Algèbre

Réduction

Exercice 1 : EDHEC 2016

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2 - 6A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 12 \\ -24 & -3 & 24 \\ -24 & -12 & 33 \end{pmatrix}$

- Ainsi : $A^2 - 6A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 12 \\ -24 & -3 & 24 \\ -24 & -12 & 33 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -6 & 12 \\ -24 & 6 & 24 \\ -24 & -12 & 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} - 9I.$

$$\boxed{A^2 - 6A = -9I}$$

$$\boxed{\text{Donc } P(X) = X^2 - 6X + 9 \text{ est } \textbf{un} \text{ polynôme annulateur de degré 2 de } A.}$$

Remarque

- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ possède `TOUJOURS` un polynôme annulateur non nul P. On peut même démontrer (pas au programme en ECE) qu'il existe toujours un tel polynôme de degré n.
- Si P est un polynôme annulateur de A alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $\alpha\, P$ est toujours un polynôme annulateur puisque :
$$(\alpha\, P)(A) = \alpha\, P(A) = 0$$
Cela suffit à démontrer que A possède une infinité de polynômes annulateurs. On peut en obtenir d'autres : par exemple $Q(X) = (X-5)\ P(X)$ est un polynôme annulateur de A puisque :
$$Q(A) = (A - 5\,I)\ P(A) = 0$$
- Parler `DU` polynôme annulateur d'une matrice n'a donc aucun sens. □

2. ***a)*** En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).

Démonstration.

- On remarque que $P(X) = X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$. Ainsi, l'unique racine de P est 3.
Or le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur de A.

$$\boxed{\text{Autrement dit : Sp}(A) \subset \{3\}.}$$

Remarque

- Les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas forcément toutes valeurs propres de A.
- Si c'était le cas, A aurait une infinité de valeurs propres (elle en possède au plus 3 !).
Par exemple, comme $Q(X) = (X-5)\ P(X)$ est un polynôme annulateur, un tel raisonnement permettrait de démontrer que 5 est aussi valeur propre.

- On dit parfois que les racines d'un polynôme annulateur sont des valeurs propres **possibles** de A (comprendre qu'elles sont potentiellement des valeurs propres). Il faut alors démontrer qu'elles sont réellement des valeurs propres.

- Montrons maintenant que 3 est une valeur propre de A (*i.e.* que $\{3\} \subset \mathrm{Sp}(A)$).

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A-3I) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \\
&= \dim(\ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right)\ ) \\
&= \dim(\ \mathrm{Vect}\left(-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\ ) \\
&= \dim(\ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)\ ) \ = \ 1 < 3
\end{aligned}$$

La matrice $A - 3I$ n'est pas inversible, ce qui signifie que 3 est valeur propre de A.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f) = \{3\}}$$

Remarque

- On peut aussi affimer que $A - 3\,I$ est non inversible en remarquant que cette matrice possède deux vecteurs colonnes (ou lignes) égaux (colinéaires suffirait). □

b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

Démonstration.

- D'après la question précédente, A possède 3 comme unique valeur propre.
- Supposons par l'absurde que A est diagonalisable.
  Il existe alors $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} = P\,(3\,I_3)\,P^{-1} = 3\,PP^{-1} = 3\,I_3$$

ce qui est impossible puisque $A \neq 3\,I_3$.

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

- Montrons que A est inversible.
  On sait que $\mathrm{Sp}(A) = \{3\}$. Donc en particulier, 0 n'est pas valeur propre de A.

$$\boxed{\text{Ainsi } A \text{ est inversible.}}$$

□

Remarque

- Il est aussi possible de démontrer que A n'est pas diagonalisable en déterminant la dimension de $E_3(A)$, espace propre associé à l'unique valeur propre 3.
  On démontre alors que : $\dim(E_3(A)) = 2 \neq 3$ (*cf* question suivante).
- Concernant l'inversibilité de A on utilise le fait que :

$$A \text{ non inversible } \Leftrightarrow \text{ 0 est valeur propre de } A$$

  On peut aussi démontrer l'inversibilité de A en déterminant son inverse par la méthode proposée en ***5.b)***.
- Toutes les méthodes donnant le bon résultat sont acceptées. Évidemment, les méthodes les plus longues produisent une perte de temps qui finit par vous pénaliser à terme.

3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.

Démonstration.

- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl}
u \in E_3(f) & \Longleftrightarrow & f(u) = 3\,u \\
& \Longleftrightarrow & (f - 3\,Id)(u) = 0 \\
& \Longleftrightarrow & (A - 3\,I_3)\,U = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\,2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ -\,4x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \\ -\,4x & - & 2y & + & 4z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & = & -y & + & 2z \end{array} \right.
\end{array}$$

(on utilise 2 *variables auxiliaires -* x *et* y *ici - pour faire apparaître le système sous forme échelonnée)*
On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_3(f) & = & \left\{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ f(u) = 3u\right\} \\
& = & \left\{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x = -\frac{1}{2}y + z\right\} \\
& = & \left\{(-\frac{1}{2}y + z, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\right\} \\
& = & \left\{y \cdot (-\frac{1}{2}, 1, 0) + z \cdot (1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\right\} \\
& = & \mathrm{Vect}\left((-\frac{1}{2}, 1, 0), (1, 0, 1)\right)
\end{array}$$

- Notons $u_1 = (-1, 2, 0)$ et $u_2 = (1, 0, 1)$. La famille (u_1, u_2) est :
  × génératrice de $E_3(f)$.
  × libre car constituée de **deux** vecteurs non colinéaires.
  C'est donc une base de $E_3(f)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } (u_1, u_2) \text{ est une base de } E_3(f).}$$

Remarque

- Comme A est la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$, alors : $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(f)$.
- Par contre, comme on le voit ici : $E_3(A) \neq E_3(f)$. En effet :
  × $E_3(A)$ est un sous-ensemble de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, ev dont les vecteurs sont des matrices de taille 3×1.
  × $E_3(f)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$, ev dont les vecteurs sont des triplets de réels.
- Ce qu'on peut résumer par : $(x, y, z) \neq \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
- Il y a d'autres choix pour (u_1, u_2). Par exemple : $u_1 = (1, -2, 0)$ et $u_2 = (0, 2, 1)$. Ce choix a peu d'importance : il influence les calculs qui suivent mais n'en modifie pas la complexité. □

4. a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $u_3 = e_1 + e_2 + e_3 = (1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1) = (1, 1, 1)$.
- Montrons que la famille $((-1, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1))$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :
  $$\lambda_1 \cdot (-1, 2, 0) + \lambda_2 \cdot (1, 0, 1) + \lambda_3 \cdot (1, 1, 1) = 0$$
  On obtient alors :
  $$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\,\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$
  $$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_2 & + & 3\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$
  $$\overset{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & 2\,\lambda_2 & + & 3\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$
  $$\Longleftrightarrow \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$
  (par remontées successives)

  La famille (u_1, u_2, u_3) est donc libre.
- De plus, $\text{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Remarque

- Le terme **cardinal** est réservé aux ensembles finis. La famille (u_1, u_2, u_3) est un ensemble qui contient 3 vecteurs. Elle est donc finie, de cardinal 3 (ce qu'on note $\text{Card}((u_1, u_2, u_3)) = 3$).
- $\text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3)$ est l'ev constitué de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs (u_1, u_2, u_3). C'est un ensemble **infini** de vecteurs, on ne peut parler de son cardinal. Par contre, si l'on dispose d'une base (u_1, u_2, u_3) d'un ev, tout vecteur se décompose de manière unique sur cette base. Ceci permet de donner une représentation finie de cet ensemble infini.
- Les notations : $\cancel{\text{Card}(\text{Vect}\,(u_1, u_2, u_3))}$ et $\cancel{\dim((u_1, u_2, u_3))}$ n'ont aucun sens ! □

b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.

Démonstration.

- Notons $U_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_3 = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u_1)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) = A \times U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

  On en déduit : $f(u_1) = 3 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

  Et ainsi : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_1)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u_2)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_2) = A \times U_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

  On en déduit : $f(u_1) = 0 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3$.

  Et ainsi : $\text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(u_3)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_3) = A \times U_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  On cherche alors à décomposer ce vecteur suivant (U_1, U_2, U_3).

  Autrement dit, on cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  On obtient alors le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 2 \\ 2\,\alpha & & & + & \gamma & = & 1 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 2 \\ & & 2\,\beta & + & 3\,\gamma & = & 5 \\ & & \beta & + & \gamma & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 2 \\ & & 2\,\beta & + & 3\,\gamma & = & 5 \\ & & & - & \gamma & = & -3 \end{array} \right.$$

$$\underset{\Longleftrightarrow}{\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \end{array}} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -\alpha & + & \beta & & & = & -1 \\ & & 2\,\beta & & & = & -4 \\ & & & - & \gamma & = & -3 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -2\,\alpha & & & & & = & 2 \\ & & 2\,\beta & & & = & -4 \\ & & & - & \gamma & = & -3 \end{array} \right.$$

$$\underset{\Longleftrightarrow}{\begin{array}{c} L_1 \leftarrow -L_1/2 \\ L_2 \leftarrow L_2/2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \end{array}} \left\{ \begin{array}{rrrcr} \alpha & & & = & -1 \\ & \beta & & = & -2 \\ & & \gamma & = & 3 \end{array} \right.$$

On en déduit : $f(u_3) = -1 \cdot u_1 - 2 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3$.
Et ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f(u_3)) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } T = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.}$$

□

c) En écrivant $T = 3I + N$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, pus de I et T.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après l'énoncé, $N = T - 3 \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- De plus : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0$.
- Les matrices $3I$ et N commutent (car la matrice I commute avec toutes les matrices).
  On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll}
T^n & = & (3\,I + N)^n & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3\,I)^{n-k}\ N^k \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}\, I^{n-k}\ N^k & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}\, I\ N^k \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}\ N^k & \textit{(car on a : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 3^{n-k}\ N^k + \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 3^{n-k}\ N^k & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 3^{n-k}\ N^k & \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0\textit{)} \\
& = & \binom{n}{0} 3^n\ N^0 + \binom{n}{1} 3^{n-1}\ N^1 & \\
& = & 3^n I + n\ 3^{n-1}\ N &
\end{array}$$

- Enfin : $3^0\ I + 0\ 3^{-1}\ N = I$ et $T^0 = I$.
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = 3^n\ I + n\ 3^{n-1}\ N.}$$

- De plus, comme $N = T - 3I$, on obtient :

$$T^n \ = \ 3^n\ I + n\ 3^{n-1}\ (T - 3I) \ = \ 3^n\ I + n\ 3^{n-1}\ T - n\ 3^n\ I \ = \ n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I.}$$

Remarque

- Comme noté dans la démonstration, l'hypothèse $n \geqslant 1$ est essentielle pour pouvoir découper la somme. Le cas $n = 0$ doit donc être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$. □

5. a) Expliquer pourquoi l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^n I$.

Démonstration.

- Comme T est la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3), on en déduit (passerelle matrice-endomorphisme) :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^n = n3^{n-1}\ f - (n-1)\, 3^n\ Id$$
- Comme A est la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3), on en déduit (passerelle matrice-endomorphisme dans l'autre sens) :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = n3^{n-1}\ A - (n-1)\, 3^n\ I}$$

Remarque

- C'est la manière subtile de rédiger cette question.
Mais, encore une fois, ce n'est pas la seule acceptée.
- On pouvait aussi procéder comme suit.
Notons $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Alors :
$$\begin{array}{rcl} A & = & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \\ & = & P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \ = \ P \times T \times P^{-1} \end{array}$$
Par une récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.
(la récurrence n'est pas explicitement demandée dans le sujet, il n'est donc pas utile de la faire)
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $T^n = n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I$. Donc :
$$\begin{array}{rcl} A^n & = & P\ T^n\ P^{-1} \ = \ P\ (n\ 3^{n-1}\ T - (n-1)\ 3^n\ I)\ P^{-1} \\ & = & n\ 3^{n-1}\ P\ T\ P^{-1} - (n-1)\ 3^n\ P\ P^{-1} \\ & = & n\ 3^{n-1}\ A - (n-1)\ 3^n\ I \end{array}$$
Et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = n\ 3^{n-1}\ A - (n-1)\ 3^n\ I$. □

b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.

Démonstration.
D'après la question ***1.***, $A^2 - 6A = -9I$.

On en déduit : $-\dfrac{1}{9}\ (A^2 - 6A) = I$. Et ainsi :
$$A \times \left(-\frac{1}{9}(A - 6I)\right) = I$$
$$\boxed{\text{On en conclut que } A \text{ est inversible, d'inverse : } A^{-1} = -\frac{1}{9}\ (A - 6I).}$$
□

c) Vérifier que la formule trouvée à la question ***5.a)*** reste valable pour $n = -1$.

Démonstration.
Si $n = -1$, on obtient :

$$\begin{aligned} n\ 3^{n-1}\ A - (n-1)\ 3^n\ I &= (-1)\ 3^{-1-1}\ A - (-1-1)\ 3^{-1}\ I \\ &= (-1)\ \frac{1}{3^2}\ A - (-2)\ \frac{1}{3}\ I \ = \ -\frac{1}{9}\ A + \frac{2}{3}\ I \\ &= -\frac{1}{9}(A - 6I) \ = \ A^{-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la formule trouvée à la question } \textbf{\textit{5.a)}} \text{ reste valable pour } n = -1.}$$

□

Exercice 2 : Suites récurrentes et algèbre linéaire (ESSEC I - 2003)

Soit a un nombre réel. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles définies sur $\mathbb{N}$, et F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3a\ u_{n+1} + (1-3a)\ u_n$.

I. Étude du cas particulier $a = 1$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par ses trois premiers termes u_0, u_1, u_2, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3\ u_{n+1} - 2\ u_n$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et on note M la matrice carrée $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Reconnaître, pour tout entier naturel n, le produit MX_n.
En déduire l'expression de X_n en fonction des matrices M, X_0 et de l'entier naturel n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$MX_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -2\ u_n + 3\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ MX_n = X_{n+1}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, par une récurrence immédiate : } \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = M^n X_0.}$$

□

2. a) Déterminer les valeurs propres de la matrice M et leur sous-espace propre associé.

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Rappelons :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est valeur propre de } M & \Leftrightarrow & M - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \text{l'un (au moins) des coefficients diagonaux de la réduite} \\ & & \text{(}\textbf{triangulaire supérieure}\text{) de } M - \lambda I_3 \text{ est nul} \end{array}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(M - \lambda I) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2 & 3 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow 2\ L_3 - \lambda\ L_1}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 - 3\ \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_2 \leftarrow -3\ L_2 + L_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & 2 & -3 + \lambda^2 \\ 0 & 2 - 3\ \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow 2\ L_3 - (2 - 3\ \lambda)\ L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & 2 & -3 + \lambda^2 \\ 0 & 0 & 2\ \lambda^2 - (2 - 3\ \lambda)(-3 + \lambda^2) \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcl} 2\ \lambda^2 - (2-3\ \lambda)(-3+\lambda^2) & = & \cancel{2\ \lambda^2} - (-6 + \cancel{2\ \lambda^2} + 9\ \lambda - 3\ \lambda^3) \\ & = & 6 - 9\ \lambda + 3\lambda^3 \ = \ 3\ (2 - 3\ \lambda + \lambda^3) \\ & = & 3\ (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2) \\ & = & 3\ (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+2) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathrm{Sp}(M) = \{1, -2\}.}$$

- Déterminons alors $E_1(M)$. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} U \in E_1(M) & \Longleftrightarrow & (M - I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \\ -2\ x & + & 3\ y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\ L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & & & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & + & y & = & 0 \\ & - & y & = & -z \end{array} \right. \\ & \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & & & = & -z \\ & - & y & = & -z \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_1(M) & = & \{U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (M - I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \ \texttt{ET} \ y = z\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

- Déterminons enfin $E_{-2}(M)$. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
U \in E_{-2}(M) & \iff & (M + 2\ I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\[4pt]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\ x & + & y & & & = & 0 \\ & & 2\ y & + & z & = & 0 \\ -2\ x & + & 3\ y & + & 2\ z & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \underset{}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\ x & + & y & & & = & 0 \\ & & 2\ y & + & z & = & 0 \\ & & 4\ y & + & 2\ z & = & 0 \end{array} \right. \\[4pt]
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\ x & + & y & = & 0 \\ & & 2\ y & = & -z \end{array} \right. \\[4pt]
& \overset{L_1 \leftarrow 2\ L_1 - L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 4\ x & & & = & z \\ & & 2\ y & = & -z \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_{-2}(M) & = & \{U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (M + 2\ I_3)\ U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\} \\[4pt]
& = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = \frac{1}{4}z \ \texttt{ ET } \ y = -\frac{1}{2}z\} \\[4pt]
& = & \{\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\ z \\ -\frac{1}{2}\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R}\} \\[4pt]
& = & \{z \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_{-2}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right)}$$

Remarque

- Lors du calcul du rang, on a effectué l'opération $L_2 \leftarrow -3\ L_2 + L_3$. Le but de cette opération est de se débarrasser du terme en λ dans le coefficient diagonal de la deuxième ligne.
  Cela permet de ne pas avoir à mener de discussion sur la valeur de λ.
- Détaillons la rédaction si on ne suit pas cette idée.

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{rg}(M - \lambda I) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 - 3\ \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\[4pt]
& \overset{L_3 \leftarrow \lambda\ L_3 + (2 - 3\ \lambda)\ L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^3 + (2 - 3\ \lambda) \end{pmatrix}\right) \quad \textit{(si } \lambda \neq 0\textit{)}
\end{array}$$

Cette opération n'est possible que si $\lambda \neq 0$ (sinon, cette opération n'est autre que $L_3 \leftarrow 2\ L_2$, ce qui correspond à écraser la ligne L_3).

Il reste alors à traiter le cas $\lambda = 0$.
Dans ce cas, en reprenant le début du calcul précédent, on obtient :

$$\text{rg}(M - 0\ I_3) \ = \ \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) \overset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

La matrice réduite est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
On en déduit qu'elle est inversible (donc de rang 3).
Ainsi, M est inversible ce qui démontre que $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre de M.

En réunissant ces deux cas, on en conclut une nouvelle fois que les valeurs propres de M sont les réels λ qui annulent $2 - 3\ \lambda + \lambda^2$. □

b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

Démonstration.

- La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est :
  - × génératrice de $E_1(M)$ d'après la question précédente,
  - × libre car constituée d'un vecteur non nul.

  C'est donc une base de $E_1(M)$.

  $$\boxed{\dim(E_1(M)) = 1}$$

On démontre de même que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-2}(M)$ et donc : $\dim(E_{-2}(M)) = 1$.

- La matrice M est carrée d'ordre 3.
  D'après ce qui précède :

  $$\dim(E_1(M)) + \dim(E_{-2}(M)) = 1 + 1 = 2 \neq 3$$

  $$\boxed{\text{La matrice } M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

3. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M, c'est-à-dire tel que M soit la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Déterminer une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que la matrice T de f dans $\mathscr{B}'$ vérifie $T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,
et que les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 aient respectivement pour première composante 1, 1 et 0.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par définition, cela signifie :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} f(e'_1) & = & -2 \cdot e'_1 & + & 0 \cdot e'_2 & + & 0 \cdot e'_3 \\ f(e'_2) & = & 0 \cdot e'_1 & + & 1 \cdot e'_2 & + & 0 \cdot e'_3 \\ f(e'_3) & = & 0 \cdot e'_1 & + & 1 \cdot e'_2 & + & 1 \cdot e'_3 \end{array} \right.$$

- On en déduit que $e'_1 \in E_{-2}(f) = \text{Vect}\left((1,2,-4)\right)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } e'_1 = (1,2,-4), \text{ seul vecteur de } E_{-2}(f) \text{ de première composante } 1.}$$

- De même $e'_2 \in E_1(f) = \text{Vect}\left((1,1,1)\right)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } e'_2 = (1,1,1), \text{ seul vecteur de } E_1(f) \text{ de première composante } 1.}$$

- Notons alors : $e'_3 = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et déterminons ces 3 réels.
  En appliquant l'isomorphisme de représentation à la dernière égalité du système, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc}
\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e'_3)) & = & & \text{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_2 + e'_3) & \\
\shortparallel & & & \shortparallel & \\
\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_3) & & \text{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_2) & + & \text{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_3) \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\
M \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}
\end{array}$$

Et ainsi : $(M - I) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ce qui équivaut au système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} - \alpha & + & \beta & & & = & 1 \\ & - & \beta & + & \gamma & = & 1 \\ -2\,\alpha & + & 3\,\beta & - & \gamma & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2\,L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} - \alpha & + & \beta & & & = & 1 \\ & - & \beta & + & \gamma & = & 1 \\ & & \beta & - & \gamma & = & -1 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} \beta & & & = & 1 \\ - \beta & + & \gamma & = & 1 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \textit{(car } \alpha = 0 \\ \textit{d'après l'énoncé)} \end{array}$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcr} \beta & = & 1 \\ \gamma & = & 2 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } e'_3 = (0,1,2).}$$

Remarque

- De manière générale : $E_{-2}(M) \neq E_{-2}(f)$. Rappelons le lien entre ces deux ensembles.
  Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Notons $U = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ où $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$, base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\text{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} & \Leftrightarrow & u & = & 1 \cdot e_1 & + & 2 \cdot e_2 & - & 4 \cdot e_3 & & \\
& \Leftrightarrow & u & = & 1 \cdot (1,0,0) & + & 2 \cdot (0,1,0) & - & 4 \cdot (0,0,1) & = & (1,2,-4)
\end{array}$$

  Connaissant U l'expression de u dépend de l'espace E d'étude. Ici $E = \mathbb{R}^3$.
  Évidemment, si on avait considéré un endomorphisme de $E = \mathbb{R}_2[X]$, on aurait obtenu :

$$u = 1 \cdot P_0 + 2 \cdot P_1 - 4 \cdot P_2$$

- Dans la démonstration, on a fait apparaître l'égalité : $(M-I)\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

  En appliquant $M-I$ de part et d'autre de cette égalité, on obtient :

$$(M-I)^2 \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} = (M-I)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

  On obtient alors, à l'aide de l'isomorphisme de représentation (passerelle matrice-endomorphisme) :

$$(f-\mathrm{id})^2\ (e'_3) = 0$$

  Autrement dit : $e'_3 \in \mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^2)$.
  Pour trigonaliser l'endomorphisme f (*i.e.* trouver une base dans laquelle f est représenter par une matrice triangulaire supérieure), on a donc choisi une base (e'_1, e'_2, e'_3) telle que :
  × $e'_1 \in \mathrm{Ker}(f+2\ \mathrm{id})$,
  × $e'_2 \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$,
  × $e'_3 \in \mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^2)$.
  On peut remarquer (démonstration classique) : $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^2)$.
  Et enfin : $e'_3 \in \mathrm{Ker}((f-\mathrm{id})^2)\ \setminus\ \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$.

  Tout cela participe du cadre classique de la trigonalisation. Mais on s'égare ici du programme de la voie ECE et on n'expliquera pas donc plus avant ces résultats.

□

b) Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de T^n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Notons $D = \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, de sorte que : $T = D+N$.
- Remarquons tout d'abord que : $N^2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{On en déduit donc, par une récurrence immédiate : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0.}$$

  (ou alors on remarque : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = N^2\ N^{k-2} = 0\ N^{k-2} = 0$)
- D'autre part :

$$DN = \begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = ND$$

$$\boxed{\text{Autrement dit, les matrices } N \text{ et } D \text{ commutent.}}$$

- D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll} T^n & = & (D+N)^n & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k & \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k + \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k & \textit{(ce découpage est valable si } n \geqslant 1\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k & \textit{(car : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0\textit{)} \\ & = & \binom{n}{0} D^n\ N^0 + \binom{n}{1} D^{n-1}\ N^1 & \\ & = & D^n + n\ D^{n-1}\ N & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ T^n = D^n + n\ D^{n-1}\ N.}$$

Enfin, si $n = 0$, $T^0 = I_3$.

- Il suffit alors d'exprimer les puissances de la matrice D :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ D^m = \begin{pmatrix} (-2)^m & 0 & 0 \\ 0 & 1^m & 0 \\ 0 & 0 & 1^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{array}{rcl} T^n & = & D^n + n\ D^{n-1}\ N \\ & = & \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} (-2)^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On remarque de plus que cette formule est encore vérifiée pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{En résumé, pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Remarque

- La « relation de Chasles » stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

(la deuxième somme est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
L'argument $n \geqslant 1$ est donc essentiel pour découper la somme.
Le cas $n = 0$ doit donc être traité à part.

- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$ (le découpage de la somme est alors valable pour $n \geqslant 2$). □

4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Exprimer M en fonction de T, P et P^{-1}, puis M^n en fonction des mêmes matrices et de l'entier naturel n.

Démonstration.

- D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \times & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & \times & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ M & = & P & \times & T & \times & P^{-1} \end{array}$$

- On en déduit, par une récurrence immédiate :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = P \times T^n \times P^{-1}}$$

□

5. a) Calculer P^{-1} (les calculs devront figurer sur la copie).

Démonstration.

- Par définition :

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_1) & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_2) & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2\ L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4\ L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

- La réduite obtenue est triangulaire supérieure. De plus, ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi, cette réduite est inversible et il en est de même de la matrice initiale P. *(c'est toujours le cas d'une matrice de passage entre deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$)*

- On effectue les opérations $\left\{ L_2 \leftarrow 3\, L_2 - \ L_3 \right.$. On obtient :

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}\right) \left| \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{matrix}\right)\right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_1 \leftarrow 9\, L_1 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\left(\begin{matrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix}\right) \left| \left(\begin{matrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{matrix}\right)\right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{9}\, L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{9}\, L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{3}\, L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \left| \left(\begin{matrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix}\right)\right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Pour tout entier naturel n, calculer les coefficients de la première ligne de M^n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de u_0, u_1, u_2 et de l'entier naturel n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La première ligne de M^n est obtenue par multiplication à gauche par la matrice $(1 \quad 0 \quad 0)$.
- On a alors :

$$\begin{array}{rcll} (1 \quad 0 \quad 0)\, M^n & = & (1 \quad 0 \quad 0)\, P\, T^n\, P^{-1} & \textit{(d'après la question } \textbf{4.}\textit{)} \\ & = & (1 \quad 1 \quad 0)\, T^n\, P^{-1} & \textit{(on récupère la } 1^{\text{ère}} \textit{ ligne de } T^n\textit{)} \\ & = & (1 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} & \textit{(d'après la question } \textbf{3.b)}\textit{)} \\ & = & \Big((-2)^n \quad 1 \quad n \Big)\, P^{-1} & \textit{(somme des lignes de } T^n\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{9} \Big((-2)^n \quad 1 \quad n \Big) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{pmatrix} & \textit{(d'après la question } \textbf{5.a)}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{9} \Big((-2)^n + 8 - 6n \qquad -2\,(-2)^n + 2 + 3n \qquad (-2)^n - 1 + 3n \Big) & \end{array}$$

- On en déduit que :

$$\begin{array}{ccccc} (1 \quad 0 \quad 0)\, X_n & = & (1 \quad 0 \quad 0)\, M^n & X_0 & \textit{(d'après la question } \textbf{1.}\textit{)} \\ \shortparallel & & & \shortparallel & \\ (1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} & & & \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Et ainsi :

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & \dfrac{1}{9} \Big(((-2)^n - 6n + 8) \ u_0 \ + \ (-2 \ (-2)^n + 3n + 2) \ u_1 \ + \ ((-2)^n + 3n - 1) \ u_2 \Big) \\ & = & \dfrac{1}{9} \Big((-2)^n \ (u_0 - 2u_1 + u_2) + 3n \ (-2u_0 + u_1 + u_2) + (8u_0 + 2u_1 - u_2) \Big) \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = \frac{(-2)^n}{9} \ (u_0 - 2u_1 + u_2) + \frac{n}{3} \ (-2u_0 + u_1 + u_2) + \frac{1}{9} \ (8u_0 + 2u_1 - u_2)}$$

□

II. Étude du cas général

On revient au cas général où a est un réel quelconque.

1. **Structure de F**

a) Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration.

- Rappelons que F le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+3} = 3a \ u_{n+1} + (1 - 3a) \ u_n$$

- Démontrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

(ii) $F \neq \varnothing$ car la suite constante nulle (z_n) est un élément de F. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+3} = 0 \quad \text{et} \quad 3a \ z_{n+1} + (1 - 3a) \ z_n = 3a \times 0 + (1 - 3a) \times 0 = 0$$

(iii) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(u, v) \in F^2$. Alors :

× $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3a \ u_{n+1} + (1 - 3a) \ u_n$.

× $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+3} = 3a \ v_{n+1} + (1 - 3a) \ v_n$.

On considère alors la suite $w = \lambda \cdot u + \mu \cdot v = (\lambda \ u_n + \mu \ v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} w_{n+3} & = & \lambda \ u_{n+3} + \mu \ v_{n+3} \\ & = & \lambda \ \big(3a \ u_{n+1} + (1 - 3a) \ u_n\big) + \mu \ \big(3a \ v_{n+1} + (1 - 3a) \ v_n\big) \\ & = & 3a \ \big(\lambda \ u_{n+1} + \mu \ v_{n+1}\big) + (1 - 3a) \ \big(\lambda \ u_n + \mu \ v_n\big) \\ & = & 3a \ w_{n+1} + (1 - 3a) \ w_n \end{array}$$

Ainsi, $w = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$ est une suite de F.

$$\boxed{\text{L'ensemble } F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.}$$

□

b) On considère l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} F & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array}$
Démontrer que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
En déduire que F est de dimension finie et préciser sa dimension.

Démonstration.

- Montrons que φ est une application linéaire.
  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(u, v) \in F^2$. Notons $w = \lambda \cdot u + \mu \cdot v = (\lambda\ u_n + \mu\ v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) & = & \varphi(w) \\ & = & (w_0, w_1, w_2) \\ & = & (\lambda\ u_0 + \mu\ v_0, \lambda\ u_1 + \mu\ v_1, \lambda\ u_2 + \mu\ v_2) \\ & = & (\lambda\ u_0, \lambda\ u_1, \lambda\ u_2) + (\mu\ v_0, \mu\ v_1, \mu\ v_2) \\ & = & \lambda \cdot (u_0, u_1, u_2) + \mu \cdot (v_0, v_1, v_2) \\ & = & \lambda \cdot \varphi(u) + \mu \cdot \varphi(v) \end{array}$$

$$\boxed{\varphi \text{ est bien une application linéaire.}}$$

- Démontrons que φ est injective.
  Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.

$$\begin{array}{rcl} u \in \mathrm{Ker}(\varphi) & \Leftrightarrow & \varphi(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \Leftrightarrow & (u_0, u_1, u_2) = (0, 0, 0) \end{array}$$

  Ainsi, par une récurrence **triple** immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.
  *(***initialisation*** : c'est vrai au rang* 0*,* 1*,* 2
  hérédité *: si c'est vrai au rang* n*,* $n+1$ *et* $n+2$*, alors* $u_{n+3} = 3a \times 0 + (1 - 3a) \times 0 = 0$*)*

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est injective.}}$$

- Démontrons que φ est surjective.
  Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Considérons la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = x \\ u_1 = y \\ u_2 = z \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3a\ u_{n+1} + (1 - 3a)\ u_n \end{array} \right.$$

  Alors, par définition, $u \in F$ et $\varphi(u) = X$.

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ est surjective.}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \varphi \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \dim(F) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3.}$$

□

c) Justifier que des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F forment une base de F si, et seulement si, la matrice $\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix}$ est inversible.

Démonstration.
Notons $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de F.

- Remarquons tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} \text{La matrice } \begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix} \text{ est inversible} & \Leftrightarrow & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix}\right) = 3 \\ & \Leftrightarrow & \text{La famille } \left(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) \text{ est libre} \\ & \Leftrightarrow & \text{La famille } (\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) \text{ est libre} \end{array}$$

- Il reste alors à démontrer que :

$$\text{La famille } (\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) \text{ est libre} \quad \Leftrightarrow \quad \text{La famille } (u, v, w) \text{ est libre}$$

($\Rightarrow$) Supposons que la famille $(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w))$ est libre.
Démontrons que la famille (u, v, w) est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que : $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$.
En appliquant φ de part et d'autre, on obtient :

$$\begin{array}{rrcl} & \varphi(\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w) & = & 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \\ \text{ainsi, par linéarité de } \varphi & \lambda_1 \cdot \varphi(u) + \lambda_2 \cdot \varphi(v) + \lambda_3 \cdot \varphi(w) & = & (0,0,0) \quad \textit{(car } \varphi(0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}) = (0,0,0)\textit{)} \end{array}$$

La famille $(\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w))$ étant libre, cette égalité démontre que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
Ainsi, la famille (u, v, w) est libre.

($\Leftarrow$) La démonstration est analogue, à ceci près qu'on applique l'application linéaire φ^{-1} : $\mathbb{R}^3 \to F$ à l'égalité obtenue initialement.

$$\begin{array}{rrcl} \text{Si} & \lambda_1 \cdot \varphi(u) + \lambda_2 \cdot \varphi(v) + \lambda_3 \cdot \varphi(w) & = & (0,0,0) \\ \text{alors, par linéarité de } \varphi^{-1} & \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w & = & 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \end{array}$$

- On en conclut :

$$\begin{array}{rcl} \text{La matrice } \begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix} \text{ est inversible} & \Leftrightarrow & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{pmatrix}\right) = 3 \\ & \Leftrightarrow & \text{La famille } (\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) \text{ est libre} \\ & \Leftrightarrow & \text{La famille } (u, v, w) \text{ est libre} \\ & \Leftrightarrow & \text{La famille } (u, v, w) \text{ est une base de } F \end{array}$$

La dernière équivalence est vérifiée car $\dim(F) = 3$.

$$\boxed{\text{La famille } (\varphi(u), \varphi(v), \varphi(w)) \text{ est libre} \quad \Leftrightarrow \quad \text{La famille } (u, v, w) \text{ est une base de } F.}$$ □

d) On suppose dans cette question : $a = 0$.

On note s, s', s'' les suites définies par :

$$s = \varphi^{-1}((1,0,0)), \quad s' = \varphi^{-1}((0,1,0)), \quad s'' = \varphi^{-1}((0,0,1))$$

Déterminer s, s', s'' (on donnera les dix premiers termes de chacune de ces trois suites).
En déduire la forme générale d'un élément de F.

Démonstration.

- Par définition, $s = \varphi^{-1}((1,0,0))$. Ainsi, s est l'unique suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi(s) = (1,0,0) \\ s \in F \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} s_0 = 1 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+3} = 3a\ s_{n+1} + (1-3a)\ s_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} s_0 = 1 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+3} = s_n \end{array}\right.$$

La dernière équivalence est obtenue car, d'après l'énoncé, $a = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que les 10 premiers termes de la suite } (s_n) \text{ sont :} \\ s_0 = 1, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 1, \quad s_4 = 0, \quad s_5 = 0, \quad s_6 = 1, \quad s_7 = 0, \quad s_8 = 0, \quad s_9 = 1\end{array}}$$

(la suite (s_n) est périodique de période 3)

- De même, s' est l'unique suite $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} s'_0 = 0 \\ s'_1 = 1 \\ s'_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ s'_{n+3} = s'_n \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que les 10 premiers termes de la suite } (s'_n) \text{ sont :} \\ s'_0 = 0, \quad s'_1 = 1, \quad s'_2 = 0, \quad s'_3 = 0, \quad s'_4 = 1, \quad s'_5 = 0, \quad s'_6 = 0, \quad s'_7 = 1, \quad s'_8 = 0, \quad s'_9 = 0\end{array}}$$

(la suite (s'_n) est périodique de période 3)

- Enfin, s'' est l'unique suite $(s''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\left\{\begin{array}{l} s''_0 = 0 \\ s''_1 = 0 \\ s''_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ s''_{n+3} = s''_n \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que les 10 premiers termes de la suite } (s''_n) \text{ sont :} \\ s''_0 = 0, \quad s''_1 = 0, \quad s''_2 = 1, \quad s''_3 = 0, \quad s''_4 = 0, \quad s''_5 = 1, \quad s''_6 = 0, \quad s''_7 = 0, \quad s''_8 = 1, \quad s''_9 = 0\end{array}}$$

(la suite (s''_n) est périodique de période 3)

- La matrice :

$$\begin{pmatrix} s_0 & s'_0 & s''_0 \\ s_1 & s'_1 & s''_1 \\ s_2 & s'_2 & s''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible (triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls).

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la question précédente, la famille } (s, s', s'') \text{ forme une base de } F.}$$

- Tout élément de F s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la base (s, s', s''). Ainsi, si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, il existe un unique triplet $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$u = \lambda_0 \cdot s + \lambda_1 \cdot s' + \lambda_2 \cdot s''$$

Ce qui signifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_0\ s_n + \lambda_1\ s'_n + \lambda_2\ s''_n$.

On en déduit que les 10 premiers termes de la suite (u_n) sont : $u_0 = \lambda_0$, $u_1 = \lambda_1$, $u_2 = \lambda_2$, $u_3 = \lambda_0$, $u_4 = \lambda_1$, $u_5 = \lambda_2$, $u_6 = \lambda_0$, $u_7 = \lambda_1$, $u_8 = \lambda_2$, $u_9 = \lambda_0$

(la suite (u_n) est une suite périodique quelconque de période 3) □

e) Reprendre la question précédente dans le cas $a = \frac{1}{3}$.

Démonstration.

- Par définition, $s = \varphi^{-1}((1,0,0))$. Ainsi, s est l'unique suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} \varphi(s) = (1,0,0) \\ s \in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_0 = 1 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+3} = 3a\ s_{n+1} + (1-3a)\ s_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_0 = 1 \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+3} = \dfrac{1}{3}\ s_{n+1} \end{cases}$$

La dernière équivalence est obtenue car, d'après l'énoncé, $a = \frac{1}{3}$.

On en déduit que les 10 premiers termes de la suite (s_n) sont : $s_0 = 1$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, $s_4 = 0$, $s_5 = 0$, $s_6 = 0$, $s_7 = 0$, $s_8 = 0$, $s_9 = 0$

(la suite (s_n) est constante nulle, à partir du rang 1)

- De même, s' est l'unique suite $(s'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} s'_0 = 0 \\ s'_1 = 1 \\ s'_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ s'_{n+3} = \dfrac{1}{3}\ s'_{n+1} \end{cases}$$

On en déduit que les 10 premiers termes de la suite (s'_n) sont : $s'_0 = 0$, $s'_1 = 1$, $s'_2 = 0$, $s'_3 = 1$, $s'_4 = 0$, $s'_5 = 1$, $s'_6 = 0$, $s'_7 = 1$, $s'_8 = 0$, $s'_9 = 1$

(la suite (s'_n) est périodique de période 2)

- Enfin, s'' est l'unique suite $(s''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} s''_0 = 0 \\ s''_1 = 0 \\ s''_2 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ s''_{n+3} = \dfrac{1}{3}\ s''_{n+1} \end{cases}$$

On en déduit que les 10 premiers termes de la suite (s''_n) sont : $s''_0 = 0$, $s''_1 = 0$, $s''_2 = 1$, $s''_3 = 0$, $s''_4 = 1$, $s''_5 = 0$, $s''_6 = 1$, $s''_7 = 0$, $s''_8 = 1$, $s''_9 = 0$

(la suite (s''_n) est périodique de période 2, à partir du rang 1)

- Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$, il existe un unique triplet $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_0\ s_n + \lambda_1\ s'_n + \lambda_2\ s''_n$$

On en déduit que les 10 premiers termes de la suite (u_n) sont : $u_0 = \lambda_0$, $u_1 = \lambda_1$, $u_2 = \lambda_2$, $u_3 = \lambda_1$, $u_4 = \lambda_3$, $u_5 = \lambda_1$, $u_6 = \lambda_2$, $u_7 = \lambda_1$, $u_8 = \lambda_2$, $u_9 = \lambda_1$

(la suite (u_n) est une suite périodique quelconque de période 2, à partir du rang 1) □

2. Suites géométriques de F

a) Démontrer que la suite $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à F si, et seulement si, le réel r est racine de la fonction polynomiale $p : x \mapsto x^3 - 3a\ x + 3a - 1$.
(avec la convention : $0^0 = 1$)

Démonstration.

- Par définition, la suite $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} = (r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à F si :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \underset{\substack{\shortparallel \\ r^{n+3}}}{s_{n+3}} = 3a\ \underset{\substack{\shortparallel \\ r^{n+1}}}{u_{n+1}} + (1-3a)\ \underset{\substack{\shortparallel \\ r^{n}}}{u_n}$$

- Ainsi, si $n = 0$, on obtient : $r^3 = 3a\ r + (1 - 3a)\ r^0 = 3a\ r + (1 - 3a)$.
(cette égalité est obtenue même si $r = 0$ car d'après la convention, $r^0 = 0$)
Ce qui s'écrit :

$$r^3 - 3a\ r + 3a - 1 \ =\ 0$$

Ainsi, si $(r^n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ alors r est racine de p.

- Réciproquement, si r est racine de p alors : $r^3 = 3a\ r + (1 - 3a)$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient en multipliant par r^n :

$$r^{n+3} = 3a\ r^{n+1} + (1 - 3a)\ r^n$$

Ainsi, si r est racine de p alors $(r^n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$.

□

b) Déterminer, en fonction du réel a, le nombre de racines de la fonction p ainsi que leur valeur.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que 1 est racine évidente de p. On en déduit la factorisation :

$$p(X) = (X - 1)\ (X^2 + X - (3a - 1))$$

Notons $Q(X) = X^2 + X - (3a - 1)$. Calculons le discriminant de Q :

$$\Delta = 1 + 4\ (3a - 1) = 12a - 3 = 3\ (4a - 1)$$

Trois cas se produisent alors :
× si $4a - 1 > 0$: alors $\Delta > 0$ et Q admet deux racines distinctes :

$$r_+ = \frac{-1 + \sqrt{3}\ \sqrt{4a - 1}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_- = \frac{-1 - \sqrt{3}\ \sqrt{4a - 1}}{2}$$

Il faut alors vérifier si ces racines peuvent être égales à la première racine 1.

$$\begin{aligned} r_+ = 1 &\Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{3}\ \sqrt{4a-1}}{2} = 1 \\ &\Leftrightarrow -1+\sqrt{3}\ \sqrt{4a-1} = 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3}\ \sqrt{4a-1} = 3 \\ &\Leftrightarrow 3\ (4a-1) = 9 \qquad \textit{(car } \sqrt{3}\ \sqrt{4a-1} \geqslant 0 \textit{ et } 3 \geqslant 0\textit{)} \\ &\Leftrightarrow 4a-1 = 3 \\ &\Leftrightarrow 4a = 4 \Leftrightarrow a = 1 \end{aligned}$$

Le cas $r_- = 1$ peut être écarté de suite car $r_- \leqslant 0$ et $1 > 0$.

Si $a = 1$ alors p admet 2 racines distinctes : 1 et r_-.
Sinon, si $a > \frac{1}{4}$, alors p admet 3 racines distinctes : 1, r_+ et r_-.

× si $4a - 1 = 0$: alors $\Delta = 0$ et Q admet une racine double.

Si $a = \frac{1}{4}$ alors p admet 2 racines distinctes : 1 et $-\frac{1}{2}$.

× si $4a - 1 < 0$: alors $\Delta < 0$ et Q n'admet pas de racine réelle.

Si $a < \frac{1}{4}$ alors p admet 1 seule racine réelle : 1.

□

3. **Cas où p admet trois racines distinctes**

a) Démontrer que, lorsque la fonction p admet trois racines distinctes 1, r_1 et r_2, les suites $\big(1\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(r_1{}^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(r_2{}^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de l'espace vectoriel F.

Démonstration.

- D'après la question ***II.1.c)***, la famille $((1)_{n\in\mathbb{N}}, (r_1)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de F si et seulement si la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_1 & r_2 \\ 1 & r_1^2 & r_2{}^2 \end{pmatrix}$ est inversible.
- Or :

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_1 & r_2 \\ 1 & r_1^2 & r_2{}^2 \end{pmatrix}\right) &\underset{}{\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=}} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & r_1 - 1 & r_2 - 1 \\ 0 & r_1^2 - 1 & r_2{}^2 - 1 \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{L_3 \leftarrow L_3 - (r_1+1)\ L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & r_1 - 1 & r_2 - 1 \\ 0 & 0 & (r_2{}^2 - 1) - (r_2 - 1)\ (r_1 + 1) \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Précisons le dernier coefficient diagonal.

$$\begin{aligned} (r_2{}^2 - 1) - (r_2 - 1)\ (r_1 + 1) &= (r_2 - 1)\ (r_2 + 1) - (r_2 - 1)\ (r_1 + 1) \\ &= (r_2 - 1)\ \big((r_2 + 1) - (r_1 + 1)\big) \\ &= (r_2 - 1)\ (r_2 - r_1) \end{aligned}$$

Ainsi, si 1, r_1, r_2 sont des réels distincts, les coefficients diagonaux de la réduite triangulaire supérieure obtenue sont tous non nuls.
Cette matrice est donc inversible et il en est de même de la matrice M initiale.

> Si p admet 3 racines distinctes 1, r_1 et r_2, la famille $\big((1)_{n\in\mathbb{N}}, ({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}, ({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ forme une base de l'espace vectoriel F.

□

b) Dans le cas où $a = 7$, exprimer, en fonction de l'entier naturel n, le terme général u_n de la suite, appartenant à F, qui vérifie : $u_0 = 1$, $u_1 = 10$, $u_2 = -8$.

Démonstration.

- Dans le cas où $a = 7$, on a $a \neq 1$ et $a > \frac{1}{4}$.
  On en déduit, d'après la question ***II.2.b)*** que p admet trois racines distinctes :

$$1, \qquad r_1 = \frac{-1+\sqrt{3\times 27}}{2} = \frac{-1+\sqrt{81}}{2} = \frac{-1+9}{2} = 4, \qquad r_2 = \frac{-1-\sqrt{81}}{2} = \frac{-1-9}{2} = -5$$

- Ainsi, la famille $\big((1)_{n\in\mathbb{N}}, ({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}, ({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ forme une base de F.
  Comme $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, il existe un unique triplet $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_0\ 1 + \lambda_1\ {r_1}^n + \lambda_2\ {r_2}^n$$

  En considérant $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & \lambda_0\ 1 + \lambda_1\ {r_1}^0 + \lambda_2\ {r_2}^0 \\ u_1 & = & \lambda_0\ 1 + \lambda_1\ r_1 + \lambda_2\ r_2 \\ u_2 & = & \lambda_0\ 1 + \lambda_1\ {r_1}^2 + \lambda_2\ {r_2}^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 1 \\ \lambda_0 & + & 4\ \lambda_1 & - & 5\lambda_2 & = & 10 \\ \lambda_0 & + & 16\ \lambda_1 & + & 25\ \lambda_2 & = & -8 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 1 \\ & & 3\ \lambda_1 & - & 6\ \lambda_2 & = & 9 \\ & & 15\ \lambda_1 & + & 24\ \lambda_2 & = & -9 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 1 \\ & & \lambda_1 & - & 2\ \lambda_2 & = & 3 \\ & & 5\ \lambda_1 & + & 8\ \lambda_2 & = & -3 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 5\ L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & 1 \\ & & \lambda_1 & - & 2\ \lambda_2 & = & 3 \\ & & & & 18\ \lambda_2 & = & -18 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow \frac{1}{18}\ L_3 \\ L_2 \leftarrow L2 + 2\ L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_0 & + & \lambda_1 & & & = & 2 \\ & & \lambda_1 & & & = & 1 \\ & & & & \lambda_2 & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} \lambda_0 & & & & & = & 1 \\ & & \lambda_1 & & & = & 1 \\ & & & & \lambda_2 & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + 4^n - (-5)^n}$$

□

4. Cas où p admet une racine double

a) Soit r un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général nr^n.
Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_{n+3} - 3a\ u_{n+1} - (1-3a)\, u_n = r^n \left(n\ p(r) + r\ p'(r)\right)$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la suite (u_n) :

$$\begin{array}{rl} & u_{n+3} - 3a\ u_{n+1} - (1-3a)\ u_n \\ = & (n+3)\ r^{n+3} - 3a\ (n+1)\ r^{n+1} - (1-3a)\ n\ r^n \\ = & r^n\Big((n+3)\ r^3 - 3a\ (n+1)\ r - (1-3a)\ n\Big) \\ = & r^n\Big(n\ \left(r^3 - 3a\ r - (1-3a)\right) + \left(3\ r^3 - 3a\ r\right)\Big) \\ = & r^n\Big(n\ \left(r^3 - 3a\ r + (3a-1)\right) + r\ \left(3\ r^2 - 3a\right)\Big) \\ = & r^n\Big(n\ p(r) + r\ p'(r)\Big) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 3a\ u_{n+1} - (1-3a)\ u_n = r^n\Big(n\ p(r) + r\ p'(r)\Big).}$$

□

b) En déduire que, lorsque p admet une racine double r_0 et une racine simple r_1 la suite $(n\ {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à F, et démontrer que les suites $({r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n\ {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F.

Démonstration.
Supposons que p admet une racine double r_0 et une racine simple r_1.

- Alors, par définition de r_0 : $p(r_0) = 0$ et $p'(r_0) = 0$.
  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcll} u_{n+3} - 3a\ u_{n+1} - (1-3a)\ u_n & = & {r_0}^n\Big(n\ p(r_0) + r_0\ p'(r_0)\Big) & \text{\textit{(d'après la question précédente)}} \\ & = & 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F.}$$

- Les suites $({r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(n\ {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant dans F, alors, d'après la question ***II.1.c)***, elles en forment une base si et seulement si la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ r_0 & r_0 & r_1 \\ {r_0}^2 & 2\ {r_0}^2 & {r_1}^2 \end{pmatrix}$ est inversible.

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ r_0 & r_0 & r_1 \\ {r_0}^2 & 2\ {r_0}^2 & {r_1}^2 \end{pmatrix}\right) & \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - r_0\ L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - {r_0}^2\ L_1}}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & r_0 & r_1 - r_0 \\ 0 & 2\ {r_0}^2 & {r_1}^2 - {r_0}^2 \end{pmatrix}\right) \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2r_0\ L_2}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & r_0 & r_1 - r_0 \\ 0 & 0 & ({r_1}^2 - {r_0}^2) - 2r_0\ (r_1 - r_0) \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

Précisons le dernier coefficient diagonal.

$$\begin{array}{rcl} (r_1{}^2 - r_0{}^2) - 2r_0\ (r_1 - r_0) & = & r_1{}^2 - 2\ r_0 r_1 + r_2{}^2 \\ & = & (r_1 - r_0)^2 \end{array}$$

Ainsi, comme $r_0 \neq 0$ (d'après la question ***II.2.b)***, $r_0 = -\frac{1}{2}$), et $r_1 \neq r_0$, les coefficients diagonaux de la réduite triangulaire supérieure obtenue sont tous non nuls.
Cette matrice est donc inversible et il en est de même de la matrice M initiale.

$$\boxed{\text{La famille } \left(\left(r_0{}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(n\ r_0{}^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(r_1{}^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \right) \text{ forme une base de } F.}$$

□

c) Dans le cas où $a = \frac{1}{4}$, exprimer le terme général u_n d' un élément quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F en fonction de u_0, u_1 et u_2 et de l'entier naturel n.
Préciser la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration.

- D'après la question ***II.2.c)***, le cas $a = \frac{1}{4}$ correspond au cas où p admet une racine double $r_0 = -\frac{1}{2}$ et une racine simple $r_1 = 1$.
- D'après la question précédente, la famille $\left((r_0{}^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nr_0{}^n)_{n\in\mathbb{N}}, (1)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ forme une base de F.
  Comme $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, il existe un unique triplet $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_0\ r_0{}^n + \lambda_1\ nr_0{}^n + \lambda_2\ 1$$
  En considérant $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, on obtient le système :
  $$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & \lambda_0\ r_0{}^0 + \lambda_2 \\ u_1 & = & \lambda_0\ r_0 + \lambda_1\ r_0 + \lambda_2 \\ u_2 & = & \lambda_0\ r_0{}^2 + \lambda_1\ 2r_0{}^2 + \lambda_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_0 & & & + & \lambda_2 & = & u_0 \\ -\frac{1}{2}\lambda_0 & - & \frac{1}{2}\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & u_1 \\ \frac{1}{4}\ \lambda_0 & + & \frac{1}{2}\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & = & u_2 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2\ L_2 \\ L_3 \leftarrow 4\ L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_0 & & & + & \lambda_2 & = & u_0 \\ -\lambda_0 & - & \lambda_1 & + & 2\ \lambda_2 & = & 2\ u_1 \\ \lambda_0 & + & 2\ \lambda_1 & + & 4\ \lambda_2 & = & 4\ u_2 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_0 & & & + & \lambda_2 & = & u_0 \\ & - & \lambda_1 & + & 3\ \lambda_2 & = & u_0 + 2\ u_1 \\ & & 2\ \lambda_1 & + & 3\ \lambda_2 & = & -u_0 \quad 4\ u_2 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 2\ L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_0 & & & + & \lambda_2 & = & u_0 \\ & - & \lambda_1 & + & 3\ \lambda_2 & = & u_0 + 2\ u_1 \\ & & & & 9\ \lambda_2 & = & u_0 + 4\ u_1 + 4\ u_2 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow 9\ L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 3\ L_2 - L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 9\ \lambda_0 & & & & & = & 8\ u_0 - 4\ u_1 - 4\ u_2 \\ & - & 3\ \lambda_1 & & & = & 2\ u_0 + 2\ u_1 - 4\ u_2 \\ & & & & 9\ \lambda_2 & = & u_0 + 4\ u_1 + 4\ u_2 \end{array}\right.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\boxed{u_n = \frac{1}{9}\ (8u_0 - 4u_1 - 4u_2)\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\ (2u_0 + 2u_1 - 4u_2)\ n \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{9}\ (u_0 + 4u_1 + 4u_2)}$$

Il reste alors à remarquer :

× $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $|-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < 1$.

× $\lim\limits_{n \to +\infty} n \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$ pour la raison précédente.

$$\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est convergente, de limite } \frac{1}{9}\ (u_0 + 4u_1 + 4u_2).}$$

□

Exercice 3 : EDHEC 2014

On note I la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Montrer que la matrice $A - \lambda\, I$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda^3 - 9\lambda^2 - 27\lambda + 53 = 0$.

Démonstration.

- Déterminons le rang de la matrice $A - \lambda I$.

$$\begin{aligned}
& \mathrm{rg}(A - \lambda I) \\
= \quad & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 7-\lambda & 5 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 6 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} \quad & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 6 & -1-\lambda & 2 \\ 7-\lambda & 5 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 6\, L_3 - (7-\lambda)\, L_1}}{=} \quad & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 30-(7-\lambda) & 6-(7-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
= \quad & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\
\overset{L_3 \leftarrow (2+\lambda)\, L_3 + (23+\lambda)\, L_2}{=} \quad & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 0 & (2+\lambda)\,(-15+10\lambda-\lambda^2) + (23+\lambda)\,(-1+\lambda) \end{pmatrix}\right) \quad \textit{(dans le cas où } 2+\lambda \neq 0\textit{)} \\
= \quad & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 0 & -53+27\lambda+9\lambda^2-\lambda^3 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

- Ainsi, dans le cas où $2 + \lambda \neq 0$, on obtient une réduite triangulaire supérieure.
  Elle est non inversible ssi l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi, si $2 + \lambda \neq 0$:

$$A - \lambda I \text{ non inversible } \Leftrightarrow \; -53 + 27\lambda + 9\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

- Il reste à traiter le cas où $2+\lambda=0$ (*i.e.* $\lambda=-2$).
  Dans ce cas, en reprenant le début du calcul précédent, on obtient :

$$\begin{array}{cl} & \operatorname{rg}(A-\lambda I) \\ = & \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 23+\lambda & 6-(7-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\ = & \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 21 & -39 \end{pmatrix}\right) \\ \overset{L_3 \leftrightarrow L2}{=} & \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 5 \\ 0 & 21 & -39 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

  Ainsi, dans le cas où $2+\lambda=0$, on obtient une réduite triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls. La matrice $A-\lambda I$ est donc inversible dans ce cas.

$$\boxed{A-\lambda I \text{ non inversible ssi } -53+27\lambda+9\lambda^2-\lambda^3=0.}$$

Remarque

- Il était possible d'être plus astucieux lors du calcul du rang de la matrice $A-\lambda I$ afin de ne pas avoir à faire de disjonction de cas. On pouvait par exemple effectuer l'opération suivante :

$$\begin{array}{ccl} \operatorname{rg}(A-\lambda I) & = & \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_2 \leftarrow L_2+L_3}{=} & \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & 21 & -16+11\lambda-\lambda^2 \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

  On pouvait alors effectuer l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow 21L_3-(23+\lambda)L_2\right.$ pour conclure.
- Il était aussi possible à cette étape d'utiliser une opération sur les colonnes :

$$\begin{array}{ccl} \operatorname{rg}(A-\lambda I) & = & \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 23+\lambda & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{C_2 \leftarrow C_2+C_3}{=} & \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 6 & 4-\lambda & 3-\lambda \\ 0 & -3 & -1+\lambda \\ 0 & 8+11\lambda-\lambda^2 & -15+10\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

  On pouvait alors effectuer l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow 3L_3+(8+11\lambda-\lambda^2)L_2\right.$ pour conclure.
- Cette question présentait une difficulté calculatoire relativement grande et assez inédite pour un sujet `EDHEC`. En contrepartie, le résultat attendu était fourni.
  Dans ce cas, la stratégie à adopter est la suivante :
  × écrire le calcul directement au propre.
  Il faut prendre le temps de le poser correctement et notamment de noter les opérations effectuées. Vous risquez de commettre des erreurs en opérant trop rapidement.
  × si le calcul n'aboutit pas rapidement, il ne faut pas s'acharner.
  Il suffit alors de signaler au correcteur que vous admettez ce résultat (vous pouvez brièvement expliquer ce que vous deviez obtenir et comment conclure dans ce cas).

  Passer la question n'étant pas pénalisant puisque le résultat était fourni. □

b) Étudier la fonction f qui, à tout réel x, associe $f(x) = x^3 - 9x^2 - 27x + 53$, puis dresser son tableau de variations.
(on précisera les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, on notera m le minimum local de f sur $\mathbb{R}$, M le maximum local de f sur $\mathbb{R}$ et on ne cherchera ni à calculer m, ni à calculer M)

Démonstration.

- La fonction f est polynomiale. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $$f'(x) = 3x^2 - 18x - 27 = 3\ (x^2 - 6x - 9)$$
  Notons $P(X) = X^2 - 6X - 9$. Ce polynôme admet pour discriminant : $\Delta = 36 - (4 \times (-9)) = 72$.
  Notons que : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\ \sqrt{2}$. Le polynôme P admet pour racines :
  $$x_+ = \frac{6 + \sqrt{72}}{2} = 3 + 3\ \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad x_- = \frac{6 - \sqrt{72}}{2} = 3 - 3\ \sqrt{2}$$
  Ainsi : $f'(x) < 0 \ \Leftrightarrow\ x \in \,]x_-, x_+[$.
- On en déduit le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		x_-		x_+		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

  Détaillons l'obtention des limites :
  × $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$
  × $f(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} x^3 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$

Remarque

- Ici, $P(X) = aX^2 + bX + c = X^2 - 6X - 9$. Le coefficient b s'écrit naturellement sous la forme $b = 2 \times b'$ avec $b' = 3$. Ainsi, lorsque l'on calcule le déterminant, on obtient :
  $$\begin{array}{rcl} \Delta & = & (2b')^2 - 4\ ac \\ & = & 4\ (b')^2 - 4\ ac \\ & = & 4\ ((b')^2 - ac) \ = \ 4\ \Delta' \end{array}$$
  Ainsi : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4\Delta'} = 2\ \sqrt{\Delta'}$.
  Ainsi, on en déduit que :
  $$x_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b' - 2\sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$
  $$x_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b' + 2\sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}$$
- On retiendra que si b s'écrit naturellement sous la forme $2b'$, alors les formules classiques pour x_- et x_+ peuvent se simplifier. Le réel Δ' est appelé discriminant réduit du polynôme P. S'il n'est pas obligatoire de connaître les formules associées au discriminant réduit, la simplification évoquée ci-dessus doit `TOUJOURS` être effectuée et il faudra systématiquement y penser lorsque b s'écrit sous la forme $2b'$.

□

c) Calculer $f(0)$ et $f(3)$ puis déterminer les signes de m et M.

Démonstration.

- Tout d'abord :
  - $\times$ $f(0) = 53$.
  - $\times$ $f(3) = 3^3 - 9 \times 3^2 - 27 \times 3 + 53 = 27\ (1 - 3 - 3) + 53 = -135 + 53 = -82$.
- On remarque alors que :

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ x_-}}{3\ (1 - \sqrt{2})} \quad < \quad 0 \quad < \quad 3 \quad < \quad \underset{\substack{\shortparallel \\ x_+}}{3 + 3\ \sqrt{2}}$$

- Or, sur $[x_-, x_+]$, la fonction f est strictement décroissante.
  On en déduit, par application de f :

$$f(x_-) > f(0) = 53 > 0 \quad \text{et} \quad f(x_+) < f(3) = -82 < 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } M = f(x_-) > 0 \text{ et } m = f(x_+) < 0.}$$

□

d) Montrer que $A - \lambda\ I$ n'est pas inversible pour exactement trois valeurs de λ, que l'on ne cherchera pas à calculer et que l'on notera λ_1, λ_2 et λ_3, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

Démonstration.

- La fonction f est :
  - $\times$ continue sur $]-\infty, x_-]$,
  - $\times$ strictement croissante sur $]-\infty, x_-]$.

  On en déduit que f réalise une bijection de $]-\infty, x_-]$ sur $f(]-\infty, x_-])$. Or :

$$f(]-\infty, x_-]) \ = \left]\lim_{x \to -\infty} f(x), f(x_-)\right] \ = \ ]-\infty, M]$$

  Or $0 \in\ ]-\infty, M]$, car, d'après la question précédente, $M > 0$.
  Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\lambda_1 \in\ ]-\infty, x_-]$.
- En procédant de même, on démontre que :
  - $\times$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\lambda_2 \in\ ]x_-, x_+]$.
  - $\times$ l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\lambda_3 \in\ ]x_+, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Par construction } \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3.}$$

D'après la question ***1.a)***, la matrice $A - \lambda I$ est n'est pas inversible ssi $f(\lambda) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } A - \lambda I \text{ n'est pas inversible ssi } \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}.}$$

□

e) **Seulement pour les cubes (les autres pourront se servir de ce résultat sans démonstration)** En déduire qu'il existe une matrice P inversible telle que :

$$A = PDP^{-1}, \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

- D'après la question précédente, la matrice A admet 3 valeurs propres distinctes λ_1, λ_2, λ_3. Comme $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice A est diagonalisable.
- Ainsi, il existe une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telles que :
$$A \ = \ PDP^{-1}$$
La matrice D contient dans sa diagonale les valeurs propres de la matrice A.

$$\boxed{\text{Finalement, } A \ = \ PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.}$$

□

2. L'objectif de cette question est de déterminer l'ensemble E des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec A c'est-à-dire qui vérifient $AM = MA$.

a) Montrer que les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

Démonstration.

Notons $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$.

- Tout d'abord :
$$DM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \, m_{11} & \lambda_1 \, m_{12} & \lambda_1 \, m_{13} \\ \lambda_2 \, m_{21} & \lambda_2 \, m_{22} & \lambda_2 \, m_{23} \\ \lambda_3 \, m_{31} & \lambda_3 \, m_{32} & \lambda_3 \, m_{33} \end{pmatrix}$$
- D'autre part :
$$MD = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \, m_{11} & \lambda_2 \, m_{12} & \lambda_3 \, m_{13} \\ \lambda_1 \, m_{21} & \lambda_2 \, m_{22} & \lambda_3 \, m_{23} \\ \lambda_1 \, m_{31} & \lambda_2 \, m_{32} & \lambda_3 \, m_{33} \end{pmatrix}$$
- Raisonnons par équivalence :
$$\begin{array}{rl} & DM = MD \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \lambda_1 \, m_{11} & \lambda_1 \, m_{12} & \lambda_1 \, m_{13} \\ \lambda_2 \, m_{21} & \lambda_2 \, m_{22} & \lambda_2 \, m_{23} \\ \lambda_3 \, m_{31} & \lambda_3 \, m_{32} & \lambda_3 \, m_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \, m_{11} & \lambda_2 \, m_{12} & \lambda_3 \, m_{13} \\ \lambda_1 \, m_{21} & \lambda_2 \, m_{22} & \lambda_3 \, m_{23} \\ \lambda_1 \, m_{31} & \lambda_2 \, m_{32} & \lambda_3 \, m_{33} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \, m_{12} = \lambda_2 \, m_{12} \\ \lambda_1 \, m_{13} = \lambda_3 \, m_{13} \\ \lambda_2 \, m_{23} = \lambda_3 \, m_{23} \\ \lambda_2 \, m_{21} = \lambda_1 \, m_{21} \\ \lambda_3 \, m_{31} = \lambda_1 \, m_{31} \\ \lambda_3 \, m_{32} = \lambda_2 \, m_{32} \end{array} \right. \end{array}$$

- Traitons l'une de ces contraintes :

$$\lambda_1 \ m_{12} = \lambda_2 \ m_{12} \ \Leftrightarrow \ (\lambda_1 - \lambda_2) \ m_{12} = 0 \ \overset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\Leftrightarrow} \ m_{12} = 0$$

On en déduit, en procédant de même, que : $m_{13} = m_{23} = m_{21} = m_{31} = m_{32} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } M \text{ commute avec } D \text{ si seulement si } M \text{ est diagonale.}}$$

□

b) Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

(i) M est une matrice de E.

(ii) $P^{-1}MP$ commute avec D.

Démonstration.

$$\begin{array}{cll} & M \text{ est une matrice de } E & \\ \Leftrightarrow & M \text{ commute avec } A & \\ \Leftrightarrow & AM = MA & \\ \Leftrightarrow & PDP^{-1}M = MPDP^{-1} & \\ \Leftrightarrow & P^{-1}(PDP^{-1}M) = P^{-1}(MPDP^{-1}) & \textit{(en multipliant à gauche par } P^{-1}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & DP^{-1}M = P^{-1}MPDP^{-1} & \\ \Leftrightarrow & (DP^{-1}M)P = (P^{-1}MPDP^{-1})P & \textit{(en multipliant à droite par } P^{-1}\textit{)} \\ \Leftrightarrow & D(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)D & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } M \text{ est une matrice de } E \text{ si et seulement si } P^{-1}MP \text{ commute avec } D.}$$

□

c) Établir que toute matrice M de E est combinaison linéaire des trois matrices suivantes :

$$P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}, \qquad P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}, \qquad P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$

Démonstration.

- D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{cl} & M \text{ est une matrice de } E \\ \Leftrightarrow & P^{-1}MP \text{ commute avec } D \\ \Leftrightarrow & P^{-1}MP \text{ est diagonale} \\ \Leftrightarrow & \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \ P^{-1}MP = \begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \ M = P\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix}P^{-1} \end{array}$$

- Or :
$$P\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}P^{-1} = a \cdot P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + b \cdot P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + c \cdot P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, } M \in E \text{ si et seulement si } M \text{ est combinaison linéaire des matrices} \\ P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},\ P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}\end{array}}$$

□

d) En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

Démonstration.

- D'après la question précédente :
$$E = \text{Vect}\left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \right)$$

- La famille $\mathcal{F} = \left(P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} \right)$ est donc génératrice de E. Démontrons que c'est une famille libre.

  Soit $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :
$$\mu_1 \cdot P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + \mu_2 \cdot P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + \mu_3 \cdot P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = 0$$

  Alors en multipliant à gauche par P^{-1}, on obtient :
$$\mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} + \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = 0$$

  Et en multipliant à droite par P, on obtient :
$$\mu_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ce qui équivaut à : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} \text{ est libre.}}$$

La famille $\mathcal{F}$ est :
× génératrice de E,
× libre.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} \text{ est donc une base de } E.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \dim(E) = \text{Card}(\mathcal{F}) = 3.}$$

□

e) **Seulement pour les cubes :** Montrer, en raisonnant sur les valeurs propres de A, qu'il n'existe aucun polynôme annulateur non nul de A de degré inférieur ou égal à 2.
En déduire que $(I,\ A,\ A^2)$ est une base de E.

Démonstration.

- Soit R un polynôme annulateur non nul de A. Alors :

$$\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines du polynôme } R\}$$

Ainsi, R admet au moins 3 racines : λ_1, λ_2, λ_3.

- On en déduit que R est multiple de $X - \lambda_1$, $X - \lambda_2$ et $X - \lambda_3$.
Plus précisément, il existe un polynôme $T \neq 0$ tel que :

$$R(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)(X - \lambda_3)\ T(X)$$

$$\boxed{\text{Tout polynôme annulateur non nul de } A \text{ est de degré supérieur ou égal à 3.}}$$

- Remarquons maintenant que les matrices I, A et A^2 commutent toutes avec A.
Ainsi, $\mathcal{F} = (I, A, A^2)$ est une famille d'éléments de E.
- Démontrons que $\mathcal{F}$ est une famille libre.

Soit $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :

$$\mu_1 \cdot I + \mu_2 \cdot A + \mu_3 \cdot A^2 = 0$$

Ainsi, $R(X) = \mu_1 + \mu_2 X + \mu_3 X^2$ est un polynôme annulateur de A et est de degré inférieur ou égal à 2. D'après ce qui précède, ceci signifie que $R = 0$. D'où :

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$$

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{F} \text{ est libre.}}$$

- La famille $\mathcal{F}$ est libre et est de cardinal 3 dans l'espace E de dimension $\dim(E) = 3$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{F} \text{ est une base de } E.}$$

□

Exercice 4 : HEC 2005

Dans cet exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2.
On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et id l'application identité de E.
L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation $(*)$: $f \circ f = 4\,\text{id}$.

A. Étude du cas n = 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = \left(\sqrt{2}-2,\ \sqrt{2}\right)$.

1. Montrer que f vérifie l'équation $(*)$, puis préciser le noyau et l'image de f.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$f \circ f = \text{id} \ \Leftrightarrow\ A \times A = I_2$$
Or :
$$\begin{aligned} A \times A &= \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4\ I_2 \end{aligned}$$
$\boxed{\text{La deuxième proposition étant vérifiée, il en est de même de la première : } f \circ f = \text{id}.}$

- Remarquons alors que :
$$\det(A) = \sqrt{2} \times (-\sqrt{2}) - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = -2 - 2 = -4 \neq 0$$
Ainsi, f est bijective car sa matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est inversible.
On en déduit que f est injective et que $\text{Ker}(f) = \{(0,0)\}$.
$\boxed{\text{Ker}(f) = \{(0,0)\}}$

- D'après le théorème du rang :
$$\underset{\displaystyle 2}{\underset{\shortparallel}{\dim(\mathbb{R}^2)}} = \underset{\displaystyle 0}{\underset{\shortparallel}{\dim(\text{Ker}(f))}} + \dim(\text{Im}(f))$$
Ainsi : $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.
$\boxed{\text{Comme } \text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2 \text{ et } \dim(\text{Im}(f)) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)\text{, on en conclut que : } \text{Im}(f) = \mathbb{R}^2}$

Remarque
Dans la démonstration précédente, on fait preuve de recul pour ne pas avoir à déterminer, par calcul, $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$. Procédant ainsi, on gagne du temps et donc des points. Cependant, il était possible (mais déconseillé !) de procéder à une démonstration calculatoire.
Exposons cette solution.

- Soit $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $W = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w)$.

$$\begin{array}{rcl}
w \in \mathrm{Ker}(f) & \Longleftrightarrow & f(w) = 0 \\
& \Longleftrightarrow & A\, W = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 0 \\ & - & 2y & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \{\ x = y = 0 \\
& & \textit{(par remontées successives)}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y) \mid x = 0 \ \texttt{ET}\ \ y = 0\} = \{(0, 0)\}}$$

- Déterminons maintenant $\mathrm{Im}(f)$. Notons $E_1 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1)$ et $E_2 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_2)$.

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2)\right)$$

Or :

× $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1)) = A\ E_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
Ainsi : $f(e_1) = \sqrt{2}\ e_1 + \sqrt{2}\ e_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

× $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_2)) = A\ E_2 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$
Ainsi : $f(e_2) = \sqrt{2}\ e_1 - \sqrt{2}\ e_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2)\right) = \mathrm{Vect}\left((\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\right) = \mathrm{Vect}\left((1, 1), (1, -1)\right)}$$

Ici aussi, on pouvait procéder plus rapidement.

- Par ailleurs les égalités :
  × $f(e_1) = \sqrt{2}\ e_1 + \sqrt{2}\ e_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$
  × $f(e_2) = \sqrt{2}\ e_1 + \sqrt{2}\ e_2 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

  peuvent être obtenues par simple lecture de la matrice A.
  En effet, par définition, cette matrice est la concaténation de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1))$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_2))$. □

2. On note $F = \text{Ker}\,(f - 2\,\text{id})$ et $G = \text{Im}\,(f - 2\,\text{id})$.

a) Montrer que G est engendré par le vecteur u.
En déduire la dimension de F et donner une base de F. On notera v le vecteur de cette base.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$A - 2\ I = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 \end{pmatrix}$$
Ainsi :
  × $(f - 2\text{id})(e_1) = (\sqrt{2} - 2)\ e_1 + \sqrt{2}\ e_2 = (\sqrt{2} - 2, \sqrt{2}) = u$
  × $(f - 2\text{id})(e_2) = \sqrt{2}\ e_1 - (\sqrt{2} + 2)\ e_2 = (\sqrt{2}, -(\sqrt{2} + 2)) = z$
- Ces deux vecteurs sont colinéaires.
Plus précisément : $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}\ u = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}\ (\sqrt{2} - 2, \sqrt{2}) = (\sqrt{2}, -(\sqrt{2} + 2)) = z$.
En effet :
$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}\ (\sqrt{2} - 2) = \sqrt{2}$$
$$\text{et}\quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}\ \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}-2} = \frac{2\ (\sqrt{2}+2)}{(\sqrt{2}-2)\ (\sqrt{2}+2)} = \frac{2\ (\sqrt{2}+2)}{2-4} = -(\sqrt{2}+2)$$
$$\boxed{\text{Im}(f - 2\text{id}) = \text{Vect}\,(f(e_1), f(e_2)) = \text{Vect}\left(u, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}\ u\right) = \text{Vect}\,(u)}$$
- La famille (u) est :
  × génératrice de $\text{Im}(f - 2\text{id})$,
  × libre car constituée d'un vecteur non nul.
C'est donc une base de $\text{Im}(f - 2\text{id})$.
$$\boxed{\dim(\text{Im}(f - 2\text{id})) = 1}$$
- Par le théorème du rang :
$$\underset{\underset{2}{\shortparallel}}{\dim(\mathbb{R}^2)} = \dim(\text{Ker}(f - 2\text{id})) + \underset{\underset{1}{\shortparallel}}{\dim(\text{Im}(f - 2\text{id}))}$$
$$\boxed{\dim(\text{Ker}(f - 2\text{id})) = 1}$$

- Soit $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note $W = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w)$.

$$\begin{array}{cl} & w \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}) \\ \Longleftrightarrow & (f-2\mathrm{id})(w) = 0 \\ \Longleftrightarrow & (A - 2I)\ W = 0 \\ \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} (\sqrt{2}-2)\ x & + & \sqrt{2}\ y & = & 0 \\ \sqrt{2}\ x & - & (\sqrt{2}+2)\ y & = & 0 \end{array} \right. \\ \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\ x & + & (2\ \sqrt{2}+2)\ y & = & 0 \\ \sqrt{2}\ x & - & (\sqrt{2}+2)\ y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \textit{(pour se débarrasser d'un } \sqrt{2}\textit{)} \\ \underset{L_2 \leftarrow \sqrt{2}\ L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\ x & + & (2\ \sqrt{2}+2)\ y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ \Longleftrightarrow & \left\{ \ x = (\sqrt{2}+1)\ y \right. \end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}) & = & \{(x, y) \mid x = (\sqrt{2}+1)\ y\} \\ & = & \{((\sqrt{2}+1)\ y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot (\sqrt{2}+1, 1) \mid y \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left((\sqrt{2}+1, 1)\right) = \mathrm{Vect}\left((\sqrt{2}+2, \sqrt{2})\right)}$$

Dans la suite, on note $v = (\sqrt{2}+2, \sqrt{2})$. □

b) Montrer que $G = \mathrm{Ker}(f + 2\,\mathrm{id})$.

Démonstration.

- Soit $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note $W = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w)$.

$$\begin{array}{rcl} w \in \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{id}) & \Longleftrightarrow & (f+2\mathrm{id})(w) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (A + 2I)\ W = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} (\sqrt{2}+2)\ x & + & \sqrt{2}\ y & = & 0 \\ \sqrt{2}\ x & + & (-\sqrt{2}+2)\ y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\ x & + & (2\ \sqrt{2}-2)\ y & = & 0 \\ \sqrt{2}\ x & + & (-\sqrt{2}+2)\ y & = & 0 \end{array} \right. \\ & & \textit{(pour se débarrasser d'un } \sqrt{2}\textit{)} \\ & \underset{L_2 \leftarrow \sqrt{2}\ L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2\ x & + & (2\ \sqrt{2}-2)\ y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \ x = (1-\sqrt{2})\ y \right. \end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(f+2\mathrm{id}) & = & \{(x,y) \mid x = (1-\sqrt{2})\ y\} \\ & = & \{((1-\sqrt{2})\ y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot (1-\sqrt{2}, 1) \mid y \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\left((1-\sqrt{2},1)\right) = \mathrm{Vect}\left((\sqrt{2}-2,\sqrt{2})\right) = \mathrm{Vect}\,(u)}$$

Remarque
On pouvait raisonner autrement.

- Dans un premier temps, on démontre que $G = \mathrm{Vect}\,(u) \subset \mathrm{Ker}(f+2\ \mathrm{id})$.
  Pour ce faire, il suffit de démontrer que : $u \in \mathrm{Ker}(f+2\ \mathrm{id})(u)$. Or :

$$\begin{array}{rcl} u \in \mathrm{Ker}(f+2\ \mathrm{id})(u) & \Leftrightarrow & (f+2\ \mathrm{id})(u) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (A+2\ I)\ U = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

  Cette dernière égalité est bien vérifiée car :
  × $(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2) + \sqrt{2}\ \sqrt{2} = 2-4+2 = 0$
  × $\sqrt{2}\ (\sqrt{2}-2) + (-\sqrt{2}+2)\ \sqrt{2} = 2 - 2\ \sqrt{2} - 2 + 2\ \sqrt{2} = 0$
  On en déduit que : $u \in \mathrm{Ker}(f+2\mathrm{id})$ et donc que : $G = \mathrm{Vect}\,(u) \subset \mathrm{Ker}(f+2\mathrm{id})$.
- Pour conclure sur l'égalité de ces deux espaces vectoriels, il suffit de démontrer qu'ils sont de même dimension.

  Supposons par l'absurde que $\dim(\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{id})) = 2$.
  Comme $\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{id}) \subset \mathbb{R}^2$, on en conclut que : $\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{id}) = \mathbb{R}^2$.
  Ainsi : $\forall w \in \mathbb{R}^2,\ (f+2\mathrm{id})(w) = 0$. Autrement dit : $f+2\ \mathrm{id} = 0$ ou encore $f = -2\ \mathrm{id}$.
  Ceci est impossible car $A \neq -2\ I$.
  Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{id})) = 1$.
  (on note que $\dim(\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{id})) = 0$ est exclu puisque $\mathrm{Ker}(f+2\mathrm{id}) \supset \mathrm{Vect}\,(u)$).
- On retiendra en particulier (c'est une propriété importante !) que si $g \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension n :

$$\begin{array}{rcl} \dim(\mathrm{Ker}(g)) = n & \Leftrightarrow & \mathrm{Ker}(g) = E \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in E,\ g(x) = 0 \\ & \Leftrightarrow & g = 0_{\mathscr{L}(E)} \end{array}$$

□

3. a) Justifier que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.

- On a vu dans la question précédente que $\mathrm{Ker}(f+2\ \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\,(u)$ avec $u \neq 0$.
  On en déduit que u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -2.
- De même, d'après la question ***2.a)***, v est un vecteur propre associé à la valeur propre 2.
- Les vecteurs u et v sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. On en déduit que la famille $\mathcal{F} = (u,v)$ est libre.
  Or : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } (u,v) \text{ est une base de } \mathbb{R}^2.}$$

Remarque

- Il faut savoir lire les questions de l'énoncé. Il est ici demander de « Justifier » que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$. On introduit donc une nuance par rapport à question classique qui commencerait par « Démontrer ». Lorsque le terme « justifier » apparaît dans une question c'est :
  - × soit que l'on s'attend à une justification en français d'une propriété mathématique (*Justifier que les v.a.r. sont indépendantes*),
  - × soit que l'on s'attend à ce que le candidat cite un théorème permettant de ne pas avoir à mener une démonstration plus lourde. C'est le cas ici.
- Évidemment, il était aussi possible de démontrer que la famille (u, v) était libre en repassant à la définition. Mais, comme expliqué dans cette remarque, ce n'est pas l'esprit de l'énoncé. □

b) Montrer que f est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

Démonstration.

- D'après ce qui précède, l'endomorphisme f possède deux valeurs propres distinctes (-2 et 2). Or $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$. On en déduit que f est diagonalisable.
- Par ailleurs, la famille $\mathscr{B}' = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est alors :

$$\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}}$$

  car :
  - × $u = (\sqrt{2}-2, \sqrt{2}) = (\sqrt{2}-2)\ e_1 + \sqrt{2}\ e_2$,
  - × $v = (\sqrt{2}+2, \sqrt{2}) = (\sqrt{2}+2)\ e_1 + \sqrt{2}\ e_2$.

Remarque

Dans la base $\mathscr{B}' = (u, v)$, la matrice représentative de f est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ce qui n'est qu'une réécriture différente du fait que : $f(u) = -2\ u$ et $f(v) = 2\ v$.

□

B. Étude du cas général

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2, et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation $(*)$.

4. a) Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f.

Démonstration.

L'endomorphisme f vérifiant $(*)$, on en déduit que :

$$f \circ \left(\frac{1}{4}\ f\right) = \left(\frac{1}{4}\ f\right) \circ f = \mathrm{id}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est une application bijective et } f^{-1} = \frac{1}{4}\ f.}$$

□

b) Déterminer les valeurs propres possibles de f.

Démonstration.

- D'après la relation $(*)$: $f^2 - 4\ \text{id} = 0$.
  On en déduit que $P(X) = X^2 - 4 = (X-2)(X+2)$ est un polynôme annulateur de f.
- Ainsi : $\text{Sp}(f) \subset \{\text{racines de } P\ \} = \{-2, 2\}$.

$$\boxed{\text{Les réels } -2 \text{ et } 2 \text{ sont les deux seuls valeurs propres possibles de l'endomorphisme } f.}$$

Remarque
On parle de valeurs propres **possibles**.
C'est une autre manière de dire « Exhiber un polynôme annulateur de f ». □

c) Vérifier que $2\,\text{id}$ et $-2\,\text{id}$ satisfont l'équation $(*)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$(2\ \text{id}) \circ (2\ \text{id}) = 4\ \text{id}^2 = 4\ \text{id}$$
- Ensuite :
$$(-2\ \text{id}) \circ (-2\ \text{id}) = 4\ \text{id}^2 = 4\ \text{id}$$

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } -2\ \text{id et } 2\ \text{id satisfont } (*).}$$
□

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2\,\text{id}$ et $f \neq -2\,\text{id}$ et on note $F = \text{Ker}(f - 2\ \text{id})$ et $G = \text{Im}(f - 2\ \text{id})$.

5. Soit x un élément de E. Montrer que $(f(x) - 2x) \in \text{Ker}(f + 2\ \text{id})$ et que $(f(x) + 2x) \in F$.
En déduire que $G \subset \text{Ker}\,(f + 2\,\text{id})$ et que $\text{Im}\,(f + 2\,\text{id}) \subset F$.
Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f.

Démonstration.

- Démontrons que $(f(x) - 2x) \in \text{Ker}(f + 2\ \text{id})$.

$$\begin{array}{rcll}
(f + 2\ \text{id})(f(x) - 2x) & = & f(f(x) - 2x) + 2\ \text{id}(f(x) - 2x) & \\
 & = & (f \circ f)(x) - 2\ \cancel{f(x)} + 2\ (\cancel{f(x)} - 2x) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\
 & = & (4\ \text{id})(x) - 4x & \textit{(car } f \circ f = 4\ \text{id}\textit{)} \\
 & = & 4x - 4x = 0 &
\end{array}$$

$$\boxed{(f(x) - 2x) \in \text{Ker}(f + 2\ \text{id})}$$

- Démontrons que $(f(x) + 2x) \in \text{Ker}(f - 2\ \text{id})$.

$$\begin{array}{rcll}
(f - 2\ \text{id})(f(x) + 2x) & = & f(f(x) + 2x) - 2\ \text{id}(f(x) + 2x) & \\
 & = & (f \circ f)(x) + 2\ \cancel{f(x)} - 2\ (\cancel{f(x)} + 2x) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\
 & = & (4\ \text{id})(x) - 4x & \textit{(car } f \circ f = 4\ \text{id}\textit{)} \\
 & = & 4x - 4x = 0 &
\end{array}$$

$$\boxed{(f(x) + 2x) \in \text{Ker}(f - 2\ \text{id})}$$

- Démontrons maintenant que $G = \mathrm{Im}(f - 2\ \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id})$.

  Soit $y \in \mathrm{Im}(f - 2\ \mathrm{id})$. Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = (f - 2\ \mathrm{id})(x) = f(x) - 2x$.
  D'après ce qui précède, $y \in \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id})$.

  $$\boxed{G \subset \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id})}$$

- De même, on démontre que $\mathrm{Im}(f + 2\ \mathrm{id}) \subset F = \mathrm{Ker}(f - 2\ \mathrm{id})$.

  Soit $y \in \mathrm{Im}(f + 2\ \mathrm{id})$. Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = (f + 2\ \mathrm{id})(x) = f(x) + 2x$.
  D'après ce qui précède, $y \in \mathrm{Ker}(f - 2\ \mathrm{id})$.

  $$\boxed{\mathrm{Im}(f + 2\ \mathrm{id}) \subset F}$$

- Pour démontrer que -2 est valeur propre de f, il suffit de démontrer qu'il existe $y \neq 0$ tel que $y \in \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id})$ *(y est un vecteur propre associé à la valeur propre -2).*

  Supposons par l'absurde que : $\mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id}) = \{0\}$.
  D'après ce qui précède : $\mathrm{Im}(f - 2\ \mathrm{id}) \subset \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id}) = \{0\}$. On en déduit que $\mathrm{Im}(f - 2\ \mathrm{id}) = \{0\}$.
  Or, par le théorème du rang :

  $$\begin{array}{ccccc} \dim(\mathbb{R}^n) & = & \dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})) & + & \dim(\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{id})) \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ n & & & & 0 \end{array}$$

  Ainsi : $\dim(\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})) = n$. Comme $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, on en conclut que : $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}) = \mathbb{R}^n$.
  Ceci démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (f - 2\mathrm{id})(x) = 0$ ou encore que : $f - 2\mathrm{id} = 0$, soit : $f = 2\ \mathrm{id}$.
  Impossible car, par hypothèse de l'énoncé, $f \neq 2\ \mathrm{id}$.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id}) \neq \{0\}. \text{ Ce qui démontre que } -2 \text{ est valeur propre de } f.}$$

- On démontre alors que 2 est valeur propre de f.
  Pour ce faire, en procédant par l'absurde, on démontre que :

  $$\mathrm{Ker}(f - 2\ \mathrm{id}) \neq \{0\}$$

  (sinon on aurait $f = -2\ \mathrm{id}$).

  $$\boxed{\text{Ainsi, 2 est valeur propre de } f.}$$

$\square$

6. Soit x un vecteur de $\mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id})$.

a) Exprimer $(f - 2\ \mathrm{id})(x)$ en fonction de x uniquement.
En déduire que x appartient à G, puis que $G = \mathrm{Ker}\,(f + 2\,\mathrm{id})$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $(f - 2\ \mathrm{id})(x) = f(x) - 2\ \mathrm{id}(x) = f(x) - 2x$.
- Or, comme $x \in \mathrm{Ker}(f + 2\ \mathrm{id})$ alors : $(f + 2\ \mathrm{id})(x) = 0$. On en déduit que :

  $$f(x) + 2x = 0 \quad \text{ou encore} \quad f(x) = -2x$$

  $$\boxed{\text{On en déduit que : } (f - 2\ \mathrm{id})(x) = f(x) - 2x = -2x - 2x = -4x.}$$

- On en déduit que :
$$x = -\frac{1}{4}\ (f - 2\ \text{id})(x) = (f - 2\ \text{id}) \left(-\frac{1}{4}\ x\right)$$
la dernière égalité étant obtenue par linéarité de l'application $f - 2$ id.
$$\boxed{\text{Ainsi, } x \in \text{Im}(f - 2\ \text{id}).}$$

- On vient de démontrer que tout x élément de $\text{Ker}(f + 2\ \text{id})$ est élément de $\text{Im}(f - 2\ \text{id})$.
Autrement dit : $\text{Ker}(f + 2\ \text{id}) \subset \text{Im}(f - 2\ \text{id})$.
Or, d'après la question ***5.***, $\text{Im}(f - 2\ \text{id}) \subset \text{Ker}(f + 2\ \text{id})$.
$$\boxed{\text{Im}(f - 2\ \text{id}) = \text{Ker}(f + 2\ \text{id})}$$

□

b) Montrer que f est diagonalisable.

Démonstration.

- D'après le théorème du rang :
$$\dim(\mathbb{R}^n) \quad = \quad \dim(\text{Ker}(f - 2\text{id})) \quad + \quad \underset{\dim(\text{Ker}(f+2\text{id}))}{\overset{\dim(\text{Im}(f - 2\text{id}))}{\shortparallel}}$$
car $\text{Im}(f - 2\text{id}) = \text{Ker}(f + 2\text{id})$ d'après la question précédente.
- D'après la question ***5.***, on sait que -2 et 2 sont valeurs propres de f. Ce sont les seules valeurs propres d'après la question ***4.b)***. On vient de démontrer que :
$$\dim(E_2(f)) + \dim(E_{-2}(f)) = \dim(\mathbb{R}^n)$$
$$\boxed{\text{Ceci démontre que } f \text{ est diagonalisable.}}$$

□

Exercice 5 : EML 2015

Soit E un espace vectoriel de dimension 3. On note 0_E le vecteur nul de E.
On note i l'application identité de E, et θ l'application constante nulle de E dans E :

$$i : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & 0_E \end{array} \right.$$

On considère un endomorphisme f de E tel que :

$$f \neq \theta, \quad f^2 + i \neq \theta, \quad f \circ (f^2 + i) = \theta$$

où f^2 désigne $f \circ f$.

1. a) Montrer que f n'est pas bijectif.

Démonstration.
Supposons par l'absurde que l'endomorphisme f est bijectif.
Alors l'endomorphisme f admet une bijection réciproque $f^{-1} : E \to E$. Or, d'après l'énoncé :

$$f \circ (f^2 + i) = \theta$$

On en déduit, en composant de part et d'autre à gauche par f^{-1} :

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1} \circ \big(f \circ (f^2 + i)\big) & = & f^{-1} \circ \theta & = & \theta \\ \shortparallel & & & & \\ (f^{-1} \circ f) \circ (f^2 + i) & = & i \circ (f^2 + i) = f^2 + i & & \end{array}$$

Ce qui est absurde, puisque d'après l'énoncé : $f^2 + i \neq \theta$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ n'est pas bijectif.}}$$

Remarque
On peut aussi raisonner de manière directe. Comme :

$$f \circ (f^2 + i) = \theta$$

alors, pour tout $x \in E$: $\big(f \circ (f^2 + i)\big)(x) = f\big((f^2 + i)(x)\big) = 0_E$.
Autrement dit : $\forall x \in E$, $(f^2 + i)(x) \in \text{Ker}(f)$.
Or, d'après l'énoncé : $f^2 + i \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Ainsi, il existe $x \in E$ tel que : $(f^2 + i)(x) \neq 0_E$.
On en déduit :

$$\text{Ker}(f) \supset \{0_E, (f^2 + i)(x)\} \neq \{0_E\}$$

Ainsi, f n'est pas injective. Elle n'est donc pas bijective. □

b) En déduire que 0 est valeur propre de f, puis montrer qu'il existe u appartenant à E tel que : $u \neq 0_E$ et $f(u) = 0_E$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, f n'est pas bijectif, c'est-à-dire $f - 0 \cdot i$ n'est pas bijectif. Comme E est de dimension finie, ceci équivaut à f non injectif.

$$\boxed{\text{Donc } 0 \text{ est valeur propre de } f.}$$

- 0 est valeur propre de f, donc : $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f - 0 \cdot i) \neq \{0_E\}$.
  Il existe donc $u \neq 0_E$ tel que $u \in \text{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{Autrement dit, il existe } u \in E \text{ tel que : } u \neq 0_E \text{ et } f(u) = 0_E.}$$ □

Soit v_1 appartenant à E tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.

2. Montrer : $\text{Sp}(f) = \{0\}$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $f \circ (f^2 + i) = \theta$.
  On en déduit que le polynôme $Q(X) = X(X^2+1)$ est un polynôme annulateur de f.
  De plus l'unique racine de Q est 0 (le polynôme X^2+1 n'admet pas de racine réelle).

  $$\boxed{\text{D'où : } \text{Sp}(f) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0\}.}$$

- De plus, d'après la question ***1.b)***, $0 \in \text{Sp}(f)$.

  $$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Sp}(f) = \{0\}.}$$

□

3. Est-ce que f est diagonalisable ?

Démonstration.
D'après l'énoncé, E est un espace vectoriel de dimension 3. On note $\mathscr{B}$ l'une de ses bases.

Supposons par l'absurde que f est diagonalisable.
Il existe alors une base $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ constituée de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice représentative de f est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ & & P & D & P^{-1} \end{array}$$

Ainsi :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P \ 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \ P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\theta)$$

L'application $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$ étant bijective, on en déduit : $f = \theta$.
Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Remarque

- Il était possible de rédiger différemment en prenant le parti de diagonaliser la matrice représentative de f. Détaillons cette rédaction.
- On commence par noter $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ la matrice représentative de f dans une base $\mathscr{B}$ de E.
  Supposons par l'abusrde que f est diagonalisable. Alors M est diagonalisable.
  Il existe alors une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :

  $$M = PDP^{-1}$$

  où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M.
  Or $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(f) = \{0\}$. Donc : $D = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.
  Et ainsi :

  $$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P \ 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \ P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\theta)$$

  Et on peut donc conclure comme ci-dessus.
- Cette question est un grand classique des sujets.
  Il faut donc savoir la traiter correctement, en adoptant l'un ou l'autre des rédactions ci-dessus. □

4. Montrer que f^2+i n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe v appartenant à E tel que : $v \neq 0_E$ et $f^2(v) = -v$.

Démonstration.

- Supposons par l'absurde que l'endomorphisme f^2+i est bijectif.
  Alors l'endomorphisme $g = f^2+i$ admet une bijection réciproque $g^{-1} : E \to E$. Or, d'après l'énoncé :
  $$f \circ (f^2+i) = \theta$$
  On en déduit, en composant de part et d'autre à droite par g :
  $$\begin{array}{ccccc} \big(f \circ (f^2+i)\big) \circ g^{-1} & = & \theta \circ g^{-1} & = & \theta \\ \shortparallel & & & & \\ \big(f \circ (f^2+i)\big) \circ g^{-1} & = & f \circ \big((f^2+i) \circ g^{-1}\big) = f \circ i = f & & \end{array}$$
  Ce qui est absurde, puisque d'après l'énoncé : $f \neq \theta$.
  $$\boxed{\text{On en déduit que } f^2+i \text{ n'est pas bijectif.}}$$
- L'endomorphisme f^2+i n'est pas bijectif. Donc : $\mathrm{Ker}(f^2+i) \neq \{0_E\}$.
  Il existe donc $v \neq 0_E$ tel que $v \in \mathrm{Ker}(f^2+i)$. Or :
  $$v \in \mathrm{Ker}(f^2+i) \ \Leftrightarrow \ (f^2+i)(v) = 0_E \ \Leftrightarrow \ f^2(v)+v = 0_E \ \Leftrightarrow \ f^2(v) = -v$$
  $$\boxed{\text{Ainsi, il existe } v \in E \text{ tel que : } v \neq 0_E \text{ et } f^2(v) = -v.}$$

□

Soit v_2 appartenant à E tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.

5. Montrer : $f(v_3) = -v_2$.

Démonstration.
On calcule :
$$f(v_3) = f(f(v_2)) = f^2(v_2) = -v_2$$
$$\boxed{\text{On a bien : } f(v_3) = -v_2.}$$

□

6. a) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E.

Démonstration.

- Montrons que la famille $\mathscr{B}$ est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :
  $$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \lambda_3 \cdot v_3 = 0_E$$
  - On applique f de part et d'autre. On obtient, par linéarité de f :
    $$\lambda_1 \cdot f(v_1) + \lambda_2 \cdot f(v_2) + \lambda_3 \cdot f(v_3) = f(0_E) = 0_E$$
    Or, on a les relations suivantes :
    $$f(v_1) = 0_E, \quad f(v_2) = v_3 \quad \text{et} \quad f(v_3) = -v_2$$
    On obtient alors :
    $$\lambda_2 \cdot v_3 - \lambda_3 \cdot v_2 = 0_E \quad (L_1)$$

- On applique de nouveau f de part et d'autre. On obtient alors :

$$\lambda_2 \cdot f(v_3) - \lambda_3 \cdot f(v_2) = f(0_E) = 0_E$$

Ainsi, par les mêmes relations que précédemment :

$$-\lambda_2 \cdot v_2 - \lambda_3 \cdot v_3 = 0_E \quad (L_2)$$

- Par combinaison linéaire des égalités précédentes ($\lambda_3 \, L_1 + \lambda_2 \, L_2$), on obtient :

$$-\lambda_3^2 \cdot v_2 - \lambda_2^2 \cdot v_2 = 0_E$$

Autrement dit : $(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \cdot v_2 = 0_E$.
Or : $v_2 \neq 0_E$. Donc : $\lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0_{\mathbb{R}}$. D'où : $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$.
- L'équation initiale devient alors :

$$\lambda_1 \cdot v_1 = 0_E$$

Or : $v_1 \neq 0_E$. Donc : $\lambda_1 = 0_{\mathbb{R}}$.

Finalement : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathscr{B} \text{ est donc libre.}}$$

- De plus : $\text{Card}(\mathscr{B}) = \text{Card}((v_1, v_2, v_3)) = 3 = \dim(E)$.

$$\boxed{\text{Donc } \mathscr{B} \text{ est une base de } E.}$$

□

b) Déterminer la matrice C de f dans la base $\mathscr{B}$.

Démonstration.

- On a : $f(v_1) = 0_E = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$.

  On en déduit que : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- On a : $f(v_2) = v_3 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3$.

  On en déduit que : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- On a : $f(v_3) = -v_2 = 0 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$.

  On en déduit que : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(v_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } C = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

et le sous-espace vectoriel F de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (A, B, C), c'est-à-dire :

$$F = \{a\,A + b\,B + c\,C \ / \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$$

7. Déterminer la dimension de F.

Démonstration.

- Montrons que (A, B, C) est une famille libre de F.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :
$$\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B + \lambda_3 \cdot C = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$
  Ceci équivaut à :
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -\lambda_3 \\ 0 & \lambda_3 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  Par identification, on en déduit : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
$$\boxed{\text{La famille } (A, B, C) \text{ est libre.}}$$
- De plus, par définition de F, la famille (A, B, C) engendre F.
$$\boxed{\text{Ainsi, } (A, B, C) \text{ est une base de } F.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(F) = \text{Card}((A, B, C)) = 3.}$$ □

8. Montrer : $\{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ CM = MC\} = F$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Alors il existe $(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}) \in \mathbb{R}^9$ tels que :
$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$
On calcule :
$$CM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & -a_{3,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}$$
et :
$$MC = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,3} & -a_{1,2} \\ 0 & a_{2,3} & -a_{2,2} \\ 0 & a_{3,3} & -a_{3,2} \end{pmatrix}$$
On obtient alors les équivalences suivantes :
$$\begin{array}{rcl} CM = MC & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a_{3,1} & -a_{3,2} & -a_{3,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,3} & -a_{1,2} \\ 0 & a_{2,3} & -a_{2,2} \\ 0 & a_{3,3} & -a_{3,2} \end{pmatrix} \\[2ex] & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,3} & = & 0 \\ -a_{1,2} & = & 0 \\ -a_{3,1} & = & 0 \\ -a_{3,2} & = & a_{2,3} \\ -a_{3,3} & = & -a_{2,2} \\ a_{2,1} & = & 0 \\ a_{2,2} & = & a_{3,3} \\ a_{2,3} & = & -a_{3,2} \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & -a_{3,2} \\ 0 & a_{3,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \\[2ex] & \Leftrightarrow & M = a_{1,1}\, A + a_{2,2}\, B + a_{3,2}\, C \\ & \Leftrightarrow & M \in F \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \ / \ CM = MC\} = F}$$ □

9. a) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(a\,A + b\,B + c\,C)^2$.

Démonstration.
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$(a\,A+b\,B+c\,C)^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2-c^2 & -2bc \\ 0 & 2bc & b^2-c^2 \end{pmatrix} = a^2\,A+(b^2-c^2)\,B+2bc\,C$$

$$\boxed{(a\,A + b\,B + c\,C)^2 = a^2\,A + (b^2 - c^2)\,B + 2bc\,C}$$ □

b) En déduire une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- On remarque que :
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix} = 4\,A + 5\,B + 12\,C$$
- D'après la question ***9.a)***, si on trouve $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :
$$4\,A + 5\,B + 12\,C = a^2\,A + (b^2 - c^2)\,B + 2bc\,C$$
alors, en posant $M = a\,A + b\,B + c\,C$, on a :
$$M^2 = a^2\,A + (b^2 - c^2)\,B + 2bc\,C = 4\,A + 5\,B + 12\,C = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$
- Cherchons donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :
$$a^2\,A + (b^2 - c^2)\,B + 2bc\,C = 4\,A + 5\,B + 12\,C$$
On obtient le système d'équations suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 & = & 4 \\ b^2-c^2 & = & 5 \\ 2bc & = & 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b^2-c^2 & = & 5 \\ bc & = & 6 \end{array}\right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ b^2-c^2 & = & 5 \\ bc & = & 6 \end{array}\right.$$
Remarquons alors que $b = 0$ ne peut convenir (si $b = 0$ alors $bc = 0 \neq 6$). On suppose donc : $b \neq 0$. L'égalité $bc = 6$ permet d'écrire : $c = \dfrac{6}{b}$.
En réinjectant dans la deuxième ligne, on obtient :
$$\begin{array}{rcl} b^2 - c^2 = 5 \;\Leftrightarrow\; b^2 - \frac{36}{b^2} = 5 \;\Leftrightarrow\; b^4 - 36 = 5\,b^2 & \Leftrightarrow & b^4 - 5b^2 - 36 = 0 \\ & \Leftrightarrow & (b^2+4)\,(b^2-9) \;=\; 0 \\ & \Leftrightarrow & b^2 = -4 \;\texttt{OU}\; b^2 = 9 \\ & \Leftrightarrow & b^2 = 9 \\ & \Leftrightarrow & b = -3 \;\texttt{OU}\; b = 3 \end{array}$$
On obtient alors : $c^2 = b^2 - 5 = 9 - 5 = 4$. Ainsi : $c = -2$ OU $c = 2$.
Le triplet (a, b, c) suivant convient : $\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 2 \\ b & = & 3 \\ c & = & 2 \end{array}\right.$.

- On a alors :

$$\begin{array}{rcll} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix} & = & 2^2\, A + (3^2 - 2^2)\, B + 2 \times 3 \times 2\, C & \\ & = & (2\, A + 3\, B + 2\, C)^2 & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{9.a)}}\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Donc, en posant } M = 2\, A + 3\, B + 2\, C \text{, on obtient : } M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}.}$$

□

10. On note $g = f^2 - i$.
Montrer que g est bijectif et exprimer g^{-1} à l'aide de f et de i.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2 - i) & \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^2) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(i) & \textit{(par linéarité de } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)\textit{)} \\ & = & (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))^2 - I_3 & \\ & = & C^2 - I_3 & \\ & = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \\ & = & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} & \end{array}$$

La matrice représentative de g dans la base $\mathscr{B}$ est une matrice diagonale à coefficients tous non nuls. Elle est donc inversible.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } g \text{ est bijectif.}}$$

- Par propriété de l'application $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g^{-1}) & = & (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g))^{-1} \\ & = & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ & = & -I_3 - \dfrac{1}{2}\, C^2 \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(-i - \dfrac{1}{2}\, f^2\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ étant bijective, on en déduit : } g^{-1} = -i - \frac{1}{2}\, f^2.}$$

□

Exercice 6 : HEC 2015

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit v un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dans la base $\mathscr{B}$ et qui vérifie $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$.

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, associe le vecteur $f(x)$ défini par : $f(x) = x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v$.

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration.

- Montrons que f est une application linéaire.
  Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Alors il existe $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que :

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \text{et} \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

  Par définition de f :

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot x + \mu \cdot y) &= (\lambda \cdot x + \mu \cdot y) - \left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda\, x_i + \mu\, y_i)\right) \cdot v \\ &= \lambda \cdot x + \mu \cdot y - \left(\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i + \mu \sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot v \\ &= \lambda \cdot x + \mu \cdot y - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v - \mu \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot v \\ &= \lambda \cdot \left(x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v\right) + \mu \cdot \left(y - \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) \cdot v\right) \\ &= \lambda \cdot f(x) + \mu \cdot f(y) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est linéaire.}}$$

- Montrons que $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n$, *i.e.* : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) \in \mathbb{R}^n$.
  Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors : $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \in \mathbb{R}$.
  On rappelle que : $f(x) = x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v$.
  Ainsi, $f(x)$ appraît comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, x et v.
  Comme $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel, on a bien : $f(x) \in \mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}^n.}$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^n.}$$

□

b) Montrer que $f \circ f = f$.

Démonstration.
Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{array}{rcll} (f \circ f)(x) & = & f(f(x)) \ = \ f\left(x - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot v\right) & \\ & = & f(x) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot f(v) & \textit{(par linéarité de } f\textit{)} \\ & = & f(x) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot \left(v - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} v_i\right) \cdot v\right) & \\ & = & f(x) - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot (v - v) & \textit{(car } \sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1\textit{)} \\ & = & f(x) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } f \circ f = f.}$$

Remarque
Si E est un espace vectoriel, un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ qui vérifie $f \circ f = f$ est appelé projecteur de E. Dans cet exercice, on va étudier quelques propriétés classiques (mais hors programme) des projecteurs. □

2. Déterminer le spectre de f.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $f \circ f - f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)}$.
  Donc $Q(X) = X^2 - X = X(X-1)$ est un polynôme annulateur de f.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}(f) \subset \{\text{racines de } Q\} = \{0, 1\}.}$$

- On remarque alors :

$$f(v) = v - \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right) \cdot v = v - 1 \cdot v = 0$$

  Or $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ car $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$. Donc : $\left\{\begin{array}{l} v \neq 0_{\mathbb{R}^n} \\ f(v) = 0_{\mathbb{R}^n} \end{array}\right.$.
  On en déduit que v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre 0.

$$\boxed{\text{Ainsi, 0 est valeur propre de } f.}$$

- D'après ce qui précède, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f\big(f(x)\big) = f(x) = 1 \cdot f(x)$.
  Ainsi, tout vecteur $f(x)$ **non nul** est vecteur propre associé à la valeur propre 1.
  Un tel élément existe forcément. Pour le démontrer, remarquons tout d'abord que comme l'endomorphisme f n'est pas l'application nulle alors : $\mathrm{Im}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
  Ainsi il existe $u \in \mathrm{Im}(f)$ tel que $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. Et d'après ce qui précède : $f(u) = 1 \cdot u$.
  (on peut de nouveau le détailler. Comme : $u \in \mathrm{Im}(f)$, *il existe* $x \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $u = f(x)$ *et* $f(u) = f(f(x)) = (f \circ f)(x) = f(x) = u$*)*

$$\boxed{\text{Ainsi, 1 est valeur propre de } f.}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathrm{Sp}(f) = \{0, 1\}.}$$

Remarque

- L'application f est définie à l'aide du vecteur v. Penser à déterminer $f(v)$, dès la lecture de cette définition, est un bon réflexe. Il faut alors penser à utiliser ce calcul au bon moment : pour démontrer 0 est bien une valeur propre de f puisque v en est un vecteur propre.
- Il est plus difficile de trouver un vecteur propre associé à la valeur propre 1.
On se sert pour cette question du résultat suivant :
$$\forall u \in \mathrm{Im}(f), \; f(u) = u$$
Cette relation est vraie pour tout projecteur f et se démontre grâce à la relation : $f \circ f = f$ (c'est ce qui a été fait dans le corrigé de cette question et dans la suivante).
- Il est important de penser à la notion de polynôme annulateur dès que l'énoncé met en jeu des puissances de matrices ou des itérées d'applications linéaires.
Ce réflexe permet de démontrer l'étape :
$$\mathrm{Sp}(f) \subset \{0, 1\}$$
S'il est évidemment préférable d'écrire toutes les étapes de démonstration d'une question, chacune d'entre elles rapporte des points. Il est donc vivement conseillé d'écrire la première étape de démonstration quitte à admettre celles qui suivent. □

3. a) Montrer que le vecteur y appartient à l'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, si et seulement si $f(y) = y$.

Démonstration.
Soit $y \in \mathbb{R}^n$.

($\Rightarrow$) Supposons que $y \in \mathrm{Im}(f)$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que : $y = f(x)$.
On obtient alors :
$$f(y) = f(f(x)) = (f \circ f)(x) = f(x) = y$$

($\Leftarrow$) Supposons que : $f(y) = y$.
Alors, en posant : $x = y$, on exhibe bien $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$.
Donc $y \in \mathrm{Im}(f)$.

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}^n, \; (y \in \mathrm{Im}(f)) \Leftrightarrow (f(y) = y)}$$

Remarque
Cette démonstration n'utilise pas la définition de f mais seulement la propriété : $f \circ f = f$.
C'est donc un résultat général sur les projecteurs que l'on montre ici. □

b) Montrer que la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est inférieure ou égale à $n - 1$.

Démonstration.

- D'après la question ***2.***, 0 est valeur propre de f. Donc : $\mathrm{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
On en déduit : $\dim(\mathrm{Ker}(f)) \geqslant 1$.
- Ainsi, d'après le théorème du rang :
$$\underset{n}{\underset{\shortparallel}{\dim(\mathbb{R}^n)}} = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) \geqslant 1 + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

$$\boxed{\text{Comme } n \geqslant 1 + \dim(\mathrm{Im}(f)), \text{ on a bien : } \dim(\mathrm{Im}(f)) \leqslant n - 1.}$$
□

c) Montrer que pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, on a : $(e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$.

- Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, notons : $e_j = (e_j^1, e_j^2, \ldots, e_j^n)$. Alors, par définition de e_j :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ e_j^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  Ainsi : $\sum_{k=1}^{n} e_j^k = 1$.
- On calcule alors :

$$f(e_i) = e_i - 1 \cdot v = e_i - v$$

  De même : $f(e_{i+1}) = e_{i+1} - v$.
  On en déduit, par linéarité de f :

$$f(e_i - e_{i+1}) = f(e_i) - f(e_{i+1}) = (e_i - \cancel{v}) - (e_{i+1} - \cancel{v}) = e_i - e_{i+1}$$

  D'après la question ***3.a)***, on en déduit : $(e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$.

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ (e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)}$$

□

d) En déduire une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$. Quel est le rang de f ?

Démonstration.

- Montrons que la famille $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f)$.
  - × D'après la question précédente :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ (e_i - e_{i+1}) \in \mathrm{Im}(f)$$

  - × Démoontrons maintenant que cette famille est libre.
    Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot (e_1 - e_2) + \lambda_2 \cdot (e_2 - e_3) + \cdots + \lambda_{n-1} \cdot (e_{n-1} - e_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

    On obtient alors :

$$\lambda_1 \cdot e_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot e_2 + \cdots + (\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}) \cdot e_{n-1} + \lambda_{n-1} \cdot e_n = 0_{\mathbb{R}^n}$$

    Or la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$. La proposition précédente équivaut donc à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & & & & & & & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & & & = & 0 \\ & & & \vdots & & & & & \\ & & & & - & \lambda_{n-2} & + \ \lambda_{n-1} & = & 0 \\ & & & & & & \lambda_{n-1} & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \{\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-2} = \lambda_{n-1} = 0$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{La famille } (e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n) \text{ est une famille libre de } \mathrm{Im}(f).}$$

- On en déduit :

$$\dim(\text{Im}(f)) \geqslant \text{Card}((e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)) = n - 1$$

Or, d'après la question ***3.b)*** : $\dim(\text{Im}(f)) \leqslant n - 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(\text{Im}(f)) = n - 1}$$

- On sait que :
  - × $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)$ est une famille libre de $\text{Im}(f)$,
  - × $\text{Card}((e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)) = n - 1 = \dim(\text{Im}(f))$

On en déduit que $(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)$ est une base de $\text{Im}(f)$.
De plus : $\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)) = n - 1$.

Remarque
Les énoncés de type HEC / ESSEC se distinguent des énoncés EML / EDHEC par un découpage plus faible des questions qui oblige à prendre plus d'initiatives. Ici, la formulation de la question « En déduire que ... » doit aider à comprendre qu'il s'agit de se servir du résultat précédent. En question précédente, on exhibe $(n-1)$ vecteurs de $\text{Im}(f)$. Il s'agit alors de tester si la famille constituée de ces vecteurs est une base de $\text{Im}(f)$. □

4. a) Déterminer une base du noyau de f.

Démonstration.

- D'après le théorème du rang :

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \underset{n-1}{\underset{\parallel}{\dim(\text{Im}(f))}} = \underset{n}{\underset{\parallel}{\dim(\mathbb{R}^n)}}$$

Donc : $\dim(\text{Ker}(f)) = n - (n-1) = 1$.

- D'après la question ***2.*** :
  - × $v \in \text{Ker}(f)$,
  - × $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

  Donc (v) forme une famille libre de $\text{Ker}(f)$.
- On obtient alors :
  - × (v) est une famille libre de $\text{Ker}(f)$,
  - × $\text{Card}((v)) = 1 = \dim(\text{Ker}(f))$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } (v) \text{ est une base de } \text{Ker}(f).}$$

□

b) Quels sont les sous-espaces propres de f ?

Démonstration.

- On a déjà, d'après la question ***4.a)*** :

$$E_0(f) = \text{Ker}(f - 0_{\mathbb{R}} \cdot \text{id}) = \text{Ker}(f) = \text{Vect}(v)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } E_0(f) = \text{Vect}(v).}$$

- Soit $y \in \mathbb{R}^n$. D'après la question ***3.a)*** :

$$y \in \mathrm{Im}(f) \ \Leftrightarrow \ f(y) = y \ \Leftrightarrow \ y \in E_1(f)$$

On en déduit que : $\mathrm{Im}(f) = E_1(f)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{D'après la question } \textbf{\textit{3.d)}} : \\ E_1(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n\right)\end{array}}$$

□

c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.
D'après les questions ***3.d)***, ***4.a)*** et ***4.b)*** :

$$\dim(E_0(f)) + \dim(E_1(f)) = 1 + (n-1) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est diagonalisable.}}$$

□

5. Écrire la matrice M de l'endomorphisme f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et la matrice M' de f dans une base de vecteurs propres.

Démonstration.

- Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a déjà montré en question ***3.c)*** :

$$\begin{array}{rcl} f(e_i) & = & e_i - v \ = \ e_i - \sum\limits_{j=1}^{n} v_j \cdot e_j \\ & = & (-v_1) \cdot e_1 + \cdots + (1 - v_i) \cdot e_i + (-v_{i+1}) \cdot e_{i+1} + \cdots + (-v_n) \cdot e_n \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient alors : } M = \begin{pmatrix} 1 - v_1 & -v_1 & \cdots & -v_1 & -v_1 \\ -v_2 & 1 - v_2 & \cdots & -v_2 & -v_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -v_{n-1} & -v_{n-1} & \cdots & 1 - v_{n-1} & -v_{n-1} \\ -v_n & -v_n & \cdots & -v_n & 1 - v_n \end{pmatrix}}$$

- La famille $(v, e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n)$ est une base de vecteurs propres de f.
  - × Comme $v \in E_0(f)$:

$$f(v) = 0_{\mathbb{R}^n} = 0 \cdot v + 0 \cdot (e_1 - e_2) + \cdots + 0 \cdot (e_{n-1} - e_n)$$

  - × Comme $(e_1 - e_2) \in E_1(f)$:

$$f(e_1 - e_2) = e_1 - e_2 = 0 \cdot v + 1 \cdot (e_1 - e_2) + 0 \cdot (e_2 - e_3) + \cdots + 0 \cdot (e_{n-1} - e_n)$$

  - × $\cdots$
  - × Comme $(e_{n-1} - e_n) \in E_1(f)$:

$$f(e_{n-1} - e_n) = e_{n-1} - e_n = 0 \cdot v + 0 \cdot (e_1 - e_2) + \cdots + 0 \cdot (e_{n-2} - e_{n-1}) + 1 \cdot (e_{n-1} - e_n)$$

$$\boxed{\text{On obtient alors : } M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}$$

□

Exercice 7 : EDHEC 2006

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

On note I la matrice unité et O la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(u)$.

Démonstration.

- Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} v \in \mathrm{Ker}(f) & \iff & f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ & \iff & A\,V = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 0 \\ x & + & 4\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ -2\,x & - & 8\,y & - & 6\,z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1}{\iff}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 0 \\ & - & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\,x & + & 10\,y & = & -7\,z \\ & - & 2\,y & = & z \end{array} \right. \\ & \overset{L_1 \leftarrow L_1 + 5\,L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\,x & & & = & -2\,z \\ & - & 2\,y & = & z \end{array} \right. \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(f) & = & \left\{ v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \right\} \\ & = & \left\{ v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x = -z \ \texttt{ET} \ y = -\frac{1}{2}\,z \right\} \\ & = & \left\{ (-z, -\frac{1}{2}\,z, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \left\{ z \cdot (-1, -\frac{1}{2}, 1) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ z \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left((-1, -\frac{1}{2}, 1) \right) \ = \ \mathrm{Vect}\,((2, 1, -2)) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(u).}$$

□

b) La matrice A est-elle inversible ?

Démonstration.
D'après la question précédente : $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\,(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
On en déduit que f n'est pas injective. Elle n'est donc pas bijective.

$$\boxed{\text{On en conclut que } A \text{, matrice représentative de } f \text{ dans la base } \mathscr{B}\text{, n'est pas inversible.}}$$

□

2. a) Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et tel que $f(v) = u$.

Démonstration.
Soit $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

On cherche un vecteur v dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée vaut 1. On considère donc : $y = 1$.

$$\begin{array}{rl}
 & f(v) = u \\
\Longleftrightarrow & A\, V = U \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 2 \\ x & + & 4\,y & + & 3\,z & = & 1 \\ -2\,x & - & 8\,y & - & 6\,z & = & -2 \end{array}\right. \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 2 \\ & - & 2\,y & - & z & = & 0 \\ & & 2\,y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 2 \\ & - & 2\,y & - & z & = & 0 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\,x & + & 7\,z & = & -8 \\ & - & z & = & 2 \end{array}\right. \qquad \textit{(car } y = 1\textit{)} \\
\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 7\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\,x & & & = & 6 \\ & - & z & = & 2 \end{array}\right.
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Le seul vecteur } v \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } f(v) = u \text{ est } v = (3, 1, -2).}$$ □

b) Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1, et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0, 1, -1)$.

Démonstration.
Soit $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $W = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

On cherche un vecteur w dont la $2^{\text{ème}}$ coordonnée vaut 1. On considère donc : $y = 1$.

$$\begin{array}{rl}
 & f(w) = v \\
\Longleftrightarrow & A\, W = V \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 3 \\ x & + & 4\,y & + & 3\,z & = & 1 \\ -2\,x & - & 8\,y & - & 6\,z & = & -2 \end{array}\right. \\
\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2\,x & + & 10\,y & + & 7\,z & = & 3 \\ & - & 2\,y & - & z & = & -1 \\ & & 2\,y & + & z & = & -1 \end{array}\right. \\
\Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\,x & + & 7\,z & = & -7 \\ & - & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad \textit{(car } y = 1\textit{)} \\
\overset{L_1 \leftarrow L_1 + 7\,L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\,x & & & = & 0 \\ & - & z & = & 1 \end{array}\right.
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Le seul vecteur } w \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } f(w) = v \text{ est } w = (0, 1, -1).}$$

Remarque

- L'énoncé précise qu'il faut trouver **le** vecteur w tel que $f(w) = v$. Ainsi, vérifier :
$$f\big((0,1,-1)\big) = (3,1,-2)$$
ne suffit pas. Il faut aussi démontrer qu'il n'y a pas d'autre vecteur qui vérifie cette propriété.
- Si la fonction f était injective, on pourrait facilement démontrer que la propriété de l'énoncé est vérifiée par un seul vecteur. En effet, si s et t vérifie cette propriété, alors :
$$f(s) = v = f(t)$$
et ainsi, par linéarité : $f(s-t) = 0_{\mathbb{R}^3}$. D'où $s - t \in \mathrm{Ker}(f)$.
Et ainsi, si f injective, on en conclut que $s = t$.
- L'intérêt de la formulation de cette question est qu'elle fournit le vecteur v de la question précédente. Cela permet de vérifier la calcul précédent et, le cas échéant, de le rectifier. Qu'on réussisse ou non ces deux questions, on peut faire la suite car la famille (u,v,w) est en fait donnée par l'énoncé. □

c) Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathscr{B}'$.
On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

Démonstration.

- Montrons que la famille $\big((2,1,-2),(3,1,-2),(0,1,-1)\big)$ est libre.
Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons :
$$\lambda_1 \cdot (2,1,-2) + \lambda_2 \cdot (3,1,-2) + \lambda_3 \cdot (0,1,-1) = (0,0,0)$$
Ceci équivaut au système :
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,\lambda_1 & + & 3\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ -2\,\lambda_1 & - & 2\,\lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,\lambda_1 & + & 3\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2\,\lambda_1 & + & 3\,\lambda_2 & & & = & 0 \\ & - & \lambda_2 & + & 2\,\lambda_3 & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$
$$\Longleftrightarrow \left\{\ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\right.$$
(par remontées successives)
La famille (u,v,w) est donc libre.
- De plus, $\mathrm{Card}((u,v,w)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{La famille } (u,v,w) \text{ est donc une base de } \mathbb{R}^3.}$$
□

3. a) Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathscr{B}'$. En déduire la seule valeur propre de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)*** : $f(u) = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$.

  On en déduit que $\text{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(u)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- D'après la question ***2.a)*** : $f(v) = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$.

  On en déduit que $\text{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(v)\big) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- D'après la question ***2.b)*** : $f(w) = 0 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$.

  On en déduit que $\text{Mat}_{(u,v,w)}\big(f(w)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } N = \text{Mat}_{(u_1,u_2,u_3)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

- La matrice N est triangulaire supérieure.
  Ses coefficients diagonaux sont donc ses valeurs propres et $\text{Sp}(N) = \{0\}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \text{Sp}(f) = \text{Sp}(N) = \{0\}. \text{ L'endomorphisme } f \text{ a pour seule valeur propre } 0.}$$

- Supposons par l'absurde que f est diagonalisable.
  Il existe alors une base $\mathscr{B}'' = (e''_1, e''_2, e''_3)$ constituée de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice représentative de f est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

  D'après la formule de changement de base :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} & \text{Mat}_{\mathscr{B}''}(f) & P_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}} \\ & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ & & P & D & P^{-1} \end{array}$$

  Ainsi :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P \; 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \; P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)})$$

  L'application $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(.)$ étant bijective, on en déduit :

$$f = 0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)}$$

  Absurde !

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Remarque

- Il étatit possible de rédiger différemment la dernière partie de la question en prenant le parti de diagonaliser la matrice représentative de f. Détaillons cette rédaction.
- Supposons par l'abusrde que f est diagonalisable. Alors A est diagonalisable.
  Il existe alors une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :
  $$A = PDP^{-1}$$
  où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A.
  Or $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(f) = \{0\}$. Donc : $D = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.
  Et ainsi :
  $$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P\ 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\ P^{-1} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(0_{\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)})$$
  Et on peut donc conclure comme ci-dessus.
- Cette question est un grand classique des sujets.
  Il faut donc savoir la traiter correctement, en adoptant l'un ou l'autre des rédactions ci-dessus.

□

b) Donner la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1}, puis en déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a : $A^k = O$.

Démonstration.

- D'après la formule de changement de base :
$$\begin{array}{ccccc} \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) & = & P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} & \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) & P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \\ \shortparallel & & \shortparallel & \shortparallel & \shortparallel \\ A & & P & N & P^{-1} \end{array}$$
$$\boxed{A = PNP^{-1}}$$
- Par une récurrence immédiate, on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k = PN^kP^{-1}$.
- Or :
$$N^2 = N \times N \ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
  et :
$$N^3 = N \times N^2 \ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit par une récurrence immédiate : $\forall k \geqslant 3,\ N^k = O$.
(on peut aussi écrire : $\forall k \geqslant 3,\ N^k = N^3 \times N^{k-3} = O$)

On en conclut : $\forall k \geqslant 3,\ A^k = POP^{-1} = O$.

□

4. On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A),

a) Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = \text{Vect}\left(I, N, N^2\right)$.
On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $C_N = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MN = NM\}$.
  Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} M \in C_N & \Leftrightarrow & MN = NM \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} d = g = h = 0 \\ a = e = i \\ b = f \end{array} \right. \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} C_N & = & \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid MN = NM\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \mid d = g = h = 0 \ \texttt{ET} \ a = e = i \ \texttt{ET} \ b = f \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ & = & \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ & = & \text{Vect}\left(I, N, N^2\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } C_N \text{ est un espace vectoriel et } C_N = \text{Vect}\left(I, N, N^2\right).}$$

□

b) Établir que : $M \in C_A \;\Leftrightarrow\; P^{-1}MP \in C_N$.
En déduire que $C_A = \text{Vect}\big(I, A, A^2\big)$. Quelle est la dimension de C_A ?

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcll} M \in C_A & \Leftrightarrow & M \text{ commute avec } A & \\ & \Leftrightarrow & AM = MA & \\ & \Leftrightarrow & PNP^{-1}M = MPNP^{-1} & \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}(PNP^{-1}M) = P^{-1}(MPNP^{-1}) & \textit{(en multipliant à gauche par } P^{-1}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & NP^{-1}M = P^{-1}MPNP^{-1} & \\ & \Leftrightarrow & (NP^{-1}M)P = (P^{-1}MPNP^{-1})P & \textit{(en multipliant à droite par } P^{-1}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & N(P^{-1}MP) = (P^{-1}MP)N & \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}MP \text{ commute avec } N & \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}MP \in C_N & \end{array}$$

$$\boxed{M \in C_A \;\Leftrightarrow\; P^{-1}MP \in C_N}$$

- D'après ce qui précède :

$$\begin{array}{rcl} M \in C_A & \Leftrightarrow & P^{-1}MP \in C_N \\ & \Leftrightarrow & P^{-1}MP \in \text{Vect}\big(I, N, N^2\big) \\ & \Leftrightarrow & \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ P^{-1}MP = a \cdot I + b \cdot N + c \cdot N^2 \\ & \Leftrightarrow & \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\quad M \;=\; P\ (a \cdot I + b \cdot N + c \cdot N^2)\ P^{-1} \\ & & \qquad\qquad\qquad\quad\ \ = \; (a \cdot P + b \cdot PN + c \cdot PN^2)\ P^{-1} \\ & & \qquad\qquad\qquad\quad\ \ = \; a \cdot PP^{-1} + b \cdot PNP^{-1} + c \cdot PN^2P^{-1} \\ & & \qquad\qquad\qquad\quad\ \ = \; a \cdot I + b \cdot A + c \cdot A^2 \\ & \Leftrightarrow & M \in \text{Vect}\big(I, A, A^2\big) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } C_A = \text{Vect}\big(I, A, A^2\big).}$$

- Démontrons que la famille (I, A, A^2) est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons :

$$\lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot A + \lambda_3 \cdot A^2 = O \quad (*)$$

Or :

$$\begin{array}{rll} & \lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot A + \lambda_3 \cdot A^2 & \\ = & \lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot PNP^{-1} + \lambda_3 \cdot PN^2P^{-1} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.b}}\textit{)} \\ = & P\ \big(\lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot N + \lambda_3 \cdot N^2\big)\ P^{-1} & \textit{(car } I = PP^{-1}\textit{)} \\ = & P\ \left(\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\ P^{-1} & \\ = & P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} P^{-1} & \end{array}$$

Ainsi, d'après $(*)$: $P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} P^{-1} \ = \ POP^{-1} \ = \ O$.

Et par multiplication à gauche par P^{-1} puis à droite par P :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \ = \ O$$

On en déduit : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (I, A, A^2) \text{ est libre.}}$$

- La famille (I, A, A^2) :
  - × engendre C_A,
  - × est libre.

  La famille (I, A, A^2) est une base de C_A.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \dim(C_A) = \mathrm{Card}((I, A, A^2)) = 3.}$$

□

Exercice 8 : EML 2005

On considère les éléments suivants de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par I, J et K.
Pour toute matrice M de E, on note $M^0 = I$, et si M est inversible, on note, pour tout entier naturel k, $M^{-k} = (M^{-1})^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que $(M^k)^{-1} = M^{-k}$.

1. Déterminer la dimension de E.

Démonstration.
Par définition : $E = \text{Vect}(I, J, K)$

- Montrons que la famille (I, J, K) est libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_1 \cdot I + \lambda_2 \cdot J + \lambda_3 \cdot K = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Alors :

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Donc :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  On obtient alors : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (I, J, K) \text{ est libre.}}$$

- En résumé, la famille (I, J, K) :
  × est libre, d'après ce qui précède,
  × engendre E, par définition.

$$\boxed{\text{La famille } (I, J, K) \text{ est une base de } E.}$$

$$\boxed{\dim(E) = \text{Card}((I, J, K)) = 3}$$

□

2. Calculer J^2, JK, KJ et K^2.

Démonstration.

- $J^2 = J \times J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K$

$$\boxed{J^2 = K}$$

- $JK = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{JK = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

$$KJ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{KJ = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

$$K^2 = K \times K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{K^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

Remarque

Pour le calcul de KJ et K^2, on pouvait rédiger de la façon suivante :

- $KJ = J^2 \times J = J^3 = J \times J^2 = JK = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- $K^2 = J^2 \times J^2 = J^4 = J \times J^3 = J \times 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ □

3. Soit la matrice $L = I + J$.

a) Montrer, pour tout entier naturel n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K$$

Démonstration.

- Les matrices I et J commutent : $I \times J = J = J \times I$.
  Soit $n \geqslant 2$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
L^n = (I+J)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k} J^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k && \textit{(car } I^{n-k} = I\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} J^k && \textit{(car } n \geqslant 2\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k && \textit{(car } J^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \textit{ pour tout } k \geqslant 3 \\
& && \textit{par récurrence immédiate)} \\
&= \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2 \\
&= I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K && \textit{(d'après la question précédente)}
\end{aligned}$$

- On remarque de plus : $L^0 = I$ et $L^1 = L = I + J$.
  Donc la formule reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} K.}$$

Remarque

- Afin de démontrer : $\forall k \geqslant 3$, $J^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$, on peut procéder de manière directe.
  En effet, pour tout $k \geqslant 3$:

$$J^k = J^3 \times J^{k-3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \times J^{k-3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

(on peut considérer J^{k-3} car $k - 3 \geqslant 0$)

- Le résultat étant donné dans l'énoncé, il est possible de traiter cette question par récurrence.
  Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $L^n = I + n\ J + \dfrac{n(n-1)}{2}\ K$.

  ▶ **Initialisation** :

  × D'une part : $L^0 = I$.

  × D'autre part : $I + 0\ J + \dfrac{0(0-1)}{2}\ K = I$

  D'où $\mathcal{P}(0)$.

  ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $L^{n+1} = I + (n+1)\ J + \dfrac{(n+1)n}{2}\ K$).

$$\begin{array}{rcll}
L^{n+1} & = & L^n\ L & \\
 & = & \left(I + n\ J + \dfrac{n(n-1)}{2}\ K\right)\ (I+J) & \textit{(par hypohèse de récurrence)} \\
 & = & \left(I + n\ J + \dfrac{n(n-1)}{2}\ K\right) + \left(J + n\ J^2 + \dfrac{n(n-1)}{2}\ \cancel{KJ}\right) & \\
 & = & I + (n+1)\ J + \left(\dfrac{n(n-1)}{2} + n\right)\ K & \textit{(car } J^2 = K\textit{)} \\
 & = & I + (n+1)\ J + n\ \left(\dfrac{n-1}{2} + 1\right)\ K & \\
 & = & I + (n+1)\ J + n\ \dfrac{n+1}{2}\ K &
\end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$. □

b) Vérifier que L est inversible et montrer, pour tout entier relatif n :

$$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K$$

Démonstration.

- On calcule :

$$L = I + J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  L est une matrice triangulaire supérieure dont les cœfficients diagonaux sont tous non nuls.

  Ainsi, la matrice L est inversible.

- On a démontré en question précédente que cette relation est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Il reste alors à démontrer que la relation est vérifiée pour les entiers négatifs.
  Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on veut montrer :

$$L^{-n} = I + (-n)J + \frac{(-n)(-n-1)}{2}K = I - nJ + \frac{n(n+1)}{2}K$$

  où $L^{-n} = \left(L^{-1}\right)^n = \left(L^n\right)^{-1}$.

  Il s'agit donc de montrer que $A_n = I - nJ + \dfrac{n(n+1)}{2}K$ est l'inverse de L^n.

Or :

$$\begin{array}{rcl}
A_n \times L^n & = & \left(I - nJ + \dfrac{n(n+1)}{2}K\right) \times \left(I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}K\right) \\
& = & \left(I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}K\right) + \left(-nJ - n^2J^2 - \dfrac{n^2(n-1)}{2}\cancel{JK}\right) \quad \textit{(car } K^2 = KJ = JK = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
+ & & \left(\dfrac{n(n+1)}{2}K + \dfrac{n^2(n+1)}{2}\cancel{KJ} + \dfrac{n^2(n+1)(n-1)}{4}\cancel{K^2}\right) \\
& = & I + (n-n)\ J + \left(\dfrac{n(n-1)}{2} - n^2 + \dfrac{n(n+1)}{2}\right)\ K \qquad \textit{(car } J^2 = K\textit{)} \\
& = & I + \dfrac{n}{2}\ \cancel{\big((n-1) - 2n + (n+1)\big)}\ K \ = \ I
\end{array}$$

Ainsi, L^n est inversible d'inverse :

$$L^{-n} = (L^n)^{-1} = A_n = I - nJ + \frac{n(n+1)}{2}K$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}K}$$

□

c) Exprimer, pour tout entier relatif n, L^n à l'aide de I, L, L^2 et n.

Démonstration.

- Rappelons tout d'abord : $L = I + J$ donc $J = L - I$.
  D'autre part, comme I et L commutent :

$$K = J^2 = (L-I)^2 = L^2 - 2L + I$$

$$\boxed{J = L - I \quad \text{et} \quad K = L^2 - 2L + I}$$

- Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl}
L^n & = & I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}K \\
& = & I + n(L-I) + \dfrac{n(n-1)}{2}(L^2 - 2L + I) \\
& = & I + nL - nI + \dfrac{n(n-1)}{2}L^2 - n(n-1)L + \dfrac{n(n-1)}{2}I \\
& = & \left(1 - n + \dfrac{n(n-1)}{2}\right) I + n(1 - (n-1))L + \dfrac{n(n-1)}{2}L^2 \\
& = & \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}I - n(n-2)L + \dfrac{n(n-1)}{2}L^2
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z},\ L^n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}I - n(n-2)L + \frac{n(n-1)}{2}L^2}$$

□

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et e l'application identique de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même.

4. Montrer que f admet une valeur propre et une seule que l'on déterminera.
Est-ce que f est diagonalisable ?

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Rappelons :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } M \ \Leftrightarrow\ M - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{rg}(A - \lambda\, I) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -3 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \\[4pt]
& \underset{}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=}} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 2 & -1 \end{pmatrix}\right) \\[4pt]
& \overset{\substack{L_2 \leftarrow 2\,L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2\,L_3 + \lambda\,L_1}}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & 3-2\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 4-3\lambda & -2+3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\[4pt]
& \overset{L_2 \leftarrow 3\,L_2 - 2\,L_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & 1 & 1-3\lambda+2\lambda^2 \\ 0 & 4-3\lambda & -2+3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\[4pt]
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - (4-3\lambda)\,L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & 1 & 1-3\lambda+2\lambda^2 \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

où :

$$\begin{array}{rcl}
P(\lambda) & = & \big(-2+3\lambda-\lambda^2\big) - (4-3\lambda)\big(1-3\lambda+2\lambda^2\big) \\
& = & -(\lambda-1)(\lambda-2) - (4-3\lambda)(\lambda-1)(2\lambda-1) \\
& = & (\lambda-1)\big(-(\lambda-2) + (3\lambda-4)(2\lambda-1)\big) \\
& = & (\lambda-1)\big(-\lambda+2+\big(6\lambda^2-11\lambda+4\big)\big) \\
& = & (\lambda-1)\big(6\lambda^2-12\lambda+6\big) \\
& = & 6\,(\lambda-1)\big(\lambda^2-2\lambda+1\big) \ = \ 6\,(\lambda-1)(\lambda-1)^2
\end{array}$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
Elle est non inversible ssi l'un de ses cœfficients diagonaux est nul. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
(A - \lambda\, I) \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & 6\,(\lambda-1)^3 = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda = 1
\end{array}$$

$$\boxed{\text{L'endormorphisme } f \text{ admet 1 pour unique valeur propre : } \mathrm{Sp}(f) = \{1\}.}$$

- Supposons par l'abusrde que f est diagonalisable. Alors A est diagonalisable.
Il existe alors une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que :
$$A = PDP^{-1}$$
où D est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A.
Or $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(f) = \{1\}$. Donc : $D = I_3$.

Et ainsi :
$$A = P\ I_3\ P^{-1} = P\ P^{-1} = I_3$$
Absurde !

$$\boxed{\text{On en déduit que l'endomorphisme } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

Remarque

- L'avant dernière étape du calcul du rang présenté dans cette question est un peu particulière : au lieu de placer un 0 en position $(3, 2)$, on s'est débarrassé de λ en position $(2, 2)$.
Il était aussi possible d'opérer comme suit :
$$\begin{array}{rcl} \text{rg}(A - \lambda I) & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & 3-2\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 4-3\lambda & -2+3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\ & \overset{L_3 \leftarrow (3-2\lambda)\, L_3 - (4-3\lambda)\, L_2}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & 3-2\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 0 & Q(\lambda) \end{pmatrix}\right) \qquad \textit{(si } 3-2\lambda \neq 0\textit{)} \end{array}$$
où :
$$\begin{array}{rcl} Q(\lambda) & = & (3-2\lambda)(-2+3\,\lambda-\lambda^2) - (4-3\lambda)(-1+\lambda) \\ & = & (3-2\lambda)(1-\lambda)(-2+\lambda) + (4-3\lambda)(1-\lambda) \\ & = & (1-\lambda)\Big((3-2\lambda)(-2+\lambda) + (4-3\lambda)\Big) \\ & = & (1-\lambda)\Big((-6+7\lambda-2\lambda^2) + (4-3\lambda)\Big) \\ & = & (1-\lambda)(-2+4\lambda-2\lambda^2) \\ & = & (1-\lambda)\ (-2)\ (1-2\lambda+\lambda^2) \ = \ -2\ (1-\lambda)^3 \end{array}$$
Ainsi, dans le cas où $3-2\lambda \neq 0$, on obtient une réduite triangulaire supérieure.
Elle est non inversible ssi l'un de ses coefficients diagonaux est nul. Ainsi, si $3-2\lambda \neq 0$:
$$A - \lambda I \text{ non inversible } \Leftrightarrow\ -2\ (1-\lambda)^3 = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda = 1$$
Il reste à traiter le cas où $3-2\lambda = 0$ (*i.e.* $\lambda = \frac{3}{2}$).
Dans ce cas, en reprenant le début du calcul précédent, on obtient :
$$\begin{array}{rcl} \text{rg}(A - \lambda I) & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & 3-2\lambda & -1+\lambda \\ 0 & 4-3\lambda & -2+3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right) \\ & = & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\right) \qquad \textit{(car } 3-2\lambda = 0\textit{)} \\ & \overset{L_2 \Leftrightarrow L_3}{=} & \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3-\lambda \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right) \end{array}$$
La réduite obtenue est triangulaire supérieure et sous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Elle est donc inversible. On en déduit que $\dfrac{3}{2}$ n'est pas valeur propre de A. $\square$

5. a) Soit $w = (1, 0, 0)$. Calculer $v = (f - e)(w)$ et $u = (f - e)(v)$.
Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.
On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

- Tout d'abord, d'après l'énoncé : $w = (1, 0, 0)$. Donc :

$$W = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Ensuite :

$$V = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}((f - e)(w)) = (A - I)W = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{v = (-1, 1, 2)}$$

- Enfin :

$$U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}((f - e)(v)) = (A - I)V = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{u = (1, 0, -1)}$$

- Montrons que la famille (u, v, w) est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
Supposons : $\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3}$.
On obtient alors le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ -\lambda_1 & + & 2\lambda_2 & & & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

(par remontées successives)

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } (u, v, w) \text{ est libre.}}$$

- En résumé :
  - × (u, v, w) est une famille libre,
  - × $\mathrm{Card}((u, v, w)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

$$\boxed{\text{On en déduit que la famille } (u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

□

b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base (u, v, w).

Démonstration.
Par définition des vecteurs u, v et w :

× $v = (f - e)(w) = f(w) - w$. Donc : $f(w) = v + w = 0 \cdot u + 1 \cdot v + 1 \cdot w$.
Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f(w)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

× $u = (f-e)(v) = f(v) - v$. Donc : $f(v) = u + v = 1 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$.
Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f(w)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

× avec les mêmes notations que précédemment :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = AU = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = U$$

Donc : $f(u) = u = 1 \cdot u + 0 \cdot v + 0 \cdot w$.
Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f(u)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Donc : } \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L.}$$

□

c) Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et, pour tout entier relatif n, exprimer f^n à l'aide de e, f, f^2 et n.

Démonstration.

- D'après la question ***3.b)***, la matrice L est inversible. Donc l'endomorphisme f est bijectif. De plus, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}^3.}$$

- Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'après la question ***3.c)*** :

$$L^n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} I - n(n-2)L + \frac{n(n-1)}{2} L^2$$

Or L est la matrice représentative de f dans la base (u, v, w).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, par passerelle matrice-endomorphisme :} \\ f^n = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} e - n(n-2)f + \dfrac{n(n-1)}{2} f^2.\end{array}}$$

Remarque
Détaillons le deuxième aspect de la question.

- Tout d'abord :

$$L^n = \left(\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f)\right)^n = \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f^n)$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)(n-2)}{2} I - n(n-2)L + \frac{n(n-1)}{2} L^2 \\ = \ & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\ \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(e) - n(n-2)\ \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f) + \frac{n(n-1)}{2}\ \left(\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f)\right)^2 \\ = \ & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\ \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(e) - n(n-2)\ \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f) + \frac{n(n-1)}{2}\ \left(\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f^2)\right) \\ = \ & \mathrm{Mat}_{(u,v,w)} \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\ e - n(n-2)\ f + \frac{n(n-1)}{2}\ f^2 \right) \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(f^n) \; = \; \mathrm{Mat}_{(u,v,w)}\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\ e - n(n-2)\ f + \frac{n(n-1)}{2}\ f^2\right)$$

L'application $\mathrm{Mat}_{(u,v,w)}(.)$ étant bijective, on obtient :

$$f^n \; = \; \frac{(n-1)(n-2)}{2}\ e - n(n-2)\ f + \frac{n(n-1)}{2}\ f^2$$

□

Exercice 9 : EML 2014

On considère l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices d'ordre 2 à coefficients réels. On définit :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que (A, B, C) est une base de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Par définition de $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C \ / \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\,(A, B, C) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{E} \text{ est un espace vectoriel et la famille } (A,B,C) \text{ engendre } \mathcal{E}.}$$

- Montrons que la famille (A, B, C) est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :

$$\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B + \lambda_3 \cdot C = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc la famille (A, B, C) est libre.

- La famille (A, B, C) est :
  - × génératrice de $\mathcal{E}$,
  - × libre.

$$\boxed{\text{Ainsi la famille } (A,B,C) \text{ est une base de } \mathcal{E}.}$$

□

2. Établir que $\mathcal{E}$ est stable par multiplication, c'est à dire :

$$\forall (M,N) \in \mathcal{E}^2, \ MN \in \mathcal{E}$$

Démonstration.
Soit $(M,N) \in \mathcal{E}^2$. Il existe donc $(a_1,b_1,c_1) \in \mathbb{R}^3$ et $(a_2,b_2,c_2) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$MN = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\,a_2 & a_1\,b_2 + b_1\,c_2 \\ 0 & c_1\,c_2 \end{pmatrix} = a_1\,a_2 \cdot A + (a_1\,b_2 + b_1\,c_2)\cdot B + c_1\,c_2 \cdot C$$

Donc $MN \in \text{Vect}\,(A,B,C)$. D'où $MN \in \mathcal{E}$.

$$\boxed{\mathcal{E} \text{ est bien stable par multiplication.}}$$

Commentaire

On pouvait aussi rédiger autrement : $MN = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1\,a_2 & a_1\,b_2 + b_1\,c_2 \\ 0 & c_1\,c_2 \end{pmatrix}$.
Ainsi, MN est bien de la forme $\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix}$ avec $(u,v,w) = (a_1\,a_2, a_1\,b_2 + b_1\,c_2, c_1\,c_2) \in \mathbb{R}^3$.
Donc $MN \in \mathcal{E}$.

□

3. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathcal{E}$, si M est inversible alors $M^{-1} \in \mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$. Il existe donc $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.
La matrice M est d'ordre 2. Elle est donc inversible ssi $\det(M) = ac \neq 0$. Dans ce cas :

$$M^{-1} = \frac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{c}{ac}\cdot A - \frac{b}{ac}\cdot B + \frac{a}{ac}\cdot C \in \mathcal{E}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, si } M \in \mathcal{E} \text{ est inversible, } M^{-1} \in \mathcal{E}.}$$

Commentaire

Attention, on ne montre pas dans cette question que toutes les matrices de $\mathcal{E}$ sont inversibles !
On démontre simplement que, **celles qui sont inversibles** ont un inverse de la forme triangulaire supérieure (*i.e.* ont un inverse appartenant à $\mathcal{E}$).

□

Pour toute matrice de $\mathcal{E}$, on note $f(M) = TMT$.

4. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

Démonstration.
- Montrons que f est une application linéaire.
  Soit $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M_1,M_2) \in \mathcal{E}^2$.

$$\begin{array}{rcll} f(\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2) & = & T\ (\lambda_1 \cdot M_1 + \lambda_2 \cdot M_2)\ T & \\ & = & (\lambda_1 \cdot TM_1 + \lambda_2 \cdot TM_2)\ T & \textit{(par distributivité à gauche de } \times \textit{ sur } +\textit{)} \\ & = & \lambda_1 \cdot TM_1T + \lambda_2 \cdot TM_2T & \textit{(par distributivité à droite de } \times \textit{ sur } +\textit{)} \\ & = & \lambda_1 \cdot f(M_1) + \lambda_2 \cdot f(M_2) & \end{array}$$

- Montrons que $f(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}$. Autrement dit, montrons que pour tout $M \in \mathcal{E}$, $f(M) \in \mathcal{E}$.

  Soit $M \in \mathcal{E}$.
  On remarque que : $T = A + B + C \in \text{Vect}(A, B, C)$. Donc $T \in \mathcal{E}$.
  Donc, d'après la question ***3.***, $TM \in \mathcal{E}$.
  D'où $f(M) = TMT = (TM)T \in \mathcal{E}$ en utilisant une nouvelle fois la question ***3.***

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est donc un endomorphisme de } \mathcal{E}.}$$

□

5. Vérifier que T est inversible et démontrer que f est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

Démonstration.

- Comme $\det(T) = 1 \times 1 - 0 \times 1 = 1 \neq 0$, la matrice T est inversible.

$$\boxed{T \text{ est inversible.}}$$

  (l'inverse de T est : $T^{-1} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *)*

- Déterminons $\text{Ker}(f)$.
  Soit $M \in \mathcal{E}$.

$$\begin{aligned} M \in \text{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(M) = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\ &\Leftrightarrow TMT = 0 \\ &\Leftrightarrow T^{-1}TMT = T^{-1} \times 0 = 0 \\ &\Leftrightarrow MTT^{-1} = 0 \times T^{-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow M = 0 \end{aligned}$$

  Donc $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$. Ainsi, f est injective.

- Enfin, comme f est un endomorphisme de $\mathcal{E}$ de dimension **finie** :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective}$$

$$\boxed{\text{L'application } f \text{ est un automorphisme de } \mathcal{E}.}$$

Commentaire

On utilise ici un cas particulier de la proposition suivante :
Soient E et F des ev de dimensions **finies** tels que $\dim(E) = \dim(F)$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors :

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective}$$

□

6. On note F la matrice de f dans la base (A, B, C) de $\mathcal{E}$.
Calculer $f(A), f(B), f(C)$ en fonction de (A, B, C) et en déduire F.

Démonstration.

- $f(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C.$

  Ainsi : $\text{Mat}_{(A,B,C)}(f(A)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot A + 1 \cdot B + 0 \cdot C.$

  Ainsi : $\text{Mat}_{(A,B,C)}(f(B)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $f(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot A + 1 \cdot B + 1 \cdot C$.

  Ainsi : $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f(C)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Donc } F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

7. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

Démonstration.

- Soit $M \in \mathcal{E}$. Il existe donc $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$.

  On note : $X = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(M) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} M \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) & \Leftrightarrow & (f - \mathrm{id})(M) = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & (F - I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ x + z = 0 \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ x = -z \right. \end{array}$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) & = & \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \ / \ (f - \mathrm{id})(M) = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})} \right\} \\ & = & \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in \mathcal{E} \ / \ x = -z \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} -z & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \ / \ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ & = & \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ / \ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ & = & \left\{ y \cdot B + z \cdot (C - A) \ / \ (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\,(B, C - A) \end{array}$$

- Donc la famille $(B, C - A)$ engendre $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.
  Elle est de plus constituée de deux matrices non proportionnelles, elle est donc libre.

$$\boxed{\text{La famille } (B, C - A) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}).}$$

$$\boxed{\text{On a donc : } \dim(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})) = \mathrm{Card}((B, C - A)) = 2.}$$

□

8. Soit λ un réel différent de 1. Résoudre l'équation $f(M) = \lambda\, M$, d'inconnue $M \in \mathcal{E}$.

Démonstration.
Soit $M \in \mathcal{E}$. Il existe donc $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rcl} f(M) = \lambda \cdot M & \Leftrightarrow & TMT = \lambda \cdot M \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a & a+b+c \\ 0 & c \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)\, a & & & & & = & 0 \\ a & + & (1-\lambda)\, b & + & c & = & 0 \\ & & & & (1-\lambda)\, c & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Or $\lambda \neq 1$, donc on obtient : $a = 0$ et $c = 0$.
Ainsi : $(1 - \lambda)\ b = 0$, et donc $b = 0$ car $\lambda \neq 1$.
On en conclut que $M = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \neq 1, \text{ l'unique solution de l'équation } f(M) = \lambda\, M \text{ est } M = 0.}$$

□

On note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Calculer H^2, puis pour tout a de $\mathbb{R}$ et tout n de $\mathbb{N}$, $(I + aH)^n$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\boxed{H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

- Soit $a \in \mathbb{R}$.
  Les matrices I et aH commutent : $I \times aH = aH = aH \times I$.
  Soit $n \geqslant 1$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll} (I + aH)^n & = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I^{n-k}\, (aH)^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, H^k & \textit{(car } I^{n-k} = I\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k\, H^k + \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} a^k\, H^k & \textit{(car } n \geqslant 1\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^k\, H^k & \textit{(car } H^k = 0 \textit{ pour tout } k \geqslant 2 \textit{ par récurrence immédiate)} \\ & = & \binom{n}{0} a^0\, H^0 + \binom{n}{1} a^1\, H^1 & \\ & = & I + a\, n\, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ na & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \end{array}$$

- On remarque de plus que : $(I + aH)^0 = I$.
  Donc la formule précédente est valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N},\ (I + a\, H)^n = I + a\, n\, H.}$$

Commentaire

- Afin de démontrer : $\forall k \geqslant 3,\ H^k = 0$, on peut procéder de manière directe.
En effet, pour tout $k \geqslant 3$: $H^k = H^3 \times H^{k-3} = 0 \times H^{k-3} = 0$.
(on peut considérer H^{k-3} car $k-3 \geqslant 0$)
- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m,p,n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

(la deuxième somme est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 0$.
L'argument $n \geqslant 0$ est donc suffisant pour découper la somme. On traite le cas $n \geqslant 1$ dans cette question pour s'assurer que la deuxième somme ne se fait pas sur un ensemble vide d'indice.
Ceci permet d'assurer que $k \geqslant 1$ et donc d'utiliser le fait que $J^k = 4^{k-1}\, J$. □

10. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}$, F^n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On remarque que : $F = I + H = I + 1 \cdot H$.
D'après la question ***9.*** appliquée à $a = 1$, on obtient : $F^n = I + 1 \times n \cdot H$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ F^n = I + n\, H.}$$

□

11. Trouver une matrice G de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $G^3 = F$.
Existe-t-il un endomorphisme g de $\mathcal{E}$ tel que $g \circ g \circ g = f$?

Démonstration.
- D'après la question ***9.***, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $(I + a\, H)^3 = I + 3\, a\, H$.
Or $F = I + 1 \cdot H$. Donc, en choisissant $a = \dfrac{1}{3}$, on obtient :

$$\left(I + \frac{1}{3}\, H\right)^3 = I + 3 \times \frac{1}{3} \cdot H = I + H = F$$

$$\boxed{\text{Donc en posant } G = I + \frac{1}{3}\, H, \text{ on obtient : } G^3 = F.}$$

- On rappelle que $F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f)$.
On considère alors l'endomorphisme $g \in \mathscr{L}(\mathcal{E})$ tel que $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g) = G$.
D'après la relation du point précédent, on obtient :

$$\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g^3) = \big(\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(g)\big)^3 = G^3 = F = \mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(f)$$

L'application $\mathrm{Mat}_{(A,B,C)}(.)$ étant un isomorphisme, on obtient, par injectivité que : $g^3 = f$.

$$\boxed{\text{On a donc bien exhibé un endomorphisme } g \text{ de } \mathcal{E} \text{ tel que } g \circ g \circ g = f.}$$

Commentaire

Il faut retenir le schéma classique développé dans cette question :
(i) on démontre une propriété sous forme matricielle,
(ii) on en déduit une propriété sur les endomorphismes par la passerelle matrice / endomorphisme. □