.
Est-ce que f est diagonalisable ?

5. **a)** Soit $w = (1, 0, 0)$. Calculer $v = (f - e)(w)$ et $u = (f - e)(v)$.
Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base (u, v, w).

c) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et, pour tout entier relatif n, exprimer f^n à l'aide de e, f, f^2 et n.

Exercice 9 : EML 2014

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M,N) \in \mathcal{E}^2, \ MN \in \mathcal{E}$$

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.
Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

6. On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.
Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F.

7. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

8. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

10. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

11. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?