Convergence/approximation et estimation

I. Intervalles de confiance

Exercice 1 : HEC 2017

PROBLÈME

Les tables de mortalité sont utilisées en démographie et en actuariat pour prévoir l'espérance de vie des individus d'une population. On s'intéresse dans ce problème à un modèle qui permet d'ajuster la durée de vie à des statistiques portant sur les décès observés au sein d'une génération.

Dans tout le problème, on note :

- a et b deux réels strictement positifs ;
- $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires du problème ;
- $G_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $G_{a,b}(x) = \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right)$.

Partie I. Loi exponentielle linéaire

1. a) Montrer que la fonction $G_{a,b}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur l'intervalle $]0, 1]$.

Démonstration.

- La fonction $G_{a,b}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ car elle est la composée $G_{a,b} = g_2 \circ g_1$ où :
  - × $g_1 : x \mapsto -ax - \dfrac{b}{2}x^2$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ car polynomiale,
    - telle que : $g_1([0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
  - × $g_2 : x \mapsto \exp(x)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$G'_{a,b}(x) = (-a - bx)\ \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) \quad = \quad - \quad \underbrace{(a + bx)}_{> 0} \quad \underbrace{\exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)}_{> 0} \quad < \quad 0$$

  La fonction $G_{a,b}$ est donc strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.
- La fonction $G_{a,b}$ est :
  - × continue sur $[0, +\infty[$,
  - × strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

  Ainsi, $G_{a,b}$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $G_{a,b}([0, +\infty[) =] \lim\limits_{x\to+\infty} G_{a,b}(x), G_{a,b}(0)]$.
  Enfin : $G_{a,b}(0) = \exp(0) = 1$.
  Et : $\lim\limits_{x\to+\infty} G_{a,b}(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } G_{a,b} \text{ réalise une bijection de } [0, +\infty[\text{ sur }]0, 1].}$$

□

b) Pour tout réel $y > 0$, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $ax + \frac{b}{2}x^2 = y$.

Démonstration.
Soit $y > 0$. Notons : $P(x) = \frac{b}{2}\ x^2 + ax - y$.

- Calculons le discriminant du polynôme P :

$$\Delta = a^2 - 4 \times \frac{b}{2} \times (-y) = a^2 + 2by \ > \ 0$$

- On en déduit que P admet exactement deux racines notées r_+ et r_- :

$$r_+ = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2\frac{b}{2}} = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2by}}{b} \qquad \text{et} \qquad r_- = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2\frac{b}{2}} = -\frac{a + \sqrt{a^2 + 2by}}{b}$$

- Or $b > 0$ et $y > 0$ donc $a^2 + 2by > a^2$ et $\sqrt{a^2 + 2by} > \sqrt{a^2} = |a| = a$.
  On en déduit que $r_+ > 0$.
  D'autre part, $r_- < 0$ car $a > 0$, $\sqrt{a^2 + 2by} > 0$ et $b > 0$.

$$\boxed{\text{L'équation } ax + \frac{b}{2}x^2 = y \text{ admet deux solutions : } r_+ > 0 \text{ et } r_- < 0.}$$

□

c) On note $G_{a,b}^{-1}$ la bijection réciproque de $G_{a,b}$.
Quelle est, pour tout $u \in [0, 1[$, l'expression de $G_{a,b}^{-1}(1 - u)$?

Démonstration.
Soit $u \in [0, 1[$.

- On remarque tout d'abord que $1 - u \in \ ]0, 1]$. Notons alors : $v = G_{a,b}^{-1}(1 - u)$.
  Par définition de $G_{a,b}$ et $G_{a,b}^{-1}$:

$$\begin{array}{rrcl} & v & = & G_{a,b}^{-1}(1-u) \\ \Leftrightarrow & G_{a,b}(v) & = & 1-u \\ \Leftrightarrow & \exp\left(-av - \frac{b}{2}v^2\right) & = & 1-u \\ \Leftrightarrow & -av - \frac{b}{2}v^2 & = & \ln(1-u) \\ \Leftrightarrow & av + \frac{b}{2}v^2 & = & -\ln(1-u) \end{array}$$

- Notons alors : $y = -\ln(1 - u)$. Comme $1 - u \in \ ]0, 1]$, $\ln(1 - u) \in \ ] - \infty, 0]$ et donc $y \geqslant 0$.
  On retombe alors sur l'équation de la question précédente dont la résolution est valable pour $y = 0$ (car on a toujours dans ce cas $\Delta > 0$).
  Cette équation admet pour solution :

$$r_+ = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2by}}{b} = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ \ln(1 - u)}}{b} \ \geqslant 0 \quad \text{et} \quad r_- < 0$$

- Or, comme $G_{a,b}^{-1}$ est à valeurs dans $[0, +\infty[$, on en déduit :

$$v = G_{a,b}^{-1}(1 - u) \ \Leftrightarrow \ v = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ \ln(1 - u)}}{b}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } u \in [0, 1[,\ G_{a,b}^{-1}(1 - u) = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ \ln(1 - u)}}{b}.}$$

□

2. ***a)*** Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$.

Démonstration.

- L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 G_{a,b}(x)\ dx$ est bien définie comme intégrale sur le segment $[0,1]$ de la fonction $G_{a,b}$ continue sur $[0,1]$.
- $\times$ Or : $G_{a,b}(x) = \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}\ x^2\right) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

  En effet :

$$x^2\ G_{a,b}(x) = x^2\ \exp\left(-ax - \frac{b}{2}\ x^2\right) = \frac{x^2}{(\mathrm{e}^a)^x} \times \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{b}{2}x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times 0 = 0$$

  par croissances comparées.

  $\times$ $\forall x \in [1,+\infty[$, $G_{a,b}(x) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$.

  $\times$ L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$).

  Par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$ est elle aussi convergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 G_{a,b}(x)\ dx \text{ est convergente.}}$$

□

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{b}{2\pi}} \times \exp\left(-\dfrac{1}{2}b\left(x + \dfrac{a}{b}\right)^2\right)$.
Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres (espérance et variance).

Démonstration.

- On rappelle qu'une v.a.r. X suit la loi normale de paramètres (m,σ^2) si :

  a) $X(\Omega) = \mathbb{R}$,

  b) X admet pour densité la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\ \sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2}$ (définie sur $\mathbb{R}$).
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}b\left(x + \frac{a}{b}\right)^2\right) \\
&= \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}b\left(\frac{bx+a}{b}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{b}}\ \sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{b}\ \frac{\cancel{b}(x+\frac{a}{b})}{\cancel{b}}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{b}}\ \sqrt{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x+\frac{a}{b}}{\frac{1}{\sqrt{b}}}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } f \text{ est la densité d'une v.a.r. } X \text{ qui suit la loi } \mathcal{N}\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right). \\ \text{Ainsi, } \mathbb{E}(X) = -\dfrac{a}{b} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{b}.\end{array}}$$

□

c) Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.
Déduire de la question ***2.b)***, l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)$$

Démonstration.

- Soit $x \in [0, +\infty[$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} -ax - \frac{b}{2}\ x^2 &= -\frac{1}{2}\ b\ \left(2\ \frac{a}{b}\ x + x^2\right) \\ &= -\frac{1}{2}\ b\ \left(\left(x + \frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a^2}{b^2}\right) = -\frac{1}{2}\ b\ \left(x + \frac{a}{b}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{b} \end{aligned}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned} G_{a,b}(x) &= \exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\ b\ \left(x + \frac{a}{b}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{b}\right) \\ &= \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \exp\left(-\frac{1}{2}\ b\ \left(x + \frac{a}{b}\right)^2\right) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\ b\ \left(x + \frac{a}{b}\right)^2\right) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times f(x) \end{aligned}$$

- Et ainsi :

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \int_0^{+\infty} f(x)\ dx$$

- On rappelle : $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) \ \Leftrightarrow\ X^* = \dfrac{X - (-\frac{a}{b})}{\frac{1}{\sqrt{b}}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

  On effectue alors le changement de variable $u = \dfrac{x + \frac{a}{b}}{\frac{1}{\sqrt{b}}}$, autrement dit $\boxed{u = \sqrt{b}\ \left(x + \frac{a}{b}\right)}$:

  $u = \sqrt{b}\ \left(x + \dfrac{a}{b}\right)$ (et donc $x = \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ u - \dfrac{a}{b}$)
  $\hookrightarrow du = \sqrt{b}\ dx$ et $dx = \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ du$
  - $x = 0 \ \Rightarrow\ u = \dfrac{a}{\sqrt{b}}$
  - $x = +\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty$

  Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{b}}u - \dfrac{a}{b}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[\frac{a}{\sqrt{b}}, +\infty[$.

Et donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)\ dx &= \sqrt{\frac{b}{2\pi}}\ \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\ b\ \left(x+\frac{a}{b}\right)^2\right)\ dx \\
&= \sqrt{\frac{b}{2\pi}}\ \int_{\frac{a}{\sqrt{b}}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\ u^2\right)\ \frac{1}{\sqrt{b}}\ du \ = \ \int_{\frac{a}{\sqrt{b}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\ du \\
&= \int_{\frac{a}{\sqrt{b}}}^{+\infty} \varphi(u)\ du \ = \ 1 - \int_{+\infty}^{\frac{a}{\sqrt{b}}} \varphi(u)\ du \ = \ 1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) \ = \ \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)}$$

Commentaire

On utilise ici la propriété : $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m,\sigma^2\right) \ \Leftrightarrow\ X^* = \dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)}$

dans le cas particulier où $m = -\dfrac{a}{b}$ et $\sigma^2 = \dfrac{1}{b}$ (propriété à connaître !).

□

3. Pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$, on pose : $f_{a,b}(x) = \begin{cases} (a+bx)\ \exp\left(-ax-\dfrac{b}{2}x^2\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

a) Justifier que la fonction $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle linéaire de paramètres a et b, notée $\mathcal{E}_\ell(a,b)$, si elle admet $f_{a,b}$ pour densité.

Démonstration.

On vérifie les trois propriétés des densités de probabilité.

(i) La fonction $f_{a,b}$ est :

× continue sur $]-\infty,0[$ car constante sur cet intervalle,

× continue sur $]0,+\infty[$ comme composée et produit de fonctions continues sur $]0,+\infty[$.

(ii) D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{a,b}(x) \geqslant 0$ car :

× si $x \geqslant 0$: $f_{a,b}(x) = (a+bx)\exp\left(-ax-\dfrac{b}{2}x^2\right) > 0$ (car $a > 0$ et $b > 0$),

× si $x < 0$: $f_{a,b}(x) = 0 \geqslant 0$.

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)\ dx = \int_0^{+\infty} f_{a,b}(x)\ dx$ car $f_{a,b}$ est nulle en dehors de $[0,+\infty[$.

La fonction $f_{a,b}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

Soit $A \in [0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{A} f_{a,b}(x)\ dx &= \int_0^{A} (a+bx)\ \exp\left(-ax-\frac{b}{2}x^2\right)\ dx \\
&= -\left[\ \exp\left(-ax-\frac{b}{2}x^2\right)\ \right]_0^A \\
&= -\left(\exp\left(-aA-\frac{b}{2}A^2\right) - \exp(0)\right) \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-aA} \times \mathrm{e}^{-\frac{b}{2}A^2} \ \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}\ 1
\end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)\ dx$ est convergente et vaut 1.

$$\boxed{\text{On en conclut que } f_{a,b} \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

b) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ telle que : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f_{a,b}(x)\ dx$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour des calculs de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_{a,b}(x)\ dx$.
- La fonction $f_{a,b}$ est nulle en dehors de $[0,+\infty[$. Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{a,b}(x)\ dx = \int_0^{+\infty} x f_{a,b}(x)\ dx$$

- Soit $A \in [0,+\infty[$.
La fonction $x \mapsto x\ f_{a,b}(x)$ est continue par morceaux sur $[0,A]$.
On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x & \quad & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & f_{a,b}(x) & & v(x) & = & -G_{a,b}(x) \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,A]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^A x\ f_{a,b}(x)\ dx &= \left[\ -x\ G_{a,b}(x)\ \right]_0^A + \int_0^A G_{a,b}(x)\ dx \\ &= -(A\ G_{a,b}(A) - 0) + \int_0^A G_{a,b}(x)\ dx \end{aligned}$$

De plus, par croissances comparées :

$$A\ G_{a,b}(A) = A\ \exp\left(-aA - \frac{b}{2}\ A^2\right) = \frac{A}{(\mathrm{e}^a)^A} \times \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{b}{2}A^2}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \times 0 = 0$$

Et, comme l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$ est convergente d'après la question ***2.a)*** :

$$\int_0^A x\ f_{a,b}(x)\ dx \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + \int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ admet une espérance et que } \mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\ dx.}$$

□

4. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $X = \dfrac{-a+\sqrt{a^2+2bY}}{b}$.

a) Justifier que pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\mathbb{P}([X \geqslant x]) = G_{a,b}(x)$.

Démonstration.

- D'après la question ***1.c)*** :

$$\forall u \in [0,1[,\ G_{a,b}^{-1}(1-u) = \frac{-a+\sqrt{a^2-2b\ \ln(1-u)}}{b}$$

On remarque :

$$-\ln(1-u) = y \ \Leftrightarrow\ \ln(1-u) = -y \ \Leftrightarrow\ 1-u = \mathrm{e}^{-y} \ \Leftrightarrow\ u = 1-\mathrm{e}^{-y}$$

Si $y \geqslant 0$, $\mathrm{e}^{-y} \in \,]0,1]$ et donc $u \in [0,1[$.
On peut donc appliquer la formule précédente et on obtient :

$$G_{a,b}^{-1}(\mathrm{e}^{-y}) = \frac{-a+\sqrt{a^2+2b\ y}}{b}$$

- Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, $Y(\Omega) = [0,+\infty[$. Ainsi, d'après ce qui précède : $X = G_{a,b}^{-1}(\mathrm{e}^{-Y})$.

On a alors, pour tout $x \in [0,+\infty[$:

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X \geqslant x]) & = & \mathbb{P}\left(\left[G_{a,b}^{-1}(\mathrm{e}^{-Y}) \ \geqslant\ x\right]\right) & \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[\mathrm{e}^{-Y} \ \leqslant\ G_{a,b}(x)\right]\right) & \textit{(par stricte décroissance de } G_{a,b} \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}([-Y \ \leqslant\ \ln(G_{a,b}(x))]) & \textit{(par stricte croissance de } \ln \textit{ sur }]0,1]\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}([Y \ \geqslant\ -\ln(G_{a,b}(x))]) & \\
& = & 1-\mathbb{P}([Y \ <\ -\ln(G_{a,b}(x))]) & \\
& = & 1-F_y(-\ln(G_{a,b}(x))) & \textit{(car } Y \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\
& = & \cancel{1}-(\cancel{1}-\mathrm{e}^{-(-\ln(G_{a,b}(x)))}) & \textit{(car } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } -\ln(G_{a,b}(x)) \geqslant 0\textit{)} \\
& = & \mathrm{e}^{\ln(G_{a,b}(x))} \ = \ G_{a,b}(x) &
\end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,+\infty[,\ \mathbb{P}([X \geqslant x]) = G_{a,b}(x)}$$

Commentaire

- Il est aussi possible de traiter cette question même sans avoir traité la question ***1.c)***. Précisons ci-dessous cette rédaction :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \geqslant x]) &= \mathbb{P}\left(\left[\frac{-a+\sqrt{a^2+2bY}}{b} \geqslant x\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[-a+\sqrt{a^2+2bY} \geqslant bx\right]\right) && \textit{(car } b>0\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{a^2+2bY} \geqslant a+bx\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[a^2+2bY \geqslant (a+bx)^2\right]\right) && \textit{(par stricte croissance de la fonction élévation au carré sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\left(\left[2bY \geqslant (a+bx)^2-a^2\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[Y \geqslant \frac{1}{2b}\left((a+bx)^2-a^2\right)\right]\right) && \textit{(car } 2b>0\textit{)}
\end{aligned}$$

On remarque alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2b}\left((a+bx)^2-a^2\right) &= \frac{1}{2b}\left((\cancel{a^2}+2ab\ x+b^2x^2)-\cancel{a^2}\right) \\
&= a\ x+\frac{b}{2}\ x^2
\end{aligned}$$

Et, en reprenant le calcul précédent :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \geqslant x]) &= \mathbb{P}\left(\left[Y \geqslant a\ x+\frac{b}{2}\ x^2\right]\right) \\
&= 1-\mathbb{P}\left(\left[Y < a\ x+\frac{b}{2}\ x^2\right]\right) \\
&= \cancel{1}-\left(\cancel{1}-\mathrm{e}^{-(a\ x+\frac{b}{2}\ x^2)}\right) && \textit{(car } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } a\ x+\frac{b}{2}\ x^2 \geqslant 0\textit{)} \\
&= \exp\left(-a\ x-\frac{b}{2}\ x^2\right) = G_{a,b}(x)
\end{aligned}$$

- En réalité, il s'agit de deux présentations différentes d'une seule et même démonstration. Il s'agit simplement « d'inverser » l'inégalité : $X \geqslant x$, c'est-à-dire d'isoler Y.
  - × dans la première rédaction, on sait que $X = G_{a,b}^{-1}(Y)$ et il suffit donc d'appliquer $G_{a,b}$ de part et d'autre. On aboutit tout de suite à l'inégalité : $Y \geqslant a\ x+\frac{b}{2}\ x^2$.
  (notée $Y \geqslant -\ln(G_{a,b}(x))$ dans la démonstration)
  - × dans la deuxième rédaction, on prend moins de recul : on part de la définition de X donnée par l'énoncé et, par opérations successives, on tombe encore une fois sur l'inégalité : $Y \geqslant a\ x+\frac{b}{2}\ x^2$.

$\square$

b) En déduire que X suit la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$.

Démonstration.

- Notons $g : x \mapsto \dfrac{-a+\sqrt{a^2+2b\ x}}{b}$. Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \big(g(Y)\big)\ (\Omega) \\ & = & g\ \big(Y(\Omega)\big) \\ & = & g\ \big([0,+\infty[\big) \end{array}$$

Or, comme g est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$:

$$g\ \big([0,+\infty[\big) = \ [g(0), \lim_{x\to+\infty} g(x)[= \ [0,+\infty[$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } X(\Omega) = [0,+\infty[.}$$

- Déterminons alors la fonction de répartition de X.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

  × Si $x < 0$ alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ car $X(\Omega) = [0,+\infty[$. Ainsi :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = 0$$

  × Si $x \geqslant 0$ alors :

$$\begin{array}{rcll} F_X(x) & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) & \\ & = & 1-\mathbb{P}([X > x]) & \\ & = & 1-G_{a,b}(x) & \textit{(en reprenant la démonstration précédente} \\ & & & \textit{en remplaçant } [X \geqslant x] \textit{ par } [X > x]\textit{)} \end{array}$$

En résumé :

$$F_X \ : \ x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-G_{a,b}(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right.$$

- La fonction F_X est :

  1) continue sur $\mathbb{R}$ puisque :

  × $x \mapsto 1-G_{a,b}(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$ car $G_{a,b}$ l'est.

  × $x \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty,0[$.

  × $\lim\limits_{x\to 0} (1-G_{a,b}(x)) = 1-1 = 0 = F_X(0) = \lim\limits_{x\to 0} 0.$

  2) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$ car :

  × $x \mapsto 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$,

  × $x \mapsto 1-G_{a,b}(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ car $G_{a,b}$ l'est.

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- On obtient une densité f_X de X en dérivant sur les intervalles ouverts.
  On **pose** de plus : $f_X(0) = (a + b \times 0)\ \exp(0) = a$.

$$f_X \ : \ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (a+bx)\ \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f_X \text{ coïncide avec } f_{a,b}\text{. On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(a,b).}$$

Commentaire

- L'énoncé demande de déterminer, en question ***4.a)*** : $\mathbb{P}([X \geqslant x])$. Le caractère large de l'inégalité est étonnant puisque pour déterminer la fonction de répartition de X on se sert de l'égalité :

$$\mathbb{P}([X \leqslant x]) = 1 - \mathbb{P}([X > x])$$

- Ce choix est validé après coup puisqu'on démontre, **après avoir déterminé** F_X, que X est une v.a.r. à densité et donc : $\mathbb{P}([X \geqslant x]) = \mathbb{P}([X > x])$.
- La même remarque peut être faite en question ***7.***. Par contre, la question ***8.a)*** ne détaillant pas précisément la méthode à suivre, on en profitera pour déterminer $\mathbb{P}([U_n > x])$, ce qui est bien plus judicieux (d'autant plus que la v.a.r. U_n étudiée n'est pas à densité !).

$\square$

c) On note U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Déterminer la loi de la variable aléatoire $G_{a,b}^{-1}(1-U)$.

Démonstration.

- Si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ et $\lambda > 0$, alors $-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
  On note alors : $Y = -\ln(1-U)$. On obtient ainsi $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
- Or, comme vu en question ***4.a)*** et ***4.b)*** :

$$G_{a,b}^{-1}(\mathrm{e}^{-Y}) \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(a,b)$$

- On remarque enfin :

$$\mathrm{e}^{-Y} = \mathrm{e}^{-(-\ln(1-U))} = \mathrm{e}^{\ln(1-U)} = 1 - U$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } G_{a,b}^{-1}(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(a,b).}$$

Commentaire

- Rappelons que si $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ alors $V = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
  C'est un attendu du programme qu'on demande souvent de démontrer dans les énoncés. Rappelons ici la démonstration.
- Notons $g : x \mapsto -\frac{1}{\lambda}\ \ln(1-x)$. Tout d'abord :

$$V(\Omega) \ = \ \big(g(U)\big)\ (\Omega) \ = \ g\ \big(U(\Omega)\big) \ = \ g\ \big([0,1[\big) \ = \ [0,+\infty[$$

En effet, comme g est continue et strictement croissante sur $[0,1[$:

$$g\ \big([0,1[\big) = \ [g(0), \lim_{x\to 1} g(x)[\ = \ [0,+\infty[$$

- Déterminons la fonction de répartition de V.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  × Si $x < 0$, alors $[V \leqslant x] = \varnothing$ car $V(\Omega) = [0,+\infty[$. Donc :

$$F_V(x) = \mathbb{P}([V \leqslant X]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × Si $x \geqslant 0$.

$$\begin{array}{rcll} F_V(x) & = & \mathbb{P}([V \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[-\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(1-U) \geqslant -\lambda x]) & \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[1-U \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[U \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) & \\ & = & F_U\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) & \\ & = & 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \textit{(car } 1-e^{-\lambda x} \in [0,1[\textit{)} \end{array}$$

- Il est possible de faire une démonstration identique à celle de la question ***4.a)***. En reprenant la 2ème rédaction et en posant : $Y = \ln(1-U)$, on obtient, pour tout $x \geqslant 0$:

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X \geqslant x]) & = & 1-\mathbb{P}\left(\left[Y < a\ x + \dfrac{b}{2}\ x^2\right]\right) \ = \ 1-\mathbb{P}\left(\left[-\ln(1-U) < a\ x + \dfrac{b}{2}\ x^2\right]\right) & \\ & = & 1-\mathbb{P}\left(\left[\ln(1-U) > -a\ x - \dfrac{b}{2}\ x^2\right]\right) & \\ & = & 1-\mathbb{P}\left(\left[1-U > \exp\left(-a\ x - \dfrac{b}{2}\ x^2\right)\right]\right) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & 1-\mathbb{P}\left(\left[U < 1-\exp\left(-a\ x - \dfrac{b}{2}\ x^2\right)\right]\right) & \\ & = & \cancel{1} - \left(\cancel{1} - \exp\left(-a\ x - \dfrac{b}{2}\ x^2\right)\right) \ = \ G_{a,b}(x) & \end{array}$$

et on conclut en utilisant la question ***4.b)***.

$\square$

5. La fonction **Scilab** suivante génère des simulations de la loi exponentielle linéaire.

```
1 function x = grandlinexp(a,b,n)
2     u = rand(n,1)
3     y = ...........
4     x = (-a + sqrt(a ^ 2 + 2 ⋆ b ⋆ y)) / b
5 endfunction
```

a) Quelle est la signification de la ligne de code 2 ?

Démonstration.

L'instruction `rand(n,1)` renvoie un vecteur colonne de taille `n` $\times$ 1 contenant le résultat de la simulation de `n` v.a.r. aléatoires indépendantes qui suivent toutes la même loi $\mathcal{U}([0,1])$.

b) Compléter la ligne de code 3 pour que la fonction `grandlinexp` génère les simulations désirées.

Démonstration.
D'après la question ***4.c)***, il suffit d'écrire :

```
3     y = - log(1 - u)
```

6. De quel nombre réel peut-on penser que les six valeurs générées par la boucle **Scilab** suivante fourniront des valeurs approchées de plus en plus précises et pourquoi ?

```
for k = 1:6
    mean(grandlinexp(0, 1, 10 ^ k))
end
```

Démonstration.

- Soit X une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(0,1)$.
  Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on considère $(X_1, \dots, X_m)$ un m-échantillon de la v.a.r. X.
  Autrement dit, on considère $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes et toutes de même loi $\mathcal{E}_\ell(0,1)$. On note alors :
  $$\overline{X_m} = \frac{X_1 + \ldots + X_m}{m}$$
  la v.a.r. donnant la moyenne empirique associée à v.a.r. X.
- Pour chaque `k`, l'instruction `mean(grandlinexp(0, 1, 10 ^ k))` permet de simuler la v.a.r. $\overline{X_{10^{\mathtt{k}}}}$.
- En vertu de la loi faible des grands nombres, la v.a.r. $\overline{X_{10^{\mathtt{k}}}}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire constante égale à $\mathbb{E}(X)$.
- L'entier `k` prenant des valeurs de plus en plus grandes (on considère une simulation de $\overline{X_{10}}$, puis $\overline{X_{100}}$, ..., puis $\overline{X_{1000000}}$), on peut penser que le résultat sera de plus en plus proche de $\mathbb{E}(X)$.

Les six valeurs générées par la boucle **Scilab** fourniront des valeurs de plus en plus précises de $\mathbb{E}(X)$.

Dans la suite du problème, on note $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi exponentielle linéaire $\mathcal{E}_\ell(a,b)$ dont les paramètres $a>0$ et $b>0$ sont inconnus.
Soit h un entier supérieur ou égal à 2. On suit pendant une période de h années, une « cohorte » de n individus de même âge au début de l'étude et on modélise leurs durées de vie respectives à partir de cette date par les variables aléatoires X_1, X_2, …, X_n.

Partie II. Premier décès et intervalle de confiance de a

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les variables aléatoires M_n, H_n et U_n par :

$$M_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad H_n = \min(h, X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \text{et} \quad U_n = nH_n.$$

7. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la probabilité $\mathbb{P}([M_n \geqslant x])$.
Reconnaître la loi de la variable aléatoire M_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord : $M_n(\Omega) \subset [0,+\infty[$. En effet : $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $X_i(\Omega) = [0,+\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x<0$ alors $[M_n \geqslant x] = \Omega$ car $M_n(\Omega) \subset [0,+\infty[$.
    Ainsi : $\mathbb{P}([M_n \geqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
  - × si $x \geqslant 0$ alors :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([M_n \geqslant x]) & = & \mathbb{P}([\min(X_1,\dots,X_n) \geqslant x]) & \\
& = & \mathbb{P}([X_1 \geqslant x] \ \cap\ \dots\ \cap\ [X_n \geqslant x]) & \\
& = & \mathbb{P}([X_1 \geqslant x]) \ \times\ \dots\ \times\ \mathbb{P}([X_n \geqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & G_{a,b}(x) \ \times\ \dots\ \times\ G_{a,b}(x) & \textit{(d'après la question } \boldsymbol{4.a)}\textit{)} \\
& = & (G_{a,b}(x))^n &
\end{array}$$

  Enfin, comme $\mathbb{P}([M_n \leqslant x]) = 1 - \mathbb{P}([M_n > x])$ (on peut remplacer, sans modification du résultat, $[M_n \geqslant x]$ par $[M_n > x]$ dans la démonstration ci-dessus), on obtient :

$$F_{M_n} \ : \ x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (G_{a,b}(x))^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right.$$

- La fonction F_{M_n} (*cf* ***4.b)***) est :
  1) continue sur $\mathbb{R}$,
  2) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$.
  On en déduit que M_n est une v.a.r. à densité.
- On obtient une densité f_{M_n} de M_n en dérivant F_{M_n} sur les intervalles ouverts.
  On choisit de plus : $f_{M_n}(0) = -n\ (G_{a,b}(0))^{n-1}\ G'_{a,b}(0)$. On obtient :

$$f_{M_n} \ : \ x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ -n\ (G_{a,b}(x))^{n-1}\ G'_{a,b}(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right.$$

Or :

$$\begin{array}{rcl} -n\ (G_{a,b}(x))^{n-1}\ G'_{a,b}(x) & = & -n\ \left(\exp\left(-ax - \frac{b}{2}\ x^2\right)\right)^{n-1}\ (-a-bx)\ \exp\left(-ax - \frac{b}{2}\ x^2\right) \\ & = & n\ (a+bx)\ \left(\exp\left(-ax - \frac{b}{2}\ x^2\right)\right)^{n} \\ & = & ((na)+(nb)x)\ \exp\left(-(na)x - \frac{(nb)}{2}\ x^2\right)\ =\ f_{na,nb}(x) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } M_n \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(na,nb).}$$

□

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_{U_n} la fonction de répartition de la variable aléatoire U_n.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F_{U_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-ax - \dfrac{b}{2n}x^2\right) & \text{si } 0 \leqslant x < nh \\ 1 & \text{si } x \geqslant nh \end{cases}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Commençons par déterminer $U_n(\Omega)$.
  Remarquons tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} H_n & = & \min(h, X_1, X_2, \dots, X_n) \\ & = & \min(h, \min(X_1, X_2, \dots, X_n)) \\ & = & \min(h, M_n) \end{array}$$

  On en déduit : $H_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

$$\boxed{U_n(\Omega) \subset [0, +\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  × si $x < 0$ alors $[U_n > x] = \Omega$ car $U_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
  Ainsi, $\mathbb{P}([U_n > x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
  × si $x \in [0, nh[$ alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([U_n > x]) & = & \mathbb{P}([nH_n > x]) & \\ & = & \mathbb{P}(\left[H_n > \frac{x}{n}\right]) & \textit{(puisque } n > 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}(\left[\min(h, M_n) > \frac{x}{n}\right]) & \\ & = & \mathbb{P}(\left[h > \frac{x}{n}\right] \cap \left[M_n > \frac{x}{n}\right]) & \\ & = & \mathbb{P}(\left[h > \frac{x}{n}\right])\ \times\ \mathbb{P}(\left[M_n > \frac{x}{n}\right]) & \textit{(car la v.a.r. constante } h \textit{ et la v.a.r. } M_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & 1\ \times\ \mathbb{P}(\left[M_n > \frac{x}{n}\right]) & \textit{(car } [x < nh] = \Omega \textit{ puisque } x \in [0, nh[\textit{)} \\ & = & \left(G_{a,b}(\frac{x}{n})\right)^n & \textit{(d'après la question 7)} \end{array}$$

  × si $x \geqslant nh$ alors (en reprenant la démonstration ci-dessus) :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([U_n > x]) & = & \mathbb{P}(\left[h > \frac{x}{n}\right])\ \times\ \mathbb{P}(\left[M_n > \frac{x}{n}\right]) & \\ & = & 0\ \times\ \mathbb{P}(\left[M_n > \frac{x}{n}\right])\ =\ 0 & \textit{(car } [x < nh] = \varnothing \textit{ puisque } x \geqslant nh\textit{)} \end{array}$$

- Enfin, comme $\mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = 1 - \mathbb{P}([U_n > x])$, on obtient :

$$\boxed{F_{U_n} \ : \ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(G_{a,b}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n & \text{si } x \in [0, nh[\\ 1 & \text{si } x \geqslant nh \end{cases}}$$

Il suffit alors de remarquer :

$$\left(G_{a,b}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = \exp\left(-a\frac{x}{n} - \frac{b}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2\right)^n = \exp\left(-a\cancel{n}\frac{x}{\cancel{n}} - \frac{b}{2}\cancel{n}\frac{x^2}{n^{\cancel{2}}}\right) = \exp\left(-ax - \frac{b}{2n}x^2\right)$$ □

b) Étudier la continuité de la fonction F_{U_n}.

Démonstration.
La fonction F_{U_n} est :

× continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]nh, +\infty[$ car constante sur chacun de ces intervalles.

× continue sur $]0, nh[$ car $G_{a,b}$ l'est sur $[0, +\infty[$.

× continue en 0 puisque :

1) $\lim\limits_{x \to 0^-} F_{U_n}(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$,

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} F_{U_n}(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 - \left(G_{a,b}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = 1 - (G_{a,b}(0))^n = 1 - 1^n = 0$,

3) $F_{U_n}(0) = 0$.

× non continue en nh. En effet :

$$\lim_{x \to (nh)^-} F_{U_n}(x) = \lim_{x \to nh} 1 - \left(G_{a,b}\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n = 1 - \left(G_{a,b}\left(\frac{nh}{n}\right)\right)^n = 1 - \exp\left(-anh - \frac{b}{2\cancel{n}}n^{\cancel{2}}\ h^2\right) < 1$$

et $F_{U_n}(nh) = 1$

$$\boxed{\text{Ainsi, } F_{U_n} \text{ est continue uniquement sur }]-\infty, nh[\text{ et sur }]nh, +\infty[.}$$ □

c) La variable aléatoire U_n admet-elle une densité ?

Démonstration.

D'après la question précédente, F_{U_n} n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, U_n n'est pas une variable à densité. □

d) Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Démonstration.
Deux cas se présentent.

- Si $x < 0$ alors :

$$\lim_{n \to +\infty} F_{U_n}(x) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$$

- Si $x \geqslant 0$ alors, pour n suffisamment grand (plus précisément pour tout $n > \left\lceil \frac{x}{h} \right\rceil$) :

$$\lim_{n \to +\infty} F_{U_n}(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \exp\left(-ax - \frac{b}{2n}x^2\right)\right) = 1 - \exp(-ax)$$

- On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z telle que $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \text{ où } Z \hookrightarrow \mathcal{E}(a).}$$

□

9. Soit $\alpha \in]0,1[$.

a) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.
Trouver deux réels c et d strictement positifs tels que :

$$\mathbb{P}([c \leqslant Y \leqslant d]) = 1 - \alpha \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Y \leqslant c]) = \frac{\alpha}{2}$$

Démonstration.

- Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et que les réels c et d doivent être strictement positifs :

$$\mathbb{P}([c \leqslant Y \leqslant d]) \;=\; F_Y(d) - F_Y(c) \;=\; (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-d}) - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-c}) \;=\; \mathrm{e}^{-c} - \mathrm{e}^{-d}$$

$$\mathbb{P}([Y \leqslant c]) \;=\; F_Y(c) \;=\; 1 - \mathrm{e}^{-c}$$

- On obtient ainsi :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \mathrm{e}^{-c} & - & \mathrm{e}^{-d} & = & 1-\alpha \\ -\mathrm{e}^{-c} & & & = & -1+\dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} & - & \mathrm{e}^{-d} & = & -\dfrac{\alpha}{2} \\ -\mathrm{e}^{-c} & & & = & -1+\dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{e}^{-d} = \dfrac{\alpha}{2} \\ \mathrm{e}^{-c} = 1 - \dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -d = \ln\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) \\ -c = \ln\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right) \end{array}\right.$$

Ainsi, $c = -\ln\left(1 - \dfrac{\alpha}{2}\right) > 0$ car $1 - \dfrac{\alpha}{2} \in]0,1[$ puisque $\alpha \in]0,1[$.

De même, $d = -\ln\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) > 0$ car $\dfrac{\alpha}{2} \in]0,1[$.

$$\boxed{c = -\ln\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad \text{et} \quad d = -\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Commentaire

On pouvait bien évidemment faire les calculs de probabilité à l'aide d'une densité de probabilité :

$$\mathbb{P}([c \leqslant Y \leqslant d]) \;=\; \int_c^d f_Y(x)\,dx = \int_c^d 1 \times \mathrm{e}^{-x}\,dx = \left[\,-\mathrm{e}^{-x}\,\right]_c^d = -(\mathrm{e}^{-d} - \mathrm{e}^{-c}) = \mathrm{e}^{-c} - \mathrm{e}^{-d}$$

$$\mathbb{P}([Y \leqslant c]) \;=\; \int_{-\infty}^c f_Y(x)\,dx = \int_0^c \mathrm{e}^{-x}\,dx = \left[\,-\mathrm{e}^{-x}\,\right]_0^c = -(\mathrm{e}^{-c} - \mathrm{e}^{0}) = 1 - \mathrm{e}^{-c}$$

□

b) Montrer que $\left[\dfrac{c}{U_n}\ ,\ \dfrac{d}{U_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a, de niveau de confiance $1-\alpha$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\left(a \in \left[\dfrac{c}{U_n}, \dfrac{d}{U_n}\right]\right) & = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{U_n} \leqslant a \leqslant \dfrac{d}{U_n}\right]\right) & \\
& = & \mathbb{P}\left([c \leqslant a\ U_n \leqslant d]\right) & \textit{(car } U_n > 0\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{a} \leqslant U_n \leqslant \dfrac{d}{a}\right]\right) & \textit{(car } a > 0\textit{)} \\
& \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{a} \leqslant Z \leqslant \dfrac{d}{a}\right]\right) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.d)}}\textit{)}
\end{array}$$

On constate enfin :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{a} \leqslant Z \leqslant \dfrac{d}{a}\right]\right) & = & F_Z\left(\dfrac{d}{a}\right) - F_Z\left(\dfrac{c}{a}\right) & \\
& = & (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-a\frac{d}{a}}) - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-a\frac{c}{a}}) & \textit{(car } Z \hookrightarrow \mathcal{E}(a)\textit{)} \\
& = & \mathrm{e}^{-c} - \mathrm{e}^{-d} & \\
& = & 1-\alpha & \textit{(d'après la question précédente)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{P}\left(a \in \left[\dfrac{c}{U_n}, \dfrac{d}{U_n}\right]\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1-\alpha \text{ ce qui démontre que } \left[\dfrac{c}{U_n}\ ,\ \dfrac{d}{U_n}\right] \text{ est un intervalle de confiance asymptotique de } a, \text{ de niveau de confiance } 1-\alpha.}$$

Commentaire

- Avec une telle rédaction, il est difficile de comprendre pourquoi on a introduit la loi $\mathcal{E}(1)$ dans la question précédente. Pour bien comprendre ce point, on peut utiliser la propriété :
$$Z \hookrightarrow \mathcal{E}(a) \ \Leftrightarrow\ aZ \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$$
Ainsi, on peut écrire dans la rédaction précédente :
$$\mathbb{P}\left(\left[\dfrac{c}{a} \leqslant Z \leqslant \dfrac{d}{a}\right]\right) = \mathbb{P}\left([c \leqslant aZ \leqslant d]\right) = \mathbb{P}([c \leqslant Y \leqslant d]) = \mathrm{e}^{-c} - \mathrm{e}^{-d}$$
où $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
- Attention toutefois : si la transformée affine d'une v.a.r. est bien au programme, la transformée affine d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle n'est pas explicitement mentionnée. Il faudrait donc démontrer la propriété précédente ! C'est assez simple :
  × $(aZ)(\Omega) = [0, +\infty[$ car $Z(\Omega) = [0, +\infty[$ et $a > 0$.
  × Ainsi, si $x < 0$, $\mathbb{P}([aZ \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  Et si $x \geqslant 0$, $\mathbb{P}([aZ \leqslant x]) = \mathbb{P}(\left[Z \leqslant \dfrac{x}{a}\right]) = F_Z\left(\dfrac{x}{a}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-a\ \frac{x}{a}} = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
  On reconnaît la fonction de répartition d'une v.a.r. qui suit la loi $\mathcal{E}(1)$.

□

Partie III. Nombre de survivants et estimateur convergent de b

Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, soit S_i et D_i les variables aléatoires telles que :

$$S_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \geqslant h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad D_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\overline{S}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} S_i$ et $\overline{D}_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} D_i$.

10. a) Justifier que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\mathbb{E}(S_i) = G_{a,b}(h)$ et calculer $\mathbb{E}(S_i D_i)$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- Comme $S_i(\Omega) = \{0, 1\}$, la v.a.r. S_i suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$p = \mathbb{P}([X_i \geqslant h]) = G_{a,b}(h)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } S_i \text{ admet une espérance et : } \mathbb{E}(S_i) = G_{a,b}(h).}$$

- De même, $(S_i D_i)(\Omega) = \{0, 1\}$. Plus précisément :

$$S_i D_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \geqslant h \text{ et } X_i \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc la v.a.r. $S_i\, D_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$p = \mathbb{P}([X_i \geqslant h] \cap [X_i \leqslant 1]) = \mathbb{P}([h \leqslant X_i \leqslant 1]) = 0$$

En effet, $[h \leqslant X_i \leqslant 1] = \varnothing$ puisque $h \geqslant 2$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(S_i D_i) = 0.}$$

□

b) Pour quels couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, les variables aléatoires S_i et D_j sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On raisonne comme dans la question précédente.

- Comme $D_i(\Omega) = \{0, 1\}$, , la v.a.r. S_i suit une loi de Bernoulli de paramètre :

$$p = \mathbb{P}([X_i \leqslant 1]) = 1 - G_{a,b}(1)$$

$$\boxed{\text{Ainsi la v.a.r. } D_i \text{ admet une espérance et : } \mathbb{E}(D_i) = 1 - G_{a,b}(1).}$$

De plus, $\mathbb{E}(D_i) \neq 0$ puisque $G_{a,b}(1) \in \,]0, 1[$ (d'après la question ***1.a)***).

- On en déduit que D_i et S_i ne sont pas indépendantes puisque, d'après ce qui précède :

$$\mathbb{E}(S_i D_i) \ = \ 0 \ \neq \ \mathbb{E}(S_i)\, \mathbb{E}(D_i)$$

- Considérons maintenant $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $j \neq i$. Comme X_i et X_j sont indépendantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([S_i = 0] \cap [D_j = 0]) &= \mathbb{P}([X_i < h] \cap [X_j > 1]) \ = \ \mathbb{P}([X_i < h]) \times \mathbb{P}([X_j > 1]) \\ &= \mathbb{P}([S_i = 0]) \times \mathbb{P}([D_j = 0]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([S_i = 0] \cap [D_j = 1]) &= \mathbb{P}([X_i < h] \cap [X_j \leqslant 1]) \ = \ \mathbb{P}([X_i < h]) \times \mathbb{P}([X_j \leqslant 1]) \\ &= \mathbb{P}([S_i = 0]) \times \mathbb{P}([D_j = 1]) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}([S_i = 1] \cap [D_j = 0]) & = & \mathbb{P}([X_i \geqslant h] \cap [X_j > 1]) \ = \ \mathbb{P}([X_i \geqslant h]) \times \mathbb{P}([X_j > 1]) \\ & = & \mathbb{P}([S_i = 1]) \times \mathbb{P}([D_j = 0]) \\ \mathbb{P}([S_i = 1] \cap [D_j = 1]) & = & \mathbb{P}([X_i \geqslant h] \cap [X_j \leqslant 1]) \ = \ \mathbb{P}([X_i \geqslant h]) \times \mathbb{P}([X_j \leqslant 1]) \\ & = & \mathbb{P}([S_i = 1]) \times \mathbb{P}([D_j = 1])\end{array}$$

On en déduit que S_i et D_j sont indépendantes.

$$\boxed{S_i \text{ et } D_j \text{ sont indépendantes si et seulement si } i \neq j.}$$

Commentaire

- Rappelons : X et Y indépendantes $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$
  On se sert dans la démonstration de la contraposée de cet énoncé à savoir :

$$\mathbb{E}(XY) \neq \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y) \Rightarrow X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}$$

- Ce résultat `N'EST PAS` une équivalence. Autrement dit :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y) \quad \cancel{\Rightarrow} \quad X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}$$

□

c) Déduire des questions précédentes l'expression de la covariance $\text{Cov}(\overline{S_n}, \overline{D_n})$ de $\overline{S_n}$ et $\overline{D_n}$ en fonction de n, $G_{a,b}(h)$ et $G_{a,b}(1)$. Le signe de cette covariance était-il prévisible ?

Démonstration.

- D'après ce qui précède, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$:

$$\begin{array}{rcl}\text{Cov}(S_i, D_j) & = & \mathbb{E}(S_i D_j) - \mathbb{E}(S_i)\ \mathbb{E}(D_j) \ = \ 0 \qquad \textit{(car } S_i \textit{ et } D_j \textit{ sont indépendantes)} \\ \text{Cov}(S_i, D_i) & = & \mathbb{E}(S_i D_i) - \mathbb{E}(S_i)\ \mathbb{E}(D_i) \\ & = & 0 - G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1)) \\ & = & -G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1))\end{array}$$

- On a alors :

$$\begin{array}{rcll}\text{Cov}\left(\overline{S_n}, \overline{D_n}\right) & = & \text{Cov}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} S_i, \overline{D_n}\right) & \textit{(par définition de } \overline{S_n}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n}\ \text{Cov}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} S_i, \overline{D_n}\right) & \textit{(par linéarité à gauche)} \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \text{Cov}\left(S_i, \overline{D_n}\right) & \textit{(par linéarité à gauche)} \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \text{Cov}\left(S_i, \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} D_j\right) & \textit{(par définition de } \overline{D_n}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \text{Cov}(S_i, D_j) & \textit{(par linéarité à droite)}\end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(\overline{S_n}, \overline{D_n}\right) &= \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \mathrm{Cov}(S_i, D_j) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i = j}} \mathrm{Cov}(S_i, D_j) + \cancel{\frac{1}{n^2} \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} \mathrm{Cov}(S_i, D_j)} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(S_i, D_i) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \left(-G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1))\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\ n \left(-G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1))\right) = -\frac{G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1))}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}\left(\overline{S_n}, \overline{D_n}\right) = -\frac{G_{a,b}(h)\ (1 - G_{a,b}(1))}{n}}$$

- Comme $G_{a,b}(h) > 0$ et $1 - G_{a,b}(1) > 0$, $\mathrm{Cov}(\overline{S_n}, \overline{D_n}) < 0$.
  Revenons à la définition de S_i et D_i pour comprendre ce signe.
  × $S_i = 1$ (0 sinon) si le $i^{\text{ème}}$ individu de la cohorte est encore en vie après h années,
  × $D_i = 1$ (0 sinon) si le $i^{\text{ème}}$ individu de la cohorte est mort au cours de la première année.
  Ainsi, $\overline{S_n}$ représente la proportion d'individus encore en vie après h années et $\overline{D_n}$ représente la proportion d'individus morts au cours de la première année.

Lorsqu'une de ces deux proportions augmente, l'autre à tendance à diminuer. Le signe négatif de la quantité était donc prévisible. □

11. a) Montrer que $\overline{S_n}$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $G_{a,b}(h)$.

Démonstration.

- La v.a.r. $\overline{S_n}$ admet une espérance en tant que combinaison linéaire des *v.a.r.* $S_1, \ldots, S_n$ qui admettent toutes une espérance. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\overline{S_n}) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(S_i) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} G_{a,b}(h) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{10.a)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{n}\ n\ G_{a,b}(h) = G_{a,b}(h)
\end{aligned}$$

Donc : $b(\overline{S_n}) = \mathbb{E}(\overline{S_n}) - G_{a,b}(h) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \overline{S_n} \text{ est un estimateur sans biais de } G_{a,b}(h).}$$

- La v.a.r. $\overline{S_n}$ admet un moment d'ordre 2 en tant que combinaison linéaire des *v.a.r.* $S_1, \ldots, S_n$ qui sont **indépendantes** (car les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ le sont) et admettent toutes un moment d'ordre 2 puisqu'elles sont finies.
Ainsi, $\overline{S_n}$ admet un risque quadratique et d'après la décomposition biais-variance :

$$\begin{array}{rcll} r(\overline{S_n}) & = & \mathbb{V}(\overline{S_n}) + \Big(\cancel{b(\overline{S_n})}\Big)^2 & \\ & = & \mathbb{V}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} S_i\right) & \\ & = & \dfrac{1}{n^2}\, \mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} S_i\right) & \textit{(par propriété de la variance)} \\ & = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(S_i) & \begin{array}{l}\textit{(par indépendance}\\ \textit{des v.a.r. } S_1, \ldots, S_n\textit{)}\end{array} \\ & = & \dfrac{1}{n^2}\, n\, \mathbb{V}(S_1) & \begin{array}{l}\textit{(les v.a.r. } X_i \textit{ étant toutes de même loi,}\\ \textit{il en est de même des v.a.r. } S_i\textit{)}\end{array} \\ & = & \dfrac{1}{n}\, \mathbb{V}(S_1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 & \textit{(car } \mathbb{V}(S_1) \textit{ est une constante)} \end{array}$$

$$\boxed{\overline{S_n} \text{ est un estimateur convergent de } G_{a,b}(h).}$$

□

b) De quel paramètre, $\overline{D_n}$ est-il un estimateur sans biais et convergent ?

Démonstration.

- Montrons que $\overline{D_n}$ est un estimateur sans biais de $1 - G_{a,b}(1)$.
La v.a.r. $\overline{D_n}$ admet une espérance en tant que combinaison linéaire des *v.a.r.* $D_1, \ldots, D_n$ qui admettent toutes une espérance. De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(\overline{D_n}) & = & \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} D_i\right) & \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(D_i\right) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(1 - G_{a,b}(1)\right) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{10.b)}}\textit{)} \\ & = & \dfrac{1}{n}\, n\, \left(1 - G_{a,b}(1)\right) \ = \ 1 - G_{a,b}(1) & \end{array}$$

Donc : $b(\overline{D_n}) = \mathbb{E}(\overline{D_n}) - \Big(1 - G_{a,b}(1)\Big) = 0.$

$$\boxed{\overline{D_n} \text{ est un estimateur sans biais de } 1 - G_{a,b}(1).}$$

- Montrons que $\overline{D_n}$ est un estimateur convergent de $1 - G_{a,b}(1)$.
La v.a.r. $\overline{D_n}$ admet un moment d'ordre 2 comme combinaison linéaire des v.a.r. $D_1, \ldots, D_n$ qui sont **indépendantes** (car les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ le sont) et admettent toutes un moment d'ordre 2 puisqu'elles sont finies.
Ainsi, $\overline{D_n}$ admet un risque quadratique et d'après la décomposition biais-variance :

$$\begin{array}{rcll}
r(\overline{D_n}) & = & \mathbb{V}(\overline{D_n}) + \left(\cancel{b(\overline{D_n})}\right)^2 = \mathbb{V}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} D_i\right) & \\
& = & \dfrac{1}{n^2}\, \mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} D_i\right) & \textit{(par propriété de la variance)} \\
& = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(D_i) & \textit{(par indépendance des v.a.r. } D_1, \ldots, D_n\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n^2}\, n\, \mathbb{V}(D_1) & \textit{(les v.a.r. } X_i \textit{ étant toutes de même loi, il en est de même des v.a.r. } D_i\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n}\, \mathbb{V}(D_1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 & \textit{(car } \mathbb{V}(D_1) \textit{ est une constante)}
\end{array}$$

$$\boxed{\overline{D_n} \text{ est un estimateur convergent de } 1 - G_{a,b}(1).}$$

Commentaire

Le caractère « convergent » est une qualité recherchée pour un estimateur. Il permet notamment de classer entre eux les estimateurs d'un même paramètre.
Considérons par exemple un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi $\mathcal{B}(\theta)$, où $\theta \in]0, 1[$ est inconnu, et les estimateurs $T_n = X_n$ et $\overline{X_n} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
On cherche en fait à savoir si on obtient une estimation plus précise de θ en augmentant la taille de notre échantillon. C'est ce qu'indique le caractère convergent.

- Pour T_n, on sait : $T_n(\Omega) = X_n(\Omega) = \{0, 1\}$. Donc $|T_n - \theta|(\Omega) = \{\theta, 1 - \theta\}$. Donc

$$\mathbb{P}(|T_n - \theta| \geqslant \min(\theta, 1 - \theta)) = 1$$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}([|T_n - \theta| \geqslant \min(\theta, 1 - \theta)]) \neq 0$.
Donc T_n n'est pas un estimateur convergent de θ.

- Pour $\overline{X_n}$, comme cet estimateur est sans biais (se démontre grâce à la linéarité de l'espérance), on obtient :

$$\begin{array}{rcll}
r_\theta(\overline{X_n}) = \mathbb{V}(\overline{X_n}) & = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) & \textit{(par indépendance de } X_1, \ldots, X_n\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} (\theta(1 - \theta)) & \\
& = & \dfrac{\theta(1-\theta)}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 &
\end{array}$$

Donc $\overline{X_n}$ est un estimateur convergent de θ.

L'estimation de θ donnée par $\overline{X_n}$ va donc être de plus en plus précise, contrairement à celle de T_n, qui n'est pas un estimateur convergent.
Dans cet exemple, le meilleur estimateur est donc $\overline{X_n}$.

□

Commentaire

On rappelle qu'il existe deux manières de montrer qu'un estimateur T_n est convergent pour un paramètre θ.

1) La définition : T_n est un estimateur convergent de θ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|T_n - \theta| \geqslant \varepsilon) = 0.$$

2) L'utilisation du risque quadratique :

$$\lim_{n \to +\infty} r_\theta(T_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_n \text{ est un estimateur convergent de } \theta.$$

C'est la méthode employée pour la question ***11.***.
Cette méthode est à privilégier lorsque l'estimateur T_n est sans biais.

12. On pose : $z(a,b) = \ln(G_{a,b}(1))$ et $r(a,b) = \ln(G_{a,b}(h))$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n = \ln\left(1 - \overline{D}_n + \dfrac{1}{n}\right)$ et $R_n = \ln\left(\overline{S}_n + \dfrac{1}{n}\right)$.
On admet que Z_n et R_n sont des estimateurs convergents de $z(a,b)$ et $r(a,b)$ respectivement.

a) Soit ε, λ et μ des réels strictement positifs.

(i) Justifier l'inclusion suivante :

$$[|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))| \geqslant \varepsilon] \subset [\lambda |Z_n - z(a,b)| + \mu |R_n - r(a,b)| \geqslant \varepsilon].$$

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$.
Supposons : $\omega \in [|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda\, z(a,b) - \mu\, r(a,b))| \geqslant \varepsilon]$.
Autrement dit : $|(\lambda Z_n(\omega) - \mu R_n(\omega)) - (\lambda\, z(a,b) - \mu\, r(a,b))| \geqslant \varepsilon$.
Or :

$$\begin{aligned}
& |\ (\lambda Z_n(\omega) - \mu R_n(\omega)) \ - \ (\lambda\, z(a,b) - \mu\, r(a,b))\ | \\
= \ & |\ \lambda Z_n(\omega) - \lambda\, z(a,b) - \mu R_n(\omega) + \mu\, r(a,b))\ | \\
= \ & |\ \lambda(Z_n(\omega) - z(a,b)) \ - \ \mu(R_n(\omega) - r(a,b))\ | \\
\leqslant \ & |\ \lambda(Z_n(\omega) - z(a,b))\ | \ + \ |\ \mu(R_n(\omega) - r(a,b))\ | && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\
= \ & \lambda\,|\ (Z_n(\omega) - z(a,b))\ | \ + \ \mu\,|\ (R_n(\omega) - r(a,b))\ | && \textit{(car } \lambda > 0 \textit{ et } \mu > 0\textit{)}
\end{aligned}$$

Donc : $\lambda\,|\ (Z_n(\omega) - z(a,b))\ | \ + \ \mu\,|\ (R_n(\omega) - r(a,b))\ | \geqslant \varepsilon$.
Autrement dit : $\omega \in [\lambda|Z_n - z(a,b)| + \mu|R_n - r(a,b)| \geqslant \varepsilon]$.

$$\boxed{\text{D'où : } [|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))| \geqslant \varepsilon] \subset [\lambda|Z_n - z(a,b)| + \mu|R_n - r(a,b)| \geqslant \varepsilon].}$$

Commentaire

- Par définition, un événement est un ensemble. Démontrer l'inclusion de deux ensembles c'est démontrer que tout élément du premier ensemble est dans le second.
- En terme d'événement, cela signifie que si le premier événement est réalisé (il existe ω réalisant cet événement *i.e.* il existe ω appartenant à cet événement) alors le second événement est réalisé (l'élément ω précédent est aussi élément de cet événement).

□

(ii) En déduire l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}([|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))\,| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|Z_n - z(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[|R_n - r(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}\right]\right).$$

Démonstration.

- D'après la question précédente, on a déjà :

$$\mathbb{P}([|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \mathbb{P}([\lambda |Z_n - z(a,b)| + \mu |R_n - r(a,b)| \geqslant \varepsilon]) \quad (\star)$$

- On note :

$$\begin{array}{rcl} A & = & [\lambda |Z_n - z(a,b)| + \mu |R_n - r(a,b)| \geqslant \varepsilon] \\ B & = & \left[\lambda |Z_n - z(a,b)| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right] \\ C & = & \left[\mu |R_n - r(a,b)| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}\right] \end{array}$$

Si on parvient à démontrer : $A \subset B \cup C$, alors par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B \cup C)$$

Et comme :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(B \cup C) & = & \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ & \leqslant & \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \end{array}$$

En utilisant la propriété $(\star)$, on obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))| \geqslant \varepsilon]) & \leqslant & \mathbb{P}(A) & \textit{(d'après } (\star)\textit{)} \\ & \leqslant & \mathbb{P}\left(B \cup C\right) & \\ & \leqslant & \mathbb{P}\left(B\right) + \mathbb{P}\left(C\right) & \end{array}$$

ce qui permet de conclure la question.

- Il reste alors à montrer : $A \subset B \cup C$. Autrement dit :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \omega \in A \Rightarrow \omega \in B \cup C$$

ce qui équivaut par contraposée à :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \texttt{NON}(\omega \in B \cup C) \Rightarrow \texttt{NON}(\omega \in A)$$

Soit $\omega \in \Omega$. Supposons donc : $\texttt{NON}(\omega \in B \cup C)$.
Ainsi : $\omega \in \overline{B \cup C} = \overline{B} \cap \overline{C}$, ou encore :

$$\lambda |Z_n(\omega) - z(a,b)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \mu |R_n(\omega) - r(a,b)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Alors, en sommant membre à membre :

$$\lambda |Z_n(\omega) - z(a,b)| + \mu |R_n(\omega) - r(a,b)| < \varepsilon$$

D'où :

$$\omega \in [\lambda |Z_n(\omega) - z(a,b)| + \mu |R_n(\omega) - r(a,b)| < \varepsilon] = \overline{A}$$

De plus : $\omega \in \overline{A} \Leftrightarrow \texttt{NON}(\omega \in A)$.
On a donc bien démontré : $A \subset B \cup C$.

$$\boxed{\mathbb{P}([|(\lambda Z_n - \mu R_n) - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))\,| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|Z_n - z(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[|R_n - r(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}\right]\right).}$$

Commentaire

On utilise dans cette question la formule du crible : pour tout $(A, B) \in \mathscr{A}$,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

On peut distinguer 3 corollaires usuels de cette formule.

1) En toute généralité :

$$\mathbb{P}(A \cup B) \leqslant \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B),$$

car une probabilité est toujours positive.
C'est le corollaire utilisé dans cette question.
On remarquera bien que celui-ci est valable pour tout type d'événements A et B.

2) Si A et B sont incompatibles :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

En effet, si A et B sont incompatibles, alors $A \cap B = \varnothing$ et donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.

3) Si A et B sont indépendants :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B).$$

En effet, si A et B sont indépendants, alors : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$.

□

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $B_n = \dfrac{2}{h-1} Z_n - \dfrac{2}{h(h-1)} R_n$.
Montrer que B_n est un estimateur convergent du paramètre b.

Démonstration.
On pose $\lambda = \dfrac{2}{h-1}$ et $\mu = \dfrac{2}{h(h-1)}$.
On remarque que $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, car $h \geqslant 2$, et $B_n = \lambda Z_n - \mu R_n$.
D'après la question précédente et puisqu'une probabilité est toujours positive, on obtient :

$$0 \leqslant \mathbb{P}([|B_n - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))| \geqslant \varepsilon]) \leqslant \mathbb{P}\left(\left[|Z_n - z(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[|R_n - r(a,b)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}\right]\right)$$

Or :

- × par hypothèse, Z_n est un estimateur convergent de $z(a,b)$.
  D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[|Z_n - z(a,b)| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2\lambda}\right]\right) = 0$.
- × de plus, R_n est un estimateur convergent de $r(a,b)$.
  D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[|R_n - r(a,b)| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2\mu}\right]\right) = 0$.

D'après le théorème d'encadrement, on a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([|B_n - (\lambda z(a,b) - \mu r(a,b))| \geqslant \varepsilon]) = 0$$

c'est-à-dire que B_n est un estimateur convergent de $\lambda z(a,b) - \mu r(a,b)$.

Or :

$$\begin{aligned}
\lambda z(a,b) - \mu r(a,b) &= \frac{2}{h-1} \ln\left(G_{a,b}(1)\right) - \frac{2}{h(h-1)} \ln\left(G_{a,b}(h)\right) \\
&= \frac{2}{h-1} \left[\ln\left(\exp\left(-a-\frac{b}{2}\right)\right) - \frac{1}{h} \ln\left(\exp\left(-ah-\frac{b}{2}h^2\right)\right) \right] \\
&= \frac{2}{h-1} \left[\left(-a-\frac{b}{2}\right) - \frac{1}{h} \left(-ah-\frac{b}{2}h^2\right) \right] \\
&= \frac{2}{h-1} \left[-\cancel{a} - \frac{b}{2} + \cancel{a} + \frac{b}{2}h \right] \\
&= \frac{\cancel{2}}{\cancel{h-1}} \left[\frac{b}{\cancel{2}} \cancel{(h-1)} \right] \\
&= b
\end{aligned}$$

$$\boxed{B_n \text{ est un estimateur convergent de } b.}$$

Commentaire

On utilise ici la définition d'un estimateur convergent et non la propriété nécessitant le risque quadratique.

□

Exercice 2 : adapté des oraux ESCP 2005

Toutes les variables aléatoires considérées dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On considère une suite de variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ indépendantes, de même loi, à valeurs dans $[0, \theta]$, ayant pour fonction de densité :

$$f_\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x}{\theta^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 0 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

où θ est un paramètre réel strictement positif.
On note F_θ la fonction de répartition commune aux variables $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$

***1.* Étude d'un premier estimateur de θ**

a) Pour tout entier naturel non nul n, on considère la variable aléatoire $M_n = \sup(X_1, \dots, X_n)$. Déterminer une densité de M_n.

Démonstration.
On commence par déterminer $F_\theta = F_{X_1}$.

- D'après l'énoncé, $X_1(\Omega) \subset [0, \theta]$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.
  - si $x < 0$: alors $[X_1 \leqslant x] = \varnothing$.
    Ainsi, $\mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  - si $x \in [0, \theta]$:

$$\begin{array}{rcl} F_\theta(x) & = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_\theta(t)\ dt \\ & = & \cancel{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_\theta(t)\ dt} + \displaystyle\int_{0}^{x} f_\theta(t)\ dt \qquad \textit{(car } f_\theta \textit{ est nulle sur }]-\infty, 0[\textit{)} \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{x} \frac{2t}{\theta^2}\ dt \ = \ \frac{\cancel{2}}{\theta^2} \left[\frac{t^2}{\cancel{2}} \right]_0^x \\ & = & \dfrac{x^2}{\theta^2} \end{array}$$

  - si $x > \theta$: alors $[X_1 \leqslant x] = \Omega$.
    Ainsi, $\mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

$$\boxed{F_\theta : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^2}{\theta^2} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}}$$

Remarque

- L'énoncé précise que les v.a.r. X_i sont à valeurs dans $[0, \theta]$, ce qui nous a permis de mettre en place facilement la disjonction de cas. En cas d'absence de précision dans l'énoncé, le permier et dernier cas de disjonction se présentent de manière légèrement différente. Détaillons ces cas :
  - si $x < 0$:

$$F_\theta(x) \ = \ \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) \ = \ \int_{-\infty}^{x} 0\ dt \ = \ 0$$

  - si $x > \theta$:

$$\begin{array}{rcll} F_\theta(x) & = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) & \\ & = & \cancel{\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f_\theta(t)\ dt} + \displaystyle\int_{0}^{\theta} f_\theta(t)\ dt + \cancel{\displaystyle\int_{\theta}^{+\infty} f_\theta(t)\ dt} & \textit{(car } f_\theta \textit{ est nulle sur }]-\infty, 0[\textit{ et }]\theta, x]\textit{)} \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_\theta(t)\ dt & \textit{(car } f_\theta \textit{ est nulle en dehors de } [0, \theta]\textit{)} \\ & = & 1 & \textit{(car } f_\theta \textit{ est une densité de probabilité)} \end{array}$$

Déterminons alors F_{M_n}.

- D'après l'énoncé, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $X_i(\Omega) \subset [0, \theta]$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } M_n(\Omega) \subset [0, \theta].}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.
  - si $x < 0$: alors $[M_n \leqslant x] = \varnothing$.
    Ainsi, $\mathbb{P}([M_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  - si $x \in [0, \theta]$:

$$\begin{array}{rcll} F_{M_n}(x) & = & \mathbb{P}([M_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([\sup(X_1, \dots, X_n) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) \times \ldots \times \mathbb{P}([X_n \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x])^n & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \dots, X_n \textit{ ont même loi)} \\ & = & \big(F_{X_1}(x)\big)^n & \\ & = & \big(F_\theta(x)\big)^n \ = \ \left(\dfrac{x^2}{\theta^2}\right)^n & \end{array}$$

  - si $x > \theta$: alors $[M_n \leqslant x] = \Omega$.
    Ainsi, $\mathbb{P}([M_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } F_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\dfrac{x^2}{\theta^2}\right)^n & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x > \theta \end{cases}.}$$

- La fonction F_{M_n} est continue sur $\mathbb{R}$ car est la composée $F_{M_n} = G \circ F_\theta$ des fonctions :
  - F_θ continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction de répartition d'une variable à densité et telle que : $F_\theta(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
  - $G : x \mapsto x^n$ continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale.

  De même, la fonction F_{M_n} est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \theta\}$ car est la composée $F_{M_n} = G \circ F_\theta$ des fonctions :
  - F_θ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \theta\}$ car f_θ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \theta\}$ et telle que : $F_\theta\big(\mathbb{R} \setminus \{0, \theta\}\big) \subset \mathbb{R}$.
  - $G : x \mapsto x^n$ $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car polynomiale.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } M_n \text{ est une variable à densité.}}$$

- On détermine une densité f_{M_n} de la v.a.r. M_n en dérivant la fonction F_{M_n} sur les intervalles ouverts.

$$f_{M_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ n \left(\dfrac{x^2}{\theta^2}\right)^{n-1} \dfrac{2x}{\theta^2} \ = \ \dfrac{2n}{\theta^{2n}}\, x^{2n-1} & \text{si } x \in \,]0, \theta[\\ 0 & \text{si } x > \theta \end{cases}$$

  On pose alors : $f_\theta(0) = 0$ et $f_\theta(\theta) = 0$. □

b) Calculer les moments d'ordre 1 et 2 de M_n.

Démonstration.

- La v.a.r. M_n admet un moment d'ordre 1 si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_{M_n}(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour un calcul de moment.
- Tout d'abord :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_{M_n}(t)\ dt\ =\ \int_0^{\theta} t\ f_{M_n}(t)\ dt$$
car la fonction f_{M_n} est nulle en dehors de $[0, \theta]$.
- La fonction $t \mapsto t f_{M_n}(t)$ est $\mathcal{C}_m^0$ sur $[0, \theta]$.
Ainsi, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{\theta} t\ f_{M_n}(t)\ dt$ est bien définie et :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\theta} t\ f_{M_n}(t)\ dt &= \int_0^{\theta} t\ \frac{2n}{\theta^{2n}}\ t^{2n-1}\ dt && \textit{(par définition de } f_\theta\textit{)}\\
&= \frac{2n}{\theta^{2n}} \int_0^{\theta} t^{2n}\\
&= \frac{2n}{\theta^{2n}} \left[\ \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\ \right]_0^{\theta}\\
&= \frac{2n}{2n+1}\ \frac{1}{\theta^{2n}}\ \left[\ t^{2n+1}\ \right]_0^{\theta}\\
&= \frac{2n}{2n+1}\ \frac{1}{\theta^{2n}}\ \theta^{2n+1}\ =\ \frac{2n}{2n+1}\ \theta
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on en déduit que } M_n \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}_\theta(M_n) = \frac{2n}{2n+1}\ \theta.}$$

- Une rédaction analogue permet de démontrer que M_n admet un moment d'ordre 2 donné par $\displaystyle\int_0^{\theta} t^2\ f_\theta(t)\ dt$. Le calcul fournit alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\theta} t^2\ f_{M_n}(t)\ dt &= \int_0^{\theta} t^2\ \frac{2n}{\theta^{2n}}\ t^{2n-1}\ dt && \textit{(par définition de } f_\theta\textit{)}\\
&= \frac{2n}{\theta^{2n}} \int_0^{\theta} t^{2n+1}\\
&= \frac{2n}{\theta^{2n}} \left[\ \frac{t^{2n+2}}{2n+2}\ \right]_0^{\theta}\\
&= \frac{2n}{2n+2}\ \frac{1}{\theta^{2n}}\ \left[\ t^{2n+2}\ \right]_0^{\theta}\\
&= \frac{n}{n+1}\ \frac{1}{\theta^{2n}}\ \theta^{2n+2}\ =\ \frac{n}{n+1}\ \theta^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on en déduit que } M_n \text{ admet un moment d'ordre 2 et } \mathbb{E}_\theta({M_n}^2) = \frac{n}{n+1}\ \theta^2.}$$

□

c) Montrer que M_n est un estimateur biaisé de θ. Est-il asymptotiquement sans biais ?

Démonstration.

- D'après la question précédente, la v.a.r. admet une espérance et donc un biais. De plus :

$$\mathbb{E}_\theta(M_n) \;=\; \frac{2n}{2n+1}\,\theta \;\neq\; \theta$$

$$\boxed{\text{L'estimateur } M_n \text{ est biaisé, de biais : } b_\theta(M_n) = \mathbb{E}_\theta(M_n) - \theta = \left(\frac{2n}{2n+1} - 1\right)\theta = \frac{-1}{2n+1}\,\theta.}$$

- De plus, comme $\dfrac{2n}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors : $\mathbb{E}_\theta(M_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta$.

$$\boxed{\text{L'estimateur } M_n \text{ est asymptotiquement sans biais.}}$$

□

d) Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'estimateurs convergente de θ.

Démonstration.

- D'après la question ***1.b)***, la v.a.r. M_n admet un moment d'ordre 2.
  On peut donc déterminer son risque quadratique.

$$\begin{array}{rcll}
r_\theta(M_n) & = & \mathbb{E}_\theta\big((M_n-\theta)^2\big) & \\
& = & \mathbb{E}_\theta\big({M_n}^2 - 2\theta\ M_n + \theta^2\big) & \\
& = & \mathbb{E}_\theta\big({M_n}^2\big) - 2\theta\ \mathbb{E}_\theta\big(M_n\big) + \theta^2 & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
& = & \dfrac{n}{n+1}\,\theta^2 - 2\theta\dfrac{2n}{2n+1}\,\theta + \theta^2 & \textit{(d'après la question \textbf{1.b)})} \\
& = & \left(\dfrac{n}{n+1} - \dfrac{4n^2}{2n+1} + 1\right)\theta^2 & \\
& = & \left(\dfrac{n(2n+1) - 4n(n+1) + (n+1)(2n+1)}{(n+1)(2n+1)}\right)\theta^2 & \\
& = & \left(\dfrac{\cancel{2n^2} + n - \cancel{4n^2} - 4n + \cancel{2n^2} + 3n + 1}{(n+1)(2n+1)}\right)\theta^2 & \\
& = & \dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}\,\theta^2 &
\end{array}$$

$$\boxed{r_\theta(M_n) = \frac{1}{(n+1)(2n+1)}\,\theta^2}$$

- Ainsi :

$$r_\theta(M_n) = \frac{1}{(n+1)(2n+1)}\,\theta^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{On peut donc en conclure que } (M_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite d'estimateurs convergente de } \theta.}$$

Remarque

- Dans la question ***1.b)***, on a déterminé les moments d'ordre 1 et 2 de M_n.
  On a donc fait apparaître l'écriture :
  $$r_\theta(M_n) \ = \mathbb{E}_\theta\big({M_n}^2\big) - 2\theta \ \mathbb{E}_\theta\big(M_n\big) + \theta^2$$
  pour le calcul du risque quadratique.
- Dans de nombreux sujets on demande plutôt de déterminer la variance de M_n.
  Ce qui nous amène à utiliser la décomposition biais-variance afin de calculer $r_\theta(M_n)$:
  $$r_\theta(M_n) \ = \ \mathbb{V}_\theta(M_n) + \big(b_\theta(M_n)\big)^2$$

□

2. **Étude d'un second estimateur de θ**

a) Donner l'espérance et la variance de la variable $Y_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Démonstration.

- La v.a.r. Y_n admet un moment d'ordre 1 comme combinaison linéraire de v.a.r. qui admettent un moment d'ordre 1.
- On a alors :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}_\theta(Y_n) & = & \mathbb{E}_\theta\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) & \\
& = & \dfrac{1}{n}\ \mathbb{E}_\theta\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\theta(X_i) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
& = & \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\theta(X_1) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi)} \\
& = & \dfrac{1}{\cancel{n}}\ \cancel{n}\ \mathbb{E}_\theta(X_1) & \\
& = & \mathbb{E}_\theta(M_1) & \textit{(car } M_1 = \sup(X_1) = X_1\textit{)} \\
& = & \dfrac{2 \times 1}{2 \times 1 + 1}\ \theta \ = \ \dfrac{2}{3}\ \theta & \textit{(d'après la question } \mathbf{1.b)}\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}_\theta(Y_n) = \mathbb{E}_\theta(X_1) = \dfrac{2}{3}\ \theta}$$

- La v.a.r. Y_n admet un moment d'ordre 2 comme combinaison linéaire de v.a.r. **indépendantes** qui admettent un moment d'ordre 2.
- On a alors :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(Y_n) & = & \mathbb{V}\left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) & \\
& = & \dfrac{1}{n^2}\ \mathbb{E}_\theta\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) & \textit{(par propriété de la variance)} \\
& = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) & \textit{(par indépendance des v.a.r. } X_1, \ldots, X_n\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_1) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi)} \\
& = & \dfrac{1}{n^{\cancel{2}}}\ \cancel{n}\ \mathbb{V}(X_1) & \\
& = & \dfrac{\mathbb{V}(M_1)}{n} & \textit{(car } M_1 = \sup(X_1) = X_1\textit{)} \\
& = & \dfrac{1}{n}\ \Big(\mathbb{E}_\theta\big({M_1}^2\big) - \big(\mathbb{E}_\theta(M_1)\big)^2\Big) & \textit{(d'après la formule de Kœnig-Huygens)} \\
& = & \dfrac{1}{n}\ \left(\dfrac{1}{1+1}\ \theta^2 - \left(\dfrac{2}{3}\ \theta\right)^2\right) & \\
& = & \dfrac{1}{n}\ \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{9}\right)\ \theta^2 \ = \ \dfrac{1}{n}\ \dfrac{9-8}{18}\ \theta^2 & \\
& = & \dfrac{\theta^2}{18\ n} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(Y_n) = \frac{\theta^2}{18\ n}}$$

□

b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'estimateurs convergente de $\dfrac{2\theta}{3}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. $\overline{X_n}$ admet un moment d'ordre 2.
  On peut donc appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left[\left|\overline{X_n} - \mathbb{E}\Big(\overline{X_n}\Big)\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}\Big(\overline{X_n}\Big)}{\varepsilon^2}$$

- D'après ce qui précède : $\mathbb{E}\Big(\overline{X_n}\Big) = \mathbb{E}_\theta(Y_n) = \dfrac{2}{3}\ \theta$ et $\mathbb{V}\Big(\overline{X_n}\Big) = \mathbb{V}(Y_n) = \dfrac{\theta^2}{18\ n}$.

- On a donc, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & \mathbb{P}\left(\left[\left|Y_n - \frac{2}{3}\,\theta\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) & \leqslant & \dfrac{\theta^2}{18\,\varepsilon^2}\dfrac{1}{n} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle n\to+\infty} & & & & \Big\downarrow {\scriptstyle n\to+\infty} \\ 0 & & & & 0 \end{array}$$

Comme $0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{\theta^2}{18\,\varepsilon^2}\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors, d'après le théorème d'encadrement, la suite $\left(\mathbb{P}\left(\left[\left|Y_n - \frac{2}{3}\,\theta\right| \geqslant \varepsilon\right]\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente, de limite nulle.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, pour tout } \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|Y_n - \frac{2}{3}\,\theta\right| \geqslant \varepsilon\right]\right) = 0. \\ \text{La suite } (Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite d'estimateurs convergente de } \dfrac{2\theta}{3}.\end{array}}$$

□

c) Déduire de la variable Y_n un estimateur sans biais Z_n de θ.

Démonstration.

- D'après la question ***2.a)***, $\mathbb{E}_\theta(Y_n) = \dfrac{2}{3}\,\theta$.
- Notons $Z_n = \dfrac{3}{2}\,Y_n$. Alors, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}_\theta(Z_n) \;=\; \mathbb{E}_\theta\left(\frac{3}{2}\,Y_n\right) \;=\; \frac{3}{2}\,\mathbb{E}_\theta(Y_n) \;=\; \frac{3}{2}\,\frac{2}{3}\,\theta \;=\; \theta$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z_n = \dfrac{3}{2}\,Y_n \text{ est un estimateur sans biais de } \theta.}$$

□

d) Calculer le risque quadratique de Z_n.

Démonstration.

- La v.a.r. Z_n admet un moment d'ordre 2 car est une transformée affine de la v.a.r. Y_n qui admet un moment d'ordre 2.
- D'après la décomposition biais-variance :

$$\begin{array}{rcll} r_\theta(Z_n) & = & \mathbb{V}_\theta(Z_n) + \cancel{\left(b_\theta(Z_n)\right)^2} & \textit{(car } Z_n \textit{ est un estimateur sans biais)} \\ & = & \mathbb{V}_\theta\left(\dfrac{3}{2}\,Y_n\right) & \\ & = & \dfrac{9}{4}\,\mathbb{V}(Y_n) \;=\; \dfrac{9}{4}\,\dfrac{\theta^2}{18\,n} & \textit{(par propriété de la variance)} \\ & = & \dfrac{\theta^2}{8n} & \end{array}$$

$$\boxed{r_\theta(Z_n) = \dfrac{\theta^2}{8n}}$$

□

e) Montrer que la suite d'estimateurs $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

Démonstration.
D'après la question précédente :

$$r_\theta(Z_n) = \frac{\theta^2}{8n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{La suite d'estimateurs } (Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

□

3. Comparer les risques quadratiques de M_n et de Z_n.
Quelle méthode choisiriez-vous pour estimer la valeur du paramètre θ ?

Démonstration.

- Il faut choisir l'estimateur possédant le risque quadratique le plus faible.
Raisonnons par équivalence :

$$\begin{array}{rrcll}
 & r_\theta(M_n) & \leqslant & r_\theta(Z_n) & \\
\Leftrightarrow & \dfrac{1}{(n+1)(2n+1)}\ \cancel{\theta^2} & \leqslant & \dfrac{1}{8n}\ \cancel{\theta^2} & \textit{(car } \theta > 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow & 8n & \leqslant & (n+1)(2n+1) & \textit{(car } 8n > 0 \textit{ et } (n+1)(2n+1) > 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow & 0 & \leqslant & (n+1)(2n+1) - 8n & \\
\Leftrightarrow & 0 & \leqslant & 2n^2 - 5n + 1 &
\end{array}$$

- Notons $P(X) = 2X^2 - 5X + 1$.
Ce polynôme admet pour discriminant $\Delta = 25 - 8 = 17$.
Il admet donc comme racines $x_- = \dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$ et $x_+ = \dfrac{5+\sqrt{17}}{4} \simeq \dfrac{5+\sqrt{16}}{4} = \dfrac{9}{4} = 2,25$.
La fonction polynomiale associée à P est négative sur $[x_-, x_+]$ et positive ailleurs.
Ainsi, pour tout $n \geqslant 3$:

$$P(n) \geqslant 0 \quad \text{et donc} \quad r_\theta(Z_n) \geqslant r_\theta(M_n)$$

$$\boxed{\text{Pour estimer le paramètre } \theta\text{, on choisit l'estimateur } M_n \text{ qui possède un risque quadratique plus faible que l'estimateur } Z_n.}$$

□

4. **Un premier intervalle de confiance asymptotique pour θ**

a) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(2\sqrt{2n}\ \dfrac{Z_n - \theta}{\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Commençons par rappeler :

$$Z_n = \frac{3}{2}\ Y_n = \frac{3}{2}\ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3}{2}\ X_i\right)$$

- Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons $R_i = \dfrac{3}{2}\ X_i$.
  La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de v.a.r. :
  × indépendantes,
  × de même loi (car les v.a.r. X_i ont même loi),
  × de même espérance $\mathbb{E}_\theta(R_1) = \mathbb{E}_\theta\left(\dfrac{3}{2}\ X_1\right) = \dfrac{3}{2}\ \mathbb{E}_\theta(X_1) = \dfrac{3}{2}\ \dfrac{2}{3}\ \theta = \theta$,
  × de même variance $\mathbb{V}(R_1) = \mathbb{V}\left(\dfrac{3}{2}\ X_1\right) = \dfrac{3^2}{2^2}\ \mathbb{V}(X_1) = \dfrac{9}{4}\ \dfrac{\theta^2}{18} = \dfrac{\theta^2}{8}$.

  Ainsi, d'après le théorème central limite :
$$\overline{R_n}^* \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} Z \quad \text{où} \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

- Remarquons alors :
$$\begin{aligned}
\overline{R_n}^* &= \frac{\overline{R_n} - \mathbb{E}_\theta\big(\overline{R_n}\big)}{\sigma\big(\overline{R_n}\big)} \\
&= \frac{Z_n - \mathbb{E}_\theta(Z_n)}{\sigma(Z_n)} && \textit{(par définition de } Z_n\textit{)} \\
&= \frac{Z_n - \theta}{\sqrt{\mathbb{V}(Z_n)}} && \textit{(par définition de } Z_n \textit{ en } \textbf{2.c)}\textit{)} \\
&= \frac{Z_n - \theta}{\sqrt{\frac{\theta^2}{8n}}} && \textit{(d'après la question } \textbf{2.d)}\textit{)} \\
&= \frac{Z_n - \theta}{\frac{\sqrt{\theta^2}}{\sqrt{8n}}} \\
&= \sqrt{8n}\ \frac{Z_n - \theta}{\theta} \ = \ 2\sqrt{2n}\ \frac{Z_n - \theta}{\theta}
\end{aligned}$$

> Ainsi, la suite de variables aléatoires $\left(2\sqrt{2n}\ \dfrac{Z_n - \theta}{\theta}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge bien en loi vers Z, v.a.r. de loi normale centrée réduite. □

b) Dans la suite, on note $\alpha \in \,]0,1[$ et on note Φ la fonction de répartition associée à loi normale centrée réduite. Enfin, on note $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ l'unique réel tel que $\Phi(t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.
Justifier l'existence de $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Démonstration.
La fonction Φ est :
× continue sur $]-\infty,+\infty[$,
× strictement croissante sur $]-\infty,+\infty[$.
Elle réalise donc une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $\Phi\big(]-\infty,+\infty[\big)$. Or :
$$\Phi\big(]-\infty,+\infty[\big) = \Big]\lim_{x\to-\infty} \Phi(x), \lim_{x\to+\infty} \Phi(x)\Big[= \,]0,1[$$

> Comme $(1-\frac{\alpha}{2}) \in \,]0,1[$, alors $1-\frac{\alpha}{2}$ possède un unique antécédent $t_{1-\frac{\alpha}{2}} \in \,]-\infty,+\infty[$ par Φ. □

c) Justifier que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant 2\sqrt{2n}\ \dfrac{Z_n-\theta}{\theta} \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) = 1-\alpha$.
En déduire un intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau de confiance 95%.
(on donne $\Phi(1,96) = 0,975$*)*

Démonstration.

- D'après la question précédente : $2\sqrt{2n}\ \dfrac{Z_n-\theta}{\theta} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathscr{L}}} Z$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
- On en déduit notamment :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant 2\sqrt{2n}\ \frac{Z_n-\theta}{\theta} \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant Z \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right)$$

- Il suffit alors de remarquer :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant Z \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) &= \Phi\big(t_{1-\frac{\alpha}{2}}\big) - \Phi\big(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\big) \\
&= \Phi\big(t_{1-\frac{\alpha}{2}}\big) - \Big(1-\Phi\big(t_{1-\frac{\alpha}{2}}\big)\Big) && \textit{(par propriété de } \Phi\textit{)} \\
&= 2\Phi\big(t_{1-\frac{\alpha}{2}}\big) - 1 \\
&= 2\big(1-\tfrac{\alpha}{2}\big) - 1 && \textit{(par définition de } t_{1-\frac{\alpha}{2}}\textit{)} \\
&= 1-\alpha
\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant 2\sqrt{2n}\ \frac{Z_n-\theta}{\theta} \leqslant t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) = 1-\alpha}$$

- Il reste alors à isoler θ dans l'inégalité précédente afin d'obtenir l'intervalle de confiance souhaité. Plus précisément :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \ \leqslant\ 2\sqrt{2n}\ \frac{Z_n-\theta}{\theta} \ \leqslant\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) \\
=\ &\mathbb{P}\left(\left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \ \leqslant\ 2\sqrt{2n}\ \left(\frac{Z_n}{\theta}-1\right) \ \leqslant\ t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right) \\
=\ &\mathbb{P}\left(\left[-\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}} \ \leqslant\ \frac{Z_n}{\theta}-1 \ \leqslant\ \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}\right]\right) \\
=\ &\mathbb{P}\left(\left[1-\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}} \ \leqslant\ \frac{Z_n}{\theta} \ \leqslant\ 1+\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}\right]\right) \\
=\ &\mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{1-\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}} \ \leqslant\ \frac{\theta}{Z_n} \ \leqslant\ \frac{1}{1+\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}}\right]\right) \\
=\ &\mathbb{P}\left(\left[\frac{Z_n}{1-\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}} \ \leqslant \theta\ \leqslant\ \frac{Z_n}{1+\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}}\right]\right) && \textit{(car } Z_n \textit{ est presque sûrement strictement positive)}
\end{aligned}$$

Notons $U_n = \dfrac{Z_n}{1-\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}}$ et $V_n = \dfrac{Z_n}{1+\frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2\sqrt{2n}}}$. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([U_n \leqslant \theta \ \leqslant\ V_n]\right) = 1-\alpha$$

$$\boxed{\text{En choisissant } \alpha = 0,05, \text{ on a bien obtenu un intervalle de confiance asymptotique } [U_n, V_n].}$$

Remarque
Les v.a.r. qui composent l'intervalle de confiance $[U_n, V_n]$ ne dépendent pas de θ. Si c'était le cas, U_n et V_n ne seraient pas des estimateurs ! On insiste sur le fait que, par définition, un estimateur ne peut dépendre de θ. □

5. Un second intervalle de confiance asymptotique pour θ

a) Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(2n\left(1-\dfrac{M_n}{\theta}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire W telle que W suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.

Démonstration.

- Notons $Q_n = 2n\ \left(1-\dfrac{M_n}{\theta}\right)$ et $h : x \mapsto 2n\ \left(1-\dfrac{x}{\theta}\right)$. Ainsi, $Q_n = h(M_n)$ et :

$$\begin{array}{rcll} Q_n(\Omega) & = & \big(h(M_n)\big)(\Omega) \ = \ h\big(M_n(\Omega)\big) & \\ & = & h([0,\theta]) & \\ & = & [h(\theta), h(0)] & \textit{(car h est continue et strictement décroissante sur $[0,\theta]$)} \\ & = & [0, 2n] & \end{array}$$

- Déterminons la fonction de répartition de Q_n.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  × si $x < 0$: alors $[Q_n \leqslant x] = \varnothing$. Ainsi :

$$F_{Q_n}(x) \ = \ \mathbb{P}\big(\,[Q_n \leqslant x]\,\big) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

  × si $x \in [0, 2n]$:

$$\begin{array}{rcll} F_{Q_n}(x) & = & \mathbb{P}\left([Q_n \leqslant x]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[2n\ \left(1-\dfrac{M_n}{\theta}\right) \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[1-\dfrac{M_n}{\theta} \leqslant \dfrac{x}{2n}\right]\right) & \textit{(car $2n > 0$)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{M_n}{\theta} \geqslant 1-\dfrac{x}{2n}\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[M_n \geqslant \theta\left(1-\dfrac{x}{2n}\right)\right]\right) & \textit{(car $\theta > 0$)} \\ & = & 1-\mathbb{P}\left(\left[M_n < \theta\left(1-\dfrac{x}{2n}\right)\right]\right) & \\ & = & 1-F_{M_n}\left(\theta\left(1-\dfrac{x}{2n}\right)\right) & \textit{(car M_n est une v.a.r. à densité)} \\ & = & 1-\left(\dfrac{\left(\theta\left(1-\frac{x}{2n}\right)\right)^2}{\theta^2}\right)^n \ = \ 1-\left(\dfrac{\cancel{\theta^2}\left(1-\frac{x}{2n}\right)^2}{\cancel{\theta^2}}\right)^n \ = \ 1-\left(1-\dfrac{x}{2n}\right)^{2n} & \end{array}$$

× si $x > 2n$: alors $[Q_n \leqslant x] = \Omega$. Ainsi :

$$F_{Q_n}(x) \ = \ \mathbb{P}\big([Q_n \leqslant x]\big) \ = \ \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{En résumé : } F_{Q_n} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{x}{2n}\right)^{2n} & \text{si } x \in [0, 2n] \\ 1 & \text{si } x > 2n \end{cases}.}$$

- Pour démontrer la convergence en loi de la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on s'intéresse, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la limite de $F_{Q_n}(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent :
  × si $x \leqslant 0$:
  $$F_{Q_n}(x) = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
  × si $x > 0$: alors, pour n suffisamment grand, $x \leqslant 2n$.
  Plus précisément, cela est vrai à partir du rang $n_0 = \left\lceil \dfrac{x}{2} \right\rceil$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_0$:
  $$F_{Q_n}(x) \ = \ 1 - \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^{2n}$$
  Remarquons alors :
  $$\left(1 - \frac{x}{2n}\right)^{2n} \ = \ \mathrm{e}^{2n \ \ln\left(1 - \frac{x}{2n}\right)}$$
  Enfin :
  $$2n \ \ln\left(1 - \frac{x}{2n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} -\frac{x}{2n} \ 2n \ = \ -x$$
  Ainsi, par composition des limites :
  $$\lim_{n \to +\infty} F_{Q_n}(x) \ = \ \lim_{n \to +\infty} 1 - \left(1 - \frac{x}{2n}\right)^{2n} \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-x}$$
  On en conclut que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} F(x)$ où F est la fonction :
  $$F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
  On reconnaît la fonction de répartition associée à la loi exponentielle de paramètre 1.

  $$\boxed{\text{En conclusion, la suite } (Q_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers une v.a.r. } W \text{ telle que } W \hookrightarrow \mathcal{E}(1).}$$

Remarque

- La fonction de répartition de Q_n est définie par cas (c'est généralement le cas). La difficulté de la question est que ces cas dépendent de n. Ainsi, lors de la recherche de la limite de $F_{Q_n}(x)$, on ne peut faire une disjonction de cas en utilisant directement les cas qui sont donnés par la fonction F_{Q_n} (à savoir $x < 0$, $x \in [0, 2n]$ et $x > 2n$). L'idée est alors de « passer à la limite » dans l'expression de ces cas. En agissant ainsi, on obtient : « $x \leqslant 0$, $x \in [0, +\infty]$, $x \geqslant +\infty$ ». Le troisième cas est écarté (il n'y a pas de réel $x \geqslant +\infty$). On considère alors les intervalles ouverts obtenus dans les deux premiers cas à savoir : $x < 0$ et $x \in]0, +\infty[$.
  Le cas $x = 0$ n'est pas traité séparément dans la rédaction de la question précédente uniquement car il coïncide avec le cas $x < 0$.
- Dans le cas où la fonction de répartition est définie par des cas **indépendants de n**, alors ces cas fournissent la disjonction à opérer. □

b) Calculer $\mathbb{P}([-\ln(0,975) \leqslant W \leqslant -\ln(0,025)])$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $1 \geqslant 0,975 \geqslant 0,025$.
Ainsi, par croissance de la fonction ln sur $]0,+\infty[$:
$$\ln(1) \geqslant \ln(0,975) \geqslant \ln(0,025) \quad \text{puis} \quad 0 \leqslant -\ln(0,975) \leqslant -\ln(0,025)$$
- On a alors :
$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([-\ln(0,975) \leqslant W \leqslant -\ln(0,025)]) \\ = \ & F_W(-\ln(0,025)) - F_W(-\ln(0,975)) \\ = \ & \left(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-(-\ln(0,025))}\right) - \left(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-(-\ln(0,975))}\right) && \textit{(car } -\ln(0,975) \geqslant 0 \textit{ et } -\ln(0,025) \geqslant 0\textit{)} \\ = \ & \mathrm{e}^{\ln(0,975)} - \mathrm{e}^{\ln(0,025)} \\ = \ & 0,975 - 0,025 \ = \ 0,95 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([-\ln(0,975) \leqslant W \leqslant -\ln(0,025)]) = 0,95}$$

□

c) En déduire un nouvel intervalle de confiance asymptotique de θ au niveau de confiance 95%.

Démonstration.

- D'après les deux questions précédentes :
$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left[-\ln(0,975) \leqslant 2n\left(1-\frac{M_n}{\theta}\right) \leqslant -\ln(0,025)\right]\right) &= \mathbb{P}([-\ln(0,975) \leqslant W \leqslant -\ln(0,025)]) \\ &= 0,95 \end{aligned}$$
- Notons $u = -\ln(0,975)$ et $v = -\ln(0,025)$. Il reste alors à isoler θ dans l'inégalité précédente afin d'obtenir l'intervalle de confiance souhaité. Plus précisément :
$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(\left[u \leqslant 2n\left(1-\frac{M_n}{\theta}\right) \leqslant v\right]\right) \\ = \ & \mathbb{P}\left(\left[\frac{u}{2n} \leqslant 1-\frac{M_n}{\theta} \leqslant \frac{v}{2n}\right]\right) && \textit{(car } 2n > 0\textit{)} \\ = \ & \mathbb{P}\left(\left[\frac{u}{2n} - 1 \leqslant -\frac{M_n}{\theta} \leqslant \frac{v}{2n} - 1\right]\right) \\ = \ & \mathbb{P}\left(\left[-\frac{u}{2n} + 1 \geqslant \frac{M_n}{\theta} \geqslant -\frac{v}{2n} + 1\right]\right) \\ = \ & \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{1-\frac{u}{2n}} \leqslant \frac{\theta}{M_n} \leqslant \frac{1}{1-\frac{v}{2n}}\right]\right) && \textit{(par stricte croissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ = \ & \mathbb{P}\left(\left[\frac{M_n}{1-\frac{u}{2n}} \leqslant \theta \leqslant \frac{M_n}{1-\frac{v}{2n}}\right]\right) && \textit{(car } M_n \textit{ est presque sûrement strictement positive)} \end{aligned}$$
Notons $U_n = \dfrac{M_n}{1-\frac{u}{2n}}$ et $V_n = \dfrac{M_n}{1-\frac{v}{2n}}$. On a alors :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([U_n \leqslant \theta \leqslant V_n]\right) = 0,95$$

$$\boxed{\text{On a bien obtenu un intervalle de confiance asymptotique } [U_n, V_n].}$$

□

Exercice 3 : EDHEC 2018

On admet que toutes les variables aléatoires considérés dans cet exercice sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par : $f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \frac{x}{a} \text{ e}^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$.

1. Montrer que la fonction f est une densité.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - Si $x \geqslant 0$: $\frac{x}{a} \geqslant 0$ car $a > 0$ et $\text{e}^{-\frac{x^2}{2a}} > 0$. Ainsi, $f(x) = \frac{x}{a} \text{ e}^{-\frac{x^2}{2a}} \geqslant 0$. Donc : $f(x) \geqslant 0$.
  - Si $x < 0$: $f(x) = 0 \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$$

- La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ car elle est constante (nulle) sur cet intervalle.
  La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{Ainsi } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

Commentaire

La continuité sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points suffit ici.
Mais on peut remarquer que f est continue en 0 puisque :

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} 0 = 0, \qquad f(0) \ = \ 0, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{a} \text{ e}^{-\frac{x^2}{2a}} = 0$$

- Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ converge et vaut 1.
  - Tout d'abord : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt$, car f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
  - La fonction f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $[0, +\infty[$.
    Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} \int_0^A f(t)\, dt &= \int_0^A \frac{t}{a} \text{ e}^{-\frac{t^2}{2a}}\, dt \\ &= -\int_0^A \frac{-t}{a} \text{ e}^{-\frac{t^2}{2a}}\, dt \\ &= -\left[\text{ e}^{-\frac{t^2}{2a}} \right]_0^A \\ &= -\left(\text{e}^{-\frac{A^2}{2a}} - \text{e}^0 \right) \\ &= 1 - \text{e}^{-\frac{A^2}{2a}} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt \text{ converge et vaut } 1.}$$

□

Dans la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire X de densité f.

2. Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
– Si $x < 0$, alors :

$$F_X(x) \;=\; \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) \;=\; \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \;=\; \int_{-\infty}^{x} 0\,dt \;=\; 0$$

car f est nulle sur $]-\infty, 0[$.
– Si $x \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}\big([X \leqslant x]\big) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \\
&= \int_{0}^{x} f(t)\,dt && \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\
&= \int_{0}^{x} \frac{t}{a}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}\,dt && \textit{(par définition de } f \textit{ sur } [0,x]\textit{)} \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} && \textit{(d'après le calcul de la question précédente)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } F_X : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

□

3. On considère la variable aléatoire Y définie par : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$.

a) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Démonstration.
- Notons $\varphi : x \mapsto \dfrac{x^2}{2a}$ de sorte que $Y = \varphi(X)$.

$$Y(\Omega) = (\varphi(X))(\Omega) = \varphi\big(X(\Omega)\big) \subset\; [0,+\infty[$$

En effet, $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ et $\varphi(\mathbb{R}) \;=\; [0,+\infty[$ (φ ne prend que des valeurs positives).
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  – Si $x < 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset\; [0,+\infty[$. Ainsi :

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

  – Si $x \geqslant 0$, alors :

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= \mathbb{P}\big([Y \leqslant x]\big) = \mathbb{P}\Big(\Big[\tfrac{X^2}{2a} \leqslant x\Big]\Big) \\
&= \mathbb{P}\big(\big[X^2 \leqslant 2a\,x\big]\big) && \textit{(car } a > 0\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\Big(\Big[\sqrt{X^2} \leqslant \sqrt{2a\,x}\Big]\Big) && \textit{(car la fonction } \sqrt{\cdot} \textit{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\big(\big[\,|X| \leqslant \sqrt{2a\,x}\big]\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\big[-\sqrt{2a\,x} \leqslant X \leqslant \sqrt{2a\,x}\big]\big) \\
&= F_X\big(\sqrt{2a\,x}\big) - F_X\big(-\sqrt{2a\,x}\big) && \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\
&= F_X\big(\sqrt{2a\,x}\big) \;=\; 1 - \exp\left(-\frac{\big(\sqrt{2a\,x}\big)^2}{2a}\right) \;=\; 1 - \exp\left(-\frac{\cancel{2a}\,x}{\cancel{2a}}\right)
\end{aligned}$$

- On en conclut que X admet pour fonction de répartition :

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{On a donc bien : } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1).}$$

☐

b) On rappelle qu'en **Scilab** la commande `grand(1, 1, 'exp', 1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire un script **Scilab** demandant la valeur de a à l'utilisateur et permettant de simuler la variable aléatoire X.

Démonstration.

- Dans cette question, on considère : $X(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

Commentaire

Ce premier point amène une remarque sur la notation $X(\Omega)$ lorsque X est une v.a.r.

- Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
  Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
  Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{aligned} X(\Omega) &= \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{aligned}$$

- Il faut bien noter que, dans la définition de $X(\Omega)$, aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît. Il y a donc une différence fondamentale entre les valeurs que peut prendre X et les valeurs de F_X ou f_X dont la définition dépend d'une probabilité $\mathbb{P}$. Par exemple, si l'on sait que f_X est nulle en dehors de $]0, +\infty[$ alors : :

$$\mathbb{P}\big([X \leqslant 0]\big) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} 0\ dt = 0$$

  Cela ne signifie pas que X ne prend pas de valeurs négatives mais simplement que cela se produit avec probabilité nulle.

- En toute rigueur, on ne peut donc pas confondre $X(\Omega)$ et l'ensemble sur lequel f_X ne s'annule pas (cela n'a pas beaucoup de sens puisque f_X est définie à un nombre fini de points près). Il est donc fréquent que les énoncés précisent, lors de l'introduction de la v.a.r. X, son ensemble image :

  On considère un variable aléatoire X, **à valeurs positives***, de densité f*

  C'est ce qu'on se permet de faire dans cette question.

- Par définition : $Y = \dfrac{X^2}{2a}$. Ainsi : $X^2 = 2a\ Y$ et $\sqrt{X^2} = \sqrt{2a\ Y}$.
  Enfin, comme on a supposé que X ne prend que des valeurs positives, on obtient :

$$X = \sqrt{2a\ Y}$$

- D'après la question précédente : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. On en déduit le script suivant :

```
a = input("Prière d''entrer une valeur strictement positive")
y = grand(1, 1, 'exp', 1)
x = sqrt(2*a*y)
disp(x)
```

☐

4. ***a)*** Vérifier que la fonction g qui à tout réel associe $x^2 \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a}}$, est paire.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$g(-x) \;=\; (-x)^2 \, \exp\left(-\frac{(-x)^2}{2a}\right) \;=\; x^2 \, \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right) \;=\; g(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } g \text{ est paire.}}$$ □

b) Rappeler l'expression intégrale ainsi que la valeur du moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale de paramètre 0 et a.

Démonstration.
Notons Z une v.a.r. telle que : $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, a)$.

- Alors Z admet pour densité la fonction f_Z définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_Z : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a}\,\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a}\right)$$

- La v.a.r. Z admet une espérance et une variance données par :

$$\mathbb{E}(Z) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(Z) = a$$

De plus, d'après la formule de Kœnig-Huygens : $\mathbb{V}(Z) \;=\; \mathbb{E}(Z^2) - \big(\mathbb{E}(Z)\big)^2$. Et ainsi :

$$\mathbb{E}(Z^2) \;=\; \mathbb{V}(Z) + \big(\mathbb{E}(Z)\big)^2 \;=\; a + 0 \;=\; a$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z \text{ admet pour moment d'ordre 2 : } \mathbb{E}(Z^2) = a.}$$

Commentaire

- Une bonne connaissance du cours est une condition *sine qua non* de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de maths (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours. C'est particulièrement le cas dans cet énoncé où les propriétés caractéristiques de lois usuelles (loi exponentielle, loi normale) sont explicitement demandées.
- Profitons-en pour rappeler que si T est une v.a.r. telle que $T \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ alors T admet pour densité la fonction f_T définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_T : x \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

De plus, T admet une espérance et une variance données par : $\mathbb{E}(T) = \mu$ et $\mathbb{V}(T) = \sigma^2$. □

c) En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t \; f_X(t) \; dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \; f_X(t) \; dt$.

- Comme f est nulle en dehors de $[0,+\infty[$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt \ = \ \int_0^{+\infty} t\ f_X(t)\ dt$$

- Or, pour tout $t \in [0,+\infty[$:

$$t\ f_X(t) \ = \ \frac{1}{a}\ t^2\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}} \ = \ \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}\ \frac{1}{\sqrt{a}\ \sqrt{2\pi}}\ t^2\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}} \ = \ \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a}}\ t^2 f_Z(t)$$

On a rappelé en question précédente que Z admet un moment d'ordre 2.
De plus, on a démontré en question ***4.a)*** que la fonction $g : t \mapsto t^2\ \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a}}$ est paire. Il en est de même de la fonction $t \mapsto t^2\ f_Z(t)$ qui n'est autre que g, à une constante multiplicative près.
Ainsi :

$$\mathbb{E}\big(Z^2\big) \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_Z(t)\ dt \ = \ 2\ \int_0^{+\infty} t^2 f_Z(t)\ dt \ = \ 2\ \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}}\ t f_X(t)\ dt$$

- On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f_X(t)\ dt$ est convergente.

Ainsi, X admet une espérance qui vérifie :

$$\mathbb{E}\big(Z^2\big) \ = \ 2\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}}\ \mathbb{E}(X)$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet pour espérance : } \mathbb{E}(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\ \sqrt{a}}\ \mathbb{E}(Z^2) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}}{2\ \sqrt{a}}\ a \ = \ \frac{\sqrt{a\pi}}{\sqrt{2}}.}$$

□

5. a) Rappeler l'espérance de Y puis montrer que X possède un moment d'ordre 2 et le calculer.

Démonstration.

- On a démontré en question ***3.a)*** : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } Y \text{ admet une espérance donnée par : } \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{1} = 1.}$$

- Par définition : $X^2 = 2a\ Y$. La v.a.r. X^2 admet donc une espérance car c'est la transformée affine d'une v.a.r. Y qui admet une espérance.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, la v.a.r. } X \text{ admet un moment d'ordre 2 et par linéarité de l'espérance :}\\ \mathbb{E}\big(X^2\big) = 2a\ \mathbb{E}(Y) = 2a.\end{array}}$$

□

b) En déduire que la variance de X est donnée par :

$$\mathbb{V}(X) = \frac{(4-\pi)\ a}{2}$$

Démonstration.
On a démontré en question précédente que X admet un moment d'ordre 2. Ainsi, X admet une variance et par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) \ &= \ \mathbb{E}\big(X^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 \\ &= \ 2a - \left(\frac{\sqrt{a\pi}}{\sqrt{2}}\right)^2 \ = \ 2a - \frac{a\pi}{2} \ = \ \frac{4a - a\pi}{2} \ = \ \frac{(4-\pi)\ a}{2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{(4-\pi)\ a}{2}}$$

□

On suppose désormais que le paramètre a est inconnu et on souhaite l'estimer.

6. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X.
On note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \dfrac{1}{2n} \sum\limits_{k=1}^{n} {X_k}^2$.

a) Montrer que S_n est un estimateur sans biais de a.

Démonstration.
La v.a.r. S_n admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent une espérance. De plus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} {X_k}^2\right) \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big({X_k}^2\big) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{1}{\cancel{2}n} \sum_{k=1}^{n} \cancel{2}a && \textit{(car } \mathbb{E}\big(X^2\big) = 2a\textit{)} \\
&= \frac{1}{\cancel{n}} \, \cancel{n}a \; = \; a
\end{aligned}$$

Ainsi, S_n admet un biais donné par :

$$b_a(S_n) \; = \; \mathbb{E}(S_n) - a \; = \; 0$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } S_n \text{ est un estimateur sans biais du paramètre } a.}$$

□

b) Montrer que X^2 possède une variance et que $\mathbb{V}\big(X^2\big) = 4a^2$.

Démonstration.
Par définition : $X^2 = 2a\,Y$. Ainsi, X^2 admet une variance car c'est la transformée affine d'une v.a.r. qui admet une variance. Par propriété de la variance, on obtient :

$$\mathbb{V}\big(X^2\big) \; = \; \mathbb{V}\big(2a\,Y\big) \; = \; 4a^2 \, \mathbb{V}(Y) \; = \; 4a^2 \, \frac{1}{1^2} \; = \; 4a^2$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } X^2 \text{ admet une variance donnée par } \mathbb{V}\big(X^2\big) = 4a^2.}$$

□

c) Déterminer le risque quadratique $r_a(S_n)$ de S_n en tant qu'estimateur de a.
En déduire que S_n est un estimateur convergent de a.

Démonstration.
- La v.a.r. S_n admet un moment d'ordre 2 en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent des moments d'ordre 2.
- Ainsi, S_n admet un risque quadratique. Et d'après la décomposition biais-variance :

$$\begin{aligned}
r_a(S_n) &= \mathbb{V}_a(S_n) + \cancel{\big(b_a(S_n)\big)^2} && \textit{(car } S_n \textit{ est un estimateur sans biais)} \\
&= \mathbb{V}_a\left(\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} {X_k}^2\right) = \frac{1}{4n^2} \, \mathbb{V}_a\left(\sum_{k=1}^{n} {X_k}^2\right) && \textit{(par propriété de la variance)} \\
&= \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}_a\left({X_k}^2\right) && \textit{(les v.a.r. } X_k \textit{ sont indépendantes donc, d'après le lemme des coalitions, les v.a.r. } X_k^2 \textit{ le sont aussi)} \\
&= \frac{1}{\cancel{4}n^2} \sum_{k=1}^{n} \cancel{4}a^2 \; = \; \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \, \cancel{n}a^2 \; = \; \frac{a^2}{n}
\end{aligned}$$

- Ainsi :

$$r_a(S_n) \;=\; \frac{a^2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{Comme } \lim_{n\to+\infty} r_a(S_n) = 0, \text{ on en déduit que } S_n \text{ est un estimateur convergent de } a.}$$

□

7. On suppose que a est inférieur ou égal à 1.

a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable aléatoire S_n et en déduire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\Big([|S_n - a| \leqslant \varepsilon] \Big) \;\geqslant\; 1 - \frac{1}{n\ \varepsilon^2}$$

Démonstration.

- L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev stipule que pour toute v.a.r. U qui admet une variance :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big([|U - \mathbb{E}(U)| > \varepsilon] \big) \;\leqslant\; \frac{\mathbb{V}(U)}{\varepsilon^2}$$

Commentaire

Dans cette question, on a considéré l'événement $[|U - \mathbb{E}(U)| > \varepsilon]$ avec une inégalité stricte. Habituellement, le résultat est plutôt présenté avec une inégalité large. Cette dernière permet cependant d'obtenir celle utilisée ici. Pour cela, il suffit de remarquer :

$$[|U - \mathbb{E}(U)| > \varepsilon] \;\subset\; [|U - \mathbb{E}(U)| \geqslant \varepsilon]$$

et ainsi, par croissance de l'application $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\big([|U - \mathbb{E}(U)| > \varepsilon] \big) \;\leqslant\; \mathbb{P}\big([|U - \mathbb{E}(U)| \geqslant \varepsilon] \big)$$

- Il suffit d'appliquer cette inégalité à la v.a.r. $U = S_n$ qui admet une variance (d'après la question ***6.c)***) et à $\varepsilon > 0$. On obtient :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}\big([|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \varepsilon] \big) & \leqslant & \dfrac{\mathbb{V}(S_n)}{\varepsilon^2} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \mathbb{P}\big([|S_n - a| > \varepsilon] \big) & & \dfrac{a^2}{n\ \varepsilon^2} \end{array}$$

On en déduit :

$$-\mathbb{P}\big([|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \varepsilon] \big) \;\geqslant\; -\frac{a^2}{n\ \varepsilon^2}$$

Et ainsi :

$$\mathbb{P}\big([|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \leqslant \varepsilon] \big) \;=\; 1 - \mathbb{P}\big([|S_n - \mathbb{E}(S_n)| > \varepsilon] \big) \;\geqslant\; 1 - \frac{a^2}{n\ \varepsilon^2}$$

- Enfin, comme on a supposé : $0 < a \leqslant 1$, alors, par croissance de la fonction élévation au carré sur $\mathbb{R}_+$ on a :

$$a^2 \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 1 - \frac{a^2}{n\ \varepsilon^2} \;\geqslant\; 1 - \frac{1}{n\ \varepsilon^2}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\Big([|S_n - a| \leqslant \varepsilon] \Big) \;\geqslant\; 1 - \frac{1}{n\ \varepsilon^2}.}$$

□

b) Déterminer une valeur de n pour laquelle $\left[S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right]$ est un intervalle de confiance pour a avec niveau de confiance au moins égal à 95%.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\big([|S_n - a| \leqslant \varepsilon] \big) \ \geqslant\ 1 - \dfrac{1}{n\ \varepsilon^2}$.
- Soit $\varepsilon > 0$. Remarquons tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} [|S_n - a| \leqslant \varepsilon] & = & [-\varepsilon \leqslant S_n - a \leqslant \varepsilon] \\ & = & [-S_n - \varepsilon \leqslant -a \leqslant -S_n + \varepsilon] \\ & = & [S_n - \varepsilon \leqslant a \leqslant S_n + \varepsilon] \\ & = & [a \in [S_n - \varepsilon, S_n + \varepsilon]\ ] \end{array}$$

- Ainsi, en choisissant $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, on obtient, par la question précédente :

$$\mathbb{P}\Big(\left[S_n - \frac{1}{10} \leqslant a \leqslant S_n + \frac{1}{10}\right] \Big) \ \geqslant\ 1 - \frac{1}{n\ \left(\frac{1}{10}\right)^2} = 1 - \frac{100}{n}$$

On cherche un intervalle de confiance pour a avec un niveau de confiance au moins égal à 95%. Il faut donc trouver n tel que : $1 - \dfrac{100}{n} \geqslant 0,95$. Or :

$$\begin{array}{rcll} 1 - \dfrac{100}{n} \geqslant 0,95 & \Leftrightarrow & \dfrac{100}{n} \leqslant 0,05 & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{n}{100} \geqslant \dfrac{1}{0,05} & \textit{(car la fonction inverse est strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & n \geqslant \dfrac{100}{0,05} & \end{array}$$

avec : $\dfrac{100}{0,05} = \dfrac{100}{5 \times 10^{-2}} = \dfrac{20}{10^{-2}} = 20 \times 10^2 = 2000$.

$$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 2000,\ \left[S_n - \frac{1}{10}, S_n + \frac{1}{10}\right] \text{ est un intervalle de confiance pour } a \text{ avec niveau de confiance au moins égal à 95\%.}}$$

□

II. Maximum de vraisemblance

Exercice 4 : EDHEC 2014

Dans cet exercice, θ désigne un réel strictement positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout k de $\mathbb{N}$, on pose : $u_k = \dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k$.

1. Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit une loi de probabilité.

Démonstration.

- Comme $\theta > 0$: $\forall k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{1+\theta}\left(\dfrac{\theta}{1+\theta}\right)^k \geqslant 0$.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k = \frac{1}{1+\theta}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k = \frac{1}{1+\theta}\,\frac{1-\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^{N+1}}{1-\frac{\theta}{\theta+1}}$$

Comme $\left|\dfrac{\theta}{1+\theta}\right| < 1$, alors : $\lim\limits_{N\to+\infty}\left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)^{N+1} = 0$. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{1}{1+\theta}\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^k = \frac{1}{1+\theta}\,\frac{1}{1-\frac{\theta}{1+\theta}} = \frac{1}{1+\theta}\,\frac{1+\theta}{1+\cancel{\theta}-\cancel{\theta}} = 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (u_k) \text{ définit une loi de probabilité.}}$$

□

On considère maintenant une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$ et dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X=k]) = u_k.$$

2. a) On pose $Y = X+1$. Reconnaître la loi de Y, puis en déduire l'espérance et la variance de X.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Donc $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}([Y=k]) = \mathbb{P}([X+1=k]) = \mathbb{P}([X=k-1]) = \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{k-1} = \frac{1}{1+\theta}\left(1-\frac{1}{1+\theta}\right)^{k-1}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{1+\theta}\right).}$$

- On obtient alors :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\frac{1}{1+\theta}} = 1+\theta \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = \frac{1-\frac{1}{1+\theta}}{\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2} = \frac{\frac{\theta}{\cancel{1+\theta}}}{\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^{\cancel{2}}} = \theta(1+\theta)$$

- Par définition, $X = Y-1$. Ainsi, la v.a.r. X admet une espérance et une variance en tant que transformée affine d'une v.a.r. qui en admet.
  - Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y-1) = \mathbb{E}(Y)-1 = \cancel{1}+\theta-\cancel{1} = \theta$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \theta}$$

- Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y) = \theta(1+\theta)$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \theta(1+\theta)}$$

□

b) On rappelle que `grand(1, 1, 'geom', p)` renvoie une simulation d'une variable aléatoire géométrique de paramètre `p`. Compléter la fonction **Scilab** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X :

```
function x = SimuX(theta)
    y = ...............
    x = ...............
endfunction
```

Démonstration.

```
    y = grand(1,1,'geom',1 / (theta + 1))
    x = y - 1
```

□

3. Dans cette question, on souhaite estimer le paramètre θ par la méthode du maximum de vraisemblance. Pour ce faire, on considère un échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ composé de variables aléatoires indépendantes ayant toutes la même loi que X et on introduit $\mathcal{L}$, de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*, \ \mathcal{L}(\theta) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left([X_k = x_k]\right)$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n$ désignent des entiers naturels éléments de $X(\Omega)$.
L'objectif est de chosir la valeur de θ qui rend $\mathcal{L}(\theta)$ maximale.

a) Écrire $\ln\left(\mathcal{L}(\theta)\right)$ en fonction de θ et de $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$.

Démonstration.
Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\ln(\mathcal{L}(\theta)) &= \ln\Big(\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_k = x_k])\Big) = \sum_{k=1}^{n} \ln\Big(\mathbb{P}([X_k = x_k])\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)^{x_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(\frac{1}{1+\theta}\right) + x_k \ln\left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big(-\ln(1+\theta) + x_k(\ln(\theta) - \ln(1+\theta))\Big) \\
&= -n\ln(1+\theta) + \sum_{k=1}^{n} x_k(\ln(\theta) - \ln(1+\theta)) \\
&= -n\ln(1+\theta) + (\ln(\theta) + \ln(1+\theta)) \sum_{k=1}^{n} x_k \\
&= -n\ln(1+\theta) + (\ln(\theta) - \ln(1+\theta)) S_n \\
&= S_n \ln(\theta) - (S_n + n) \ln(1+\theta)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(\mathcal{L}(\theta)) = S_n \ln(\theta) - (S_n + n)\ln(1+\theta)}$$

Commentaire

- Dans cette question, on dispose initialement d'un n-uplet d'observations $(x_1, \ldots, x_n)$. Plus précisément, $(x_1, \ldots, x_n)$ est une réalisation d'un n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de la v.a.r. X. Les lois des v.a.r. X_i dépendent d'un paramètre θ, a priori inconnu et qu'on cherche à déterminer. Pour ce faire, une idée naturelle consiste à considérer que la valeur de θ qui a permis de générer les observations est celle qui avait la plus grande probabilité de les générer. C'est cette idée qui guide la méthode dite du maximum de vraisemblance, dont le sujet traite.
- Plus précisément, l'idée est de choisir comme estimation de θ le réel $\hat{\theta}_n$ tel que la **vraisemblance** d'avoir obtenu l'échantillon utilisé soit maximisée.
  Autrement dit, le réel $\hat{\theta}_n$ tel que la probabilité :
  $$\begin{array}{rcll} \mathcal{L}(\theta) & = & \mathbb{P}_\theta([X_1 = x_1] \ \cap \ \ldots \ \cap \ [X_n = x_n]) & \\ & = & \mathbb{P}_\theta([X_1 = x_1]) \ \times \ \ldots \ \times \ \mathbb{P}_\theta([X_n = x_n]) & \textit{(par indépendance)} \\ & = & \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_\theta([X_i = x_i]) & \end{array}$$
  soit maximale. Au lieu d'étudier la fonction $\mathcal{L}$, définie par un produit, on préfère considérer la fonction $\varphi : \theta \mapsto \ln(\mathcal{L}(\theta))$, définie par une somme. La fonction ln étant strictement croissante, le maximum de φ fournit le maximum de $\mathcal{L}$. C'est le but de la question suivante. □

b) On considère la fonction φ définie par :
$$\forall \theta \in \,]0, +\infty[, \ \ \varphi(\theta) = S_n \ln(\theta) - (S_n + n) \ln(1 + \theta)$$
Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera $\widehat{\theta}_n$ et que l'on exprimera en fonction de S_n. Que représente $\widehat{\theta}_n$ pour la fonction $\mathcal{L}$?

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
  Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.
  $$\varphi'(\theta) = S_n \ \frac{1}{\theta} - (S_n + n) \ \frac{1}{1 + \theta} = \frac{S_n \ (1 + \theta) - (S_n + n) \ \theta}{\theta \ (1 + \theta)} = \frac{S_n + \cancel{S_n \ \theta} - \cancel{S_n \ \theta} - n \ \theta}{\theta \ (1 + \theta)}$$
  Étudions le signe de $\varphi'(\theta)$:
  $$\begin{array}{rcll} \varphi'(\theta) > 0 & \Leftrightarrow & \dfrac{S_n - n \ \theta}{\theta \ (1 + \theta)} > 0 & \\ & \Leftrightarrow & S_n - n \ \theta > 0 & \textit{(car } \theta(1+\theta) > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{S_n}{n} > \theta & \end{array}$$
  On note $\hat{\theta}_n = \dfrac{S_n}{n}$. On obtient le tableau de variations suivant :

θ	0		$\hat{\theta}_n$		$+\infty$
Signe de $\varphi'(\theta)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(\hat{\theta}_n)$	$\searrow$	$-\infty$

- Ainsi :
  × la fonction φ est croissante sur $]0, \hat{\theta}_n]$, donc : $\forall \theta \in \,]0, \hat{\theta}_n]$, $\varphi(\theta) \leqslant \varphi(\hat{\theta}_n)$.
  × la fonction φ est décroissante sur $[\hat{\theta}_n, +\infty[$, donc : $\forall \theta \in [\hat{\theta}_n, +\infty[$, $\varphi(\theta) \leqslant \varphi(\hat{\theta}_n)$.
  Finalement : $\forall \theta \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(\theta) \leqslant \varphi(\hat{\theta}_n)$.

  $\boxed{\text{On en déduit que la fonction } \varphi \text{ admet un unique maximum en } \hat{\theta}_n = \dfrac{S_n}{n}.}$

- Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $\varphi(\theta) \leqslant \varphi(\hat{\theta}_n)$.
  Par définition de φ, on en déduit :
  $$\ln(\mathcal{L}(\theta)) \leqslant \ln(\mathcal{L}(\hat{\theta}_n))$$
  Par croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on obtient :
  $$\mathcal{L}(\theta) \leqslant \mathcal{L}(\hat{\theta}_n)$$

  $\boxed{\text{Ainsi, le réel } \hat{\theta}_n \text{ est un maximum de } \mathcal{L}.}$

Commentaire

On peut détailler les éléments apparaissant dans le tableau de variation.
× Tout d'abord : $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \ln(\theta) = -\infty$ et $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \ln(1+\theta) = 0$.
De plus : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $x_k \in \mathbb{N}$, donc $x_k \geqslant 0$. D'où : $S_n \geqslant 0$.
On en déduit : $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \varphi(\theta) = -\infty$
× Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.
$$\varphi(\theta) = S_n \ln(\theta) - (S_n + n) \ln(1+\theta) = \ln(\theta) \left(S_n - (S_n + n) \, \frac{\ln(1+\theta)}{\ln(\theta)} \right)$$
Or :
$$\frac{\ln(1+\theta)}{\ln(\theta)} = \frac{\ln\left(\theta\left(\frac{1}{\theta} + 1\right)\right)}{\ln(\theta)} = \frac{\ln(\theta) + \ln\left(\frac{1}{\theta} + 1\right)}{\ln(\theta)} = 1 + \frac{\ln\left(\frac{1}{\theta} + 1\right)}{\ln(\theta)} \underset{\theta \to +\infty}{\longrightarrow} 1$$
On en déduit :
$$\lim_{\theta \to +\infty} \left(S_n - (S_n + n) \frac{\ln(1+\theta)}{\ln(\theta)} \right) = S_n - (S_n + n) \times 1 = -n \leqslant 0$$
De plus : $\lim\limits_{\theta \to +\infty} \ln(\theta) = +\infty$.
On en déduit : $\lim\limits_{\theta \to +\infty} \varphi(\theta) = -\infty$.

□

4. On pose dorénavant : $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.
La variable T_n est appelée estimateur du maximum de vraisemblance pour θ.

a) Vérifier que T_n est un estimateur sans biais de θ.

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une espérance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. en admettant.
- On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta(T_n) &= \mathbb{E}_\theta\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_\theta(X_i) && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \theta && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.a)}}\textit{)} \\ &= \frac{1}{\cancel{n}} \times \cancel{n}\,\theta \;=\; \theta \end{aligned}$$

Ainsi :

$$b_\theta(T_n) = \mathbb{E}_\theta(T_n) - \theta = \cancel{\theta} - \cancel{\theta} = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } T_n \text{ est un estimateur sans biais de } \theta.}$$

□

b) Calculer le risque quadratique $r_\theta(T_n)$ de T_n et vérifier que $\lim_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0$.

Démonstration.

- La v.a.r. T_n admet une variance en tant que combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent.
- D'après la décomposition biais / variance :

$$\begin{aligned} r_\theta(T_n) &= \mathbb{V}_\theta(T_n) + \cancel{(b_\theta(T_n))}^2 && \textit{(car } b_\theta(T_n) = 0\textit{)} \\ &= \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \;=\; \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) && \textit{(par propriété de la variance)} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) && \textit{(car } X_1, \dots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_1) && \textit{(car } X_1, \dots, X_n \textit{ ont même loi)} \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \theta(1+\theta) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.a)}}\textit{)} \\ &= \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \times \cancel{n}\,\theta(1+\theta) \;=\; \frac{\theta(1+\theta)}{n} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } r_\theta(T_n) = \frac{\theta(1+\theta)}{n} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0}$$

Commentaire

On rappelle que, comme $\lim_{n\to+\infty} r_\theta(T_n) = 0$, la v.a.r. T_n est un estimateur **convergent** de θ.

□

Exercice 5 : HEC 2012

Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(U)$ respectivement, l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire U définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Pour p entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité $U_1, \ldots, U_p$ sont indépendantes si pour tout p-uplet $(u_1, \ldots, u_p)$ de réels, les événements $[U_1 \leqslant u_1], \ldots, [U_p \leqslant u_p]$ sont indépendants.
L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une loi de probabilité utilisée notamment en fiabilité.
Les parties I et II sont largement indépendantes. La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I : Loi à 1 paramètre.

On note λ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}} \, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

1. a) Montrer que la fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ en tant qu'inverse de la fonction $x \mapsto 2\sqrt{x}$:
  - × de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$,
  - × qui ne s'annule pas ($\forall x \in \,]0, +\infty[, \ \sqrt{x} \neq 0$).
- La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ en tant que composée $g_2 \circ g_1$ de :
  - × $g_1 : x \mapsto -\lambda\sqrt{x}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$,
    et telle que : $g_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
  - × $g_2 : u \mapsto \mathrm{e}^u$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_\lambda \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ en tant que produit de fonctions de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

□

b) Dresser le tableau de variation de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\lambda(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x)$.

Démonstration.

- Comme $\lambda > 0$, par produit de limites : $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\lambda(x) = +\infty$.
- Toujours par produit de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x) = 0$.
- La fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. En particulier, elle est dérivable sur $]0, +\infty[$.
  Soit $x \in \,]0, +\infty[$. Tout d'abord, remarquons :

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \right) = \frac{\lambda}{2} \left(x^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \right)$$

  On obtient alors :

$$\begin{array}{rcl} f'_\lambda(x) & = & \dfrac{\lambda}{2} \left(-\dfrac{1}{2} \, x^{-\frac{3}{2}} \, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} + x^{-\frac{1}{2}} \, \dfrac{-\lambda}{2\,\sqrt{x}} \, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \right) \\ & = & -\dfrac{\lambda}{2} \left(\dfrac{1}{2} \, \dfrac{1}{x\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \, \dfrac{\lambda}{2\,\sqrt{x}} \right) \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \ = \ -\dfrac{\lambda}{4} \left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda}{x} \right) \, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \end{array}$$

Comme $x > 0$ et $\lambda > 0$, $f_\lambda'(x)$ apparaît comme l'opposé de trois produits strictement positifs. Ainsi : $f_\lambda'(x) < 0$. Et f_λ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f_\lambda'(x)$	$-$
Variations de f_λ	$+\infty \searrow 0$

□

c) Établir la convexité de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- Notons $u : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda}{x} = x^{-\frac{3}{2}} + \lambda x^{-1}$, de sorte que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\lambda'(x) = -\dfrac{\lambda}{4}\ u(x)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$.
  La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.
  De plus, pour tout $x \in]0, +\infty[$: $u'(x) = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} - \lambda x^{-2} = -\left(\dfrac{3}{2}\ \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda}{x^2}\right)$.
- Soit $x \in]0, +\infty[$.

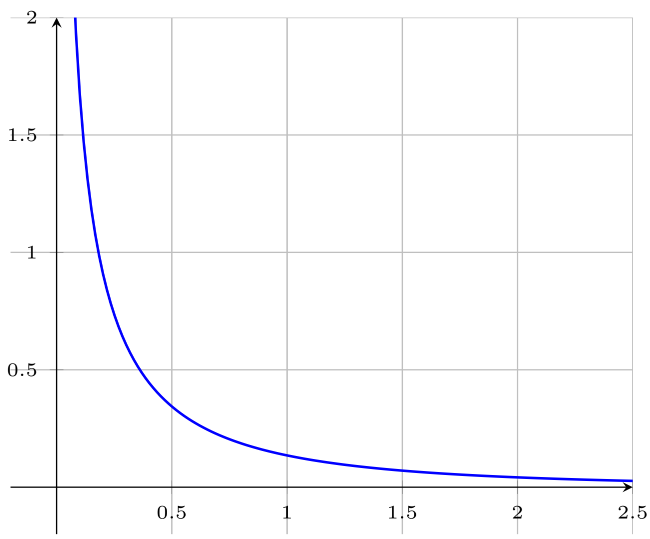
$$\begin{array}{rcl} f_\lambda''(x) & = & -\dfrac{\lambda}{4}\ \left(u'(x)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} + u(x)\ \dfrac{-\lambda}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}\right) \\ & = & -\dfrac{\lambda}{4}\ \left(u'(x) + u(x)\ \dfrac{-\lambda}{2\sqrt{x}}\right)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \\ & = & -\dfrac{\lambda}{4}\ \left(-\left(\dfrac{3}{2}\ \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda}{x^2}\right) - u(x)\ \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}}\right)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \\ & = & \dfrac{\lambda}{4}\ \left(\dfrac{3}{2}\ \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda}{x^2} + \dfrac{\lambda}{2x^2} + \dfrac{\lambda^2}{2x\sqrt{x}}\right)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}\ >\ 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } f_\lambda \text{ est convexe sur }]0, +\infty[}$$

□

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_λ dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Démonstration.



□

2. a) Vérifier que la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$ est une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.
On note $F : x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$.

- La fonction F est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que composée $g_2 \circ g_1$ de :
  × $g_1 : x \mapsto -\lambda\sqrt{x}$ dérivable sur $]0,+\infty[$,
  et telle que : $g_1(]0,+\infty[) \subset \mathbb{R}$.
  × $g_2 : u \mapsto -\mathrm{e}^u$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in]0,+\infty[$.

$$F'(x) = -\left(-\frac{\lambda}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}\right) = f_\lambda(x)$$

$$\boxed{\text{Donc } x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \text{ est une primitive de } f_\lambda \text{ sur }]0,+\infty[.}$$

□

b) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx$ et calculer sa valeur.

Démonstration.

- La fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$, donc elle est continue sur $]0,+\infty[$.
- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx$ est convergente si $\displaystyle\int_0^{1} f_\lambda(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx$ le sont.

On s'intéresse tout d'abord à la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx$.

- La fonction f_λ est $\mathcal{C}^0$ sur $[1,+\infty[$.
- Soit $A \in [1,+\infty[$. D'après la question précédente :

$$\int_1^{A} f_\lambda(x)\, dx = \big[\ F(x)\ \big]_1^A = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{A}} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

  Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx$ converge et vaut $\mathrm{e}^{-\lambda}$.

On s'intéresse maintenant à la nature de $\displaystyle\int_0^{1} f_\lambda(x)\, dx$.

- La fonction f_λ est $\mathcal{C}^0$ sur $]0,1]$.
- Soit $B \in]0,1]$.

$$\int_B^{1} f_\lambda(x)\, dx = \big[\ F(x)\ \big]_B^1 = \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{B}} - \mathrm{e}^{-\lambda} \underset{B\to 0}{\longrightarrow} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$$

  Donc $\displaystyle\int_0^{1} f_\lambda(x)\, dx$ converge et vaut $1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx \text{ converge et vaut } 1 - \cancel{\mathrm{e}^{-\lambda}} + \cancel{\mathrm{e}^{-\lambda}} = 1.}$$

□

c) En déduire que la fonction f_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)***, f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  En particulier, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Par définition de f_λ, on a bien :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f_\lambda(x) \geqslant 0$$
- Tout d'abord :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx = \int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx$$
  car f_λ est nulle en dehors de $]0,+\infty[$.
  D'après la question ***2.b)***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx$ converge et vaut 1.

$$\boxed{\text{Donc } f_\lambda \text{ est une densité de probabilité sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

□

3. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, ayant f_λ pour densité. On note F_λ la fonction de répartition de X et on pose : $Y = \lambda\sqrt{X}$.

a) Calculer pour tout x réel, $F_\lambda(x)$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $X(\Omega) \subset]0,+\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \leqslant 0$, alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ car $X(\Omega) \subset]0,+\infty[$. Donc :
$$F_\lambda(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
  × si $x > 0$. Tout d'abord :
$$\int_{-\infty}^{x} f_\lambda(t)\ dt = \int_0^{x} f_\lambda(t)\ dt$$
  car f_λ est nulle en dehors de $]0,x]$ $(x > 0)$.
  La fonction f_λ est continue sur $]0,x]$. Soit $B \in]0,x]$.
$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_B^x f_\lambda(t)\ dt & = & \Big[-\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{t}} \Big]_B^x & \textit{(d'après la question } \boldsymbol{2.a)}\textit{)} \\ & = & -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} - (-\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{B}}) & \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{B}} - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \\ & \underset{B\to 0}{\longrightarrow} & 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \end{array}$$
  On en déduit :
$$\begin{array}{rcl} F_\lambda(x) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant x]) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_\lambda(t)\ dt \qquad \textit{(car } f_\lambda \textit{ est une densité de } X\textit{)} \\ & = & 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_\lambda : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right. .}$$

□

b) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $X(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$.
  Donc, comme $\lambda > 0$, on obtient : $Y(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$.

$$\boxed{Y(\Omega) \subset \,]0,+\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \leqslant 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset \,]0,+\infty[$. Donc :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × si $x > 0$.

$$\begin{array}{rcll}
F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[\lambda\sqrt{X} \leqslant x\right]\right) & \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{X} \leqslant \dfrac{x}{\lambda}\right]\right) & \textit{(car } \lambda > 0\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^2\right]\right) & \textit{(car } x \mapsto x^2 \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\
& = & F_\lambda\left(\frac{x^2}{\lambda^2}\right) & \textit{(car } F_\lambda \textit{ est la fonction de répartition de } X\textit{)} \\
& = & 1 - \mathrm{e}^{-\cancel{\lambda}\sqrt{\frac{x^2}{\cancel{\lambda^2}}}} & \textit{(d'après la question précédente, car } \frac{x^2}{\lambda^2} > 0\textit{)} \\
& = & 1 - \mathrm{e}^{-x} & \textit{(car } x > 0\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \left\{\begin{array}{cl} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{array}\right. .}$$

- On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{Donc la v.a.r. } Y \text{ suit la loi exponentielle de paramètre 1.}}$$

□

c) Établir pour tout r de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $\mathbb{E}(Y^r)$.

Démonstration.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

- D'après le théorème de transfert, la v.a.r. Y^r admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_Y(t)\, dt$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour des calculs de moments.
- La v.a.r. Y suit la loi exponentielle de paramètre 1. Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_Y(t) = \left\{\begin{array}{cl} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{array}\right.$$

- La fonction f_Y est nulle en dehors de $[0,+\infty[$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_Y(t)\, dt = \int_0^{+\infty} t^r f_Y(t)\, dt$$

- La fonction $t \mapsto t^r\ f_Y(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
  De plus, elle est positive sur $[0, +\infty[$.
- $\times$ Tout d'abord : $t^r\ f_Y(t) = t^r \mathrm{e}^{-t} = \underset{t \to +\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
  En effet :
  $$\frac{t^r \mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^2 t^r \mathrm{e}^{-t} = t^{r+2}\mathrm{e}^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
  $\times$ $\forall t \in [1, +\infty[$, $t^r \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.
  $\times$ L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant 2 $(2 > 1)$.
  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^r\ f_Y(t)\ dt$ converge.
- De plus la fonction $t \mapsto t^r\ f_Y(t)$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^r \mathrm{e}^{-t}\ dt$ est bien définie.

Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^r \mathrm{e}^{-t}\ dt$ converge.

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } r \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(Y^r) \text{ existe.}}$$

□

d) Montrer que pour tout r de $\mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{E}\left(Y^{r+1}\right) = (r+1)\,\mathbb{E}\left(Y^r\right)$.

Démonstration.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
D'après la question précédente :

$$\mathbb{E}(Y^{r+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{r+1} f_Y(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t^{r+1}\mathrm{e}^{-t}\ dt$$

Soit $A \geqslant 0$. On effectue une intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^{r+1} & & u'(t) & = & (r+1)t^r \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^A t^{r+1}\mathrm{e}^{-t}\ dt &= \left[\ -t^{r+1}\mathrm{e}^{-t}\ \right]_0^A + (r+1)\int_0^A t^r \mathrm{e}^{-t}\ dt \\ &= -A^{r+1}\mathrm{e}^{-A} + (r+1)\int_0^A t^r \mathrm{e}^{-t}\ dt \end{aligned}$$

Or, par croissances comparées : $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} -A^{r+1}\mathrm{e}^{-A} = 0$.

De plus, $\displaystyle\int_0^A t^r \mathrm{e}^{-t}\ dt$ admet une limite finie en $+\infty$ car $\mathbb{E}(Y^r)$ existe.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit, par passage à la limite quand } A \text{ tend vers } +\infty : \\ \mathbb{E}(Y^{r+1}) = (r+1)\ \mathbb{E}(Y^r).\end{array}}$$

□

e) En déduire pour tout r de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Y^r)$ et $\mathbb{E}(X^r)$. En particulier, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\forall r \geqslant 2$, $\mathbb{E}(Y^r) = r\ \mathbb{E}(Y^{r-1})$.
- On obtient ainsi, pour tout $r \geqslant 2$:

$$\mathbb{E}(Y^r) = r\mathbb{E}(Y^{r-1}) = r(r-1)\mathbb{E}(Y^{r-2}) = \cdots = r(r-1) \times \cdots \times 2\,\mathbb{E}(Y^1) = r!\,\mathbb{E}(Y)$$

(on le démontre rigoureusement par une récurrence immédiate)
Or, comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$: $\mathbb{E}(Y) = 1$.

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(Y^r) = r!}$$

- Par définition : $Y = \lambda\sqrt{X}$.
Ainsi : $Y^2 = \lambda^2\ X$ et comme $\lambda^2 > 0$: $X = \dfrac{Y^2}{\lambda^2}$. On en déduit :

$$X^r = \left(\frac{Y^2}{\lambda^2}\right)^r = \frac{Y^{2r}}{\lambda^{2r}}$$

Et par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X^r) = \mathbb{E}\left(\frac{Y^{2r}}{\lambda^{2r}}\right) = \frac{1}{\lambda^{2r}}\,\mathbb{E}(Y^{2r}) = \frac{(2r)!}{\lambda^{2r}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall r \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X^r) = \dfrac{(2r)!}{\lambda^{2r}} \\ \text{En particulier : } \mathbb{E}(X) = \dfrac{2}{\lambda^2} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \dfrac{4!}{\lambda^4} - \dfrac{4}{\lambda^4} = \dfrac{20}{\lambda^4}. \end{array}}$$

□

Partie II : Estimation ponctuelle de λ.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on note $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X définie dans la question ***3***.

On rappelle que $Y = \lambda\sqrt{X}$, et on pose pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $Y_k = \lambda\sqrt{X_k}$, $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Y_j$ et g_k une densité de S_k.

On admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes et que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, les variables aléatoires S_k et Y_{k+1} sont indépendantes. On admet que si T et Z sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_T et f_Z telles que f_T et f_Z soient bornées, alors la variable aléatoire $T + Z$ admet une densité f_{T+Z} définie pour tout x réel par :

$$f_{T+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y)\, f_Z(x-y)\ dy$$

4. *a)* En utilisant les propriétés admises, montrer que : $g_2(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} x\mathrm{e}^{-x} & \text{si} & x > 0 \\ 0 & \text{si} & x \leqslant 0 \end{array} \right.$.

Démonstration.

- Par définition : $S_2 = \sum\limits_{j=1}^{2} Y_j = Y_1 + Y_2$.
Comme $Y_1(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$ et $Y_2(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$ alors : $S_2(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.

$$\boxed{S_2(\Omega) \subset \,]0, +\infty[}$$

- D'autre part, les v.a.r. Y_1 et Y_2 :
  - $\times$ sont des variables à densité.
    En effet, elles suivent la loi exponentielle de paramètre 1, d'après la question ***3.b)***.
  - $\times$ sont indépendantes, d'après l'énoncé.
  - $\times$ admettent pour densité commune la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La fonction f est bien bornée sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-0} = 1$.

Donc, d'après l'énoncé, la v.a.r. S_2 admet une densité g_2 définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_2(x) = f_{Y_1+Y_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(y) f_{Y_2}(x-y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) f(x-y)\ dy$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Deux cas se présentent alors :
  - $\times$ si $x \leqslant 0$. Alors $g_2(x) = 0$ car $S_2(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
  - $\times$ si $x > 0$. Remarquons que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(y)f(x-y) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) \neq 0 \\ f(x-y) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [0, +\infty[\\ x - y \in [0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0 \\ x - y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0 \\ y \leqslant x \end{cases}$$

On en déduit : $f(y)f(x-y) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ y \in [0, x]$. Et ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(x-y)\ dy \ = \ \int_0^x f(x)f(x-y)\ dy$$

car $y \mapsto f(y)f(x-y)$ est nulle en dehors de $[0, x]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \int_0^x f(y)f(x-y)\ dy = \int_0^x e^{-y}\, e^{-(x-y)}\ dy \\ &= e^{-x} \int_0^x e^{-\cancel{y}+\cancel{y}}\ dy = e^{-x} \int_0^x 1\ dy \\ &= e^{-x} \left[\, y \,\right]_0^x = x e^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall x \in \mathbb{R},\ g_2(x) = \begin{cases} x e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.}$$

Remarque

- Le théorème fournit dans l'énoncé a deux objectifs :
  1) démontrer (sous certaines hypothèses) que la somme de deux variables aléatoires à densité Z et T est à densité,
  2) donner une expression de la densité de la somme $Z + T$ en fonction des densités de Z et T.

  Ce résultat n'est pas au programme d'ECE. Il sera donc toujours rappelé dans les énoncés qui exigent son utilisation. Ce résultat revient régulièremet dans les sujets de type HEC / ESSEC. Il est donc préférable de l'avoir déjà vu.
- La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(x) f_Z(x-y)$ est appelée produit de convolution de f_T et f_Z.
  Le théorème stipule donc que, sous certaines hypothèse, la densité d'une somme de v.a.r. est le produit de convolution des densités. $\square$

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$,

où $\quad \mathcal{P}(n) : \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$.

- **Initialisation** :
  Par définition : $S_1 = \sum\limits_{j=1}^{1} Y_j = Y_1$. Donc : $S_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
  Or : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{(1-1)!}\, x^{1-1}\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{0!}\, x^0\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$. Ainsi, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-1)!}\, x^{1-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

  Ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vérifié.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\, x^{n}\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$)

  - Par définition : $S_{n+1} = \sum\limits_{j=1}^{n+1} Y_j = \sum\limits_{j=1}^{n} Y_j + Y_{n+1} = S_n + Y_{n+1}$.
    Comme pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, $Y_j(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$, alors $S_{n+1}(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.

$$\boxed{S_{n+1}(\Omega) \subset \,]0, +\infty[}$$

  - D'autre part, les v.a.r. S_n et Y_{n+1} :
    × sont des variables à densité. En effet, Y_{n+1} suit la loi exponentielle de paramètre 1, d'après la question ***3.b)***, et, par hypothèse de récurrence, S_n admet pour densité g_n.
    × sont indépendantes, d'après l'énoncé.
    × admettent pour densités les fonctions f et g_n.
    La fonction f est bien bornée sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-0} = 1$.
    La fonction g_n est également bornée sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant g_n(n-1)$.

  - On en déduit, d'après le théorème de l'énoncé, que la v.a.r. S_{n+1} admet une densité g_{n+1} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_{n+1}(x) = f_{S_n + Y_{n+1}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_n}(y) f_{Y_{n+1}}(x-y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(y) f(x-y)\ dy$$

  - Soit $x \in \mathbb{R}$.
    Deux cas se présentent alors :
    × si $x \leqslant 0$. Alors $g_{n+1}(x) = 0$ car $S_{n+1}(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
    × si $x > 0$. Remarquons que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$g_n(y)f(x-y) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} g_n(y) \neq 0 \\ f(x-y) \neq 0 \end{cases} \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} y \in \,]0, +\infty[\\ x-y \in [0, +\infty[\end{cases} \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} y > 0 \\ x-y \geqslant 0 \end{cases} \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} y > 0 \\ y \leqslant x \end{cases}$$

On en déduit : $g_n(y)f(x-y) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; y \in]0,x]$. Et ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(y)f(x-y)\ dy = \int_0^x g_n(y)f(x-y)\ dy$$

car $y \mapsto g_n(y)f(x-y)$ est nulle en dehors de $]0,x]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(x) &= \int_0^x g_n(y)f(x-y)\ dy \\
&= \int_0^x \frac{1}{(n-1)!}\, y^{n-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{-(x-y)}\ dy \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-x}\int_0^x y^{n-1}\mathrm{e}^{-\cancel{y}+\cancel{y}}\ dy \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-x}\int_0^x y^{n-1}\ dy \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-x}\left[\ \frac{y^n}{n}\ \right]_0^x = \frac{1}{n!}\,x^n\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien : $\forall x \in \mathbb{R},\ g_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\,x^n\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}\,x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.}$$

Remarque

- L'objectif de cette question est encore une fois, l'application du théorème du produit de convolution. C'est pourquoi on ne détaille pas la démonstration du caractère borné de g_n.
  Il s'effectue proprement grâce à une simple étude de fonction.
  Cela donnerait la preuve suivante pour $n \geqslant 2$ (le cas $n = 1$ correspond au cas $g_1 = f$).
  - La fonction g_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Soit $x \in [0,+\infty[$.

    $$g_n'(x) = (n-1)x^{n-2}\mathrm{e}^{-x} - x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} = x^{n-2}\mathrm{e}^{-x}(n-1-x)$$

    Donc : $g_n'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant n-1$.
  - On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$n-1$		$+\infty$
Signe de $g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g_n	0	$\nearrow$	$g_n(n-1)$	$\searrow$	0

  On en déduit que g_n est bornée. Plus précisément : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant g_n(x) \leqslant g_n(n-1)$.
- Au début de la partie II, le sujet fait admettre l'indépendance entre les v.a.r. S_k et Y_{k+1} pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Néanmoins, la démontrer est tout à fait à notre portée : il suffit ici d'invoquer le lemme des coalitions appliqué aux v.a.r. X_1, …, X_n. □

c) On admet que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{S_n}$ est une variable aléatoire à densité.

Pour quelles valeurs de n, l'espérance $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ et la variance $\mathbb{V}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ existent-elles ?

Calculer alors leurs valeurs respectives.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après le théorème de transfert, la v.a.r. $\dfrac{1}{S_n}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\, dx$ est absolument convergente.
- La fonction g_n est nulle en dehors de $]0,+\infty[$. Donc :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\, dx$$
Les fonctions en présence étant positives sur $]0,+\infty[$, l'absolue convergence de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\, dx$ équivaut à la convergence.
- Remarquons alors que pour tout $x > 0$:
$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\, g_n(x) &= \frac{1}{x}\, \frac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}\, \mathrm{e}^{-x} \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\, x^{n-2}\, \mathrm{e}^{-x} \\ &= \frac{1}{n-1}\, \frac{1}{(n-2)!}\, x^{n-2}\, \mathrm{e}^{-x} \\ &= \frac{1}{n-1}\, g_{n-1}(x) \qquad \textit{(vrai si } n-1 \geqslant 1\textit{)} \end{aligned}$$
Ainsi, si $n-1 \geqslant 1$, c'est à dire si $n \geqslant 2$, on reconnaît, à une constante multiplicative près, l'expression de g_{n-1} sur $]0,+\infty[$. La fonction g_{n-1} étant une densité de probabilité, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_{n-1}(x)\, dx$ est convergente et :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{n-1}(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} g_{n-1}(x)\, dx$$
car g_{n-1} nulle en dehors de $]0,+\infty[$.
On ne change pas la nature d'une intégrale impropre par multiplication par un réel non nul de son intégrande.
$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } n \geqslant 2,\ \dfrac{1}{S_n} \text{ admet une espérance.}}$$
- De plus :
$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right) &= \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{n-1}\, g_{n-1}(x)\, dx \\ &= \frac{1}{n-1} \int_{0}^{+\infty} g_{n-1}(x)\, dx = \frac{1}{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{n-1}(x)\, dx \\ &= \frac{1}{n-1} \qquad \textit{(car } g_{n-1} \textit{ est une densité de probabilité)} \end{aligned}$$
$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{n-1}}$$

- Il reste à étudier le cas où $n = 1$.
  Commençons par rappeler : $S_1 = Y_1$ et $f_{Y_1} : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right.$.
  - $\times$ Tout d'abord : $\dfrac{1}{x}\, g_1(x) = \dfrac{1}{x}\, e^{-x} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$
  - $\times$ $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$
  - $\times$ L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ est divergente en tant qu'intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $1 \not> 1$.

  Ainsi, par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_1(x)\, dx$ diverge et il en est donc de même de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_1(x)\, dx$.

  $$\boxed{\text{On en déduit que } \frac{1}{S_n} \text{ admet une espérance seulement si } n \geqslant 2.}$$

- On procède de même pour la variance.
  La v.a.r. $\dfrac{1}{S_n}$ admet une variance si et seulement si la v.a.r. $\left(\dfrac{1}{S_n}\right)^2 = \dfrac{1}{S_n^2}$ admet une espérance.
  D'après le théorème de transfert, la v.a.r. $\dfrac{1}{S_n^2}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, g_n(x)\, dx$ converge absolument ce qui équivaut à démontrer la convergence puisque les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et g_n sont positives.
- La fonction g_n est nulle en dehors de $]0, +\infty[$. Donc :
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, g_n(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, g_n(x)\, dx$$
- Enfin pour tout $x > 0$:
  $$\begin{array}{rcll} \dfrac{1}{x^2}\, g_n(x) & = & \dfrac{1}{x^2}\, \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}\, e^{-x} & \\ & = & \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-3}\, e^{-x} & \\ & = & \dfrac{1}{(n-1)(n-2)}\, \dfrac{1}{(n-3)!}\, x^{n-3}\, e^{-x} & \\ & = & \dfrac{1}{(n-1)(n-2)}\, g_{n-2}(x) & \textit{(vrai si } n-2 \geqslant 1\textit{)} \end{array}$$

  $$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{V}\left(\frac{1}{S_n}\right) \text{ existe si et seulement si } n \geqslant 3.}$$

- Soit $n \geqslant 3$. On calcule :
  $$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n^2}\right) & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, g_n(x)\, dx \ = \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)}\, g_{n-2}(x)\, dx \\ & = & \dfrac{1}{(n-1)(n-2)} \displaystyle\int_0^{+\infty} g_{n-2}(x)\, dx \ = \ \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{n-2}(x)\, dx \\ & = & \dfrac{1}{(n-1)(n-2)} \qquad \textit{(car } g_{n-2} \textit{ est une densité de probabilité)} \end{array}$$

Et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(\frac{1}{S_n}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n^2}\right) - \left(\mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2} \\
&= \frac{\cancel{n} - 1 - (\cancel{n} - 2)}{(n-1)^2(n-2)} \\
&= \frac{1}{(n-2)(n-1)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{(n-2)(n-1)^2}}$$

□

5. On note $(x_1, \dots, x_n)$ un n-uplet de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ constituant une réalisation du n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$. On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit H la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$H(\lambda) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)\right)$$

Montrer que la fonction H admet un maximum atteint en un unique point λ_0 dont on donnera la valeur.

Démonstration.

- Déterminons une expression de H.
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Par propriété de la fonction ln :

$$\begin{aligned}
H(\lambda) &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(f_\lambda(x_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{x_k}}\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x_k}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(\frac{\lambda}{2\ (x_k)^{\frac{1}{2}}}\right) + \ln\left(\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x_k}}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(\lambda) - \ln(2) - \frac{1}{2}\ \ln(x_k) - \lambda\sqrt{x_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(\lambda) - \sum_{k=1}^{n} \ln(2) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) - \lambda \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \qquad \textit{(par linéarité de la somme)} \\
&= n\ln(\lambda) - n\ln(2) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) - \lambda\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \\
&= n\ln(\lambda) - \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\right)\ \lambda - n\ln(2) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)
\end{aligned}$$

- La fonction H est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de :
  × $\lambda \mapsto n\ \ln(\lambda)$ dérivable sur $]0,+\infty[$.
  × $\lambda \mapsto \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\right)\ \lambda - n\ln(2) - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\ \ln(x_k)$ dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que fonction affine.
  (ne pas oublier que la variable est ici λ)
- Soit $\lambda > 0$.
$$H'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}$$
  (par rapport à λ, le réel $-n\ln(2) - \frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\ \ln(x_k)$ est une constante)
  On obtient alors :
$$\begin{aligned} H'(\lambda) \geqslant 0 &\Leftrightarrow \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{\lambda} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{n} \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}} && \text{(car } x \mapsto \tfrac{1}{x} \text{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow \lambda \leqslant \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}} \end{aligned}$$
  Notons $\lambda_0 = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}$.
- On obtient le tableau de variations suivant :

λ	0		λ_0		$+\infty$
Signe de $H'(\lambda)$		$+$	0	$-$	
Variations de H	$-\infty$	$\nearrow$	$H(\lambda_0)$	$\searrow$	$-\infty$

$$\boxed{\text{La fonction } H \text{ admet un unique maximum en } \lambda_0 = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}.}$$

Remarque

- Dans cette question, on dispose initialement d'un n-uplet d'observations $(x_1,\dots,x_n)$.
  Plus précisément, $(x_1,\dots,x_n)$ est une réalisation d'un n-échantillon $(X_1,\dots,X_n)$ de la v.a.r. X. La loi de X dépend d'un paramètre λ, a priori inconnu et qu'on cherche à déterminer. Pour ce faire, une idée naturelle consiste à considérer que la valeur λ qui a permis de générer les observations est celle qui avait la plus grande probabilité de les générer. C'est cette idée qui guide la méthode dite du maximum de vraisemblance, dont la question ci-dessus est une illustration. Le réel λ_0 est précisément la valeur du paramètre λ maximisant la réalisation des observations initiales.
- La méthode du maximum de vraisemblance conduit à considérer la v.a.r. construite à l'aide de ce maximum. C'est l'objet de la question suivante où l'on étudie la v.a.r. λ_n^*.
  On reviendra sur ce point dans le chapitre « Estimation ». □

6. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $\lambda_n^* = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}}$.

a) Que représente λ_0 pour λ_n^* ?

Démonstration.
Rappelons que : $\lambda_0 \;=\; \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}$ où chaque x_k est une réalisation de X_k.

$$\boxed{\text{Le réel } \lambda_0 \text{ est une réalisation de la variable aléatoire } \lambda_n^*.}$$

□

b) Déterminer une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\mathbb{E}\left(a_n\ \lambda_n^*\right) = \lambda$. On note alors : $\hat{\lambda}_n = a_n\ \lambda_n^*$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- On commence par exprimer λ_n^* en fonction de $Y_1, \ldots, Y_n$, puis en fonction de S_n.

$$\lambda_n^* = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}} = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{Y_k}{\lambda}} = \frac{n\lambda}{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k} = \frac{n\lambda}{S_n}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(a_n\lambda_n^*) = \lambda \quad &\Leftrightarrow \quad a_n\mathbb{E}(\lambda_n^*) = \lambda && \textit{(par linéarité de l'espérance)}\\
&\Leftrightarrow \quad a_n\,\mathbb{E}\left(\frac{n\lambda}{S_n}\right) = \lambda\\
&\Leftrightarrow \quad \cancel{\lambda}\,n\,a_n\mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right) = \cancel{\lambda}\\
&\Leftrightarrow \quad n\,a_n\frac{1}{n-1} = 1 && \textit{(d'après la question 4.c)}\\
&\Leftrightarrow \quad a_n = \frac{n-1}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En posant : } \forall n \geqslant 2,\ a_n = \frac{n-1}{n}, \text{ alors } \mathbb{E}(a_n\lambda_n^*) = \lambda.}$$

Remarque
L'énoncé demande de déterminer a_n pour tout $n \geqslant 1$ et non $n \geqslant 2$.
Cependant, on a démontré en question ***4.c)*** que $\dfrac{1}{S_n}$ n'admet pas d'espérance si $n = 1$.
Donc λ_n^* n'en admet pas non plus si $n = 1$. La question n'est donc plus pertinente. □

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}\left(\hat{\lambda}_n\right)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) \;&=\; \mathbb{V}(a_n\lambda_n^*) \;=\; (a_n)^2\mathbb{V}(\lambda_n^*) \;=\; \frac{(n-1)^2}{n^2}\mathbb{V}\left(\frac{n\lambda}{S_n}\right) \;=\; \frac{\cancel{n^2}\lambda^2(n-1)^2}{\cancel{n^2}}\mathbb{V}\left(\frac{1}{S_n}\right)\\
&=\; \frac{\lambda^2\cancel{(n-1)^2}}{(n-2)\cancel{(n-1)^2}} \;=\; \frac{\lambda^2}{n-2} \qquad \textit{(d'après la question 4.c)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) = 0.}$$

□

Partie III : Loi à 2 paramètres.

7. Soit λ et α deux paramètres réels strictement positifs et $f_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{(\lambda,\alpha)}(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{array} \right.$$

a) Montrer que $f_{(\lambda,\alpha)}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- $\times$ Si $\alpha \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto \lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.
  Si $\alpha < 1$, la fonction $x \mapsto \lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
  $(\forall x \in\,]0, +\infty[,\ x^{1-\alpha} > 0)$
  $\times$ La fonction $x \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante.
  On en déduit que la fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f_{(\lambda,\alpha)}(x) \geqslant 0$.
- Montrons que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ est convergente.
  La fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ est nulle en dehors de $]0, +\infty[$ donc :
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx = \int_{0}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$$
  L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ est convergente si $\displaystyle\int_{0}^{1} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ le sont.
- La fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[1, +\infty[$.
  Soit $A \in [1, +\infty[$.
  $$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_1^A f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx & = & \displaystyle\int_1^A \lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}\ dx \\ & = & -\displaystyle\int_1^A \big(-\lambda\alpha\, x^{\alpha-1}\big)\ \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}\ dx \\ & = & -\left[\ \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}\ \right]_1^A \ = \ -(\mathrm{e}^{-\lambda A^\alpha} - \mathrm{e}^{-\lambda}) \ = \ \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda A^\alpha} \end{array}$$
  Or, comme $\alpha > 0$: $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda A^\alpha} = 0$. Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ converge.
- La fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $]0, 1]$.
  Soit $B \in\,]0, 1]$. On démontre, par un calcul analogue, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ converge.
  $$\int_B^1 f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx \ = \ -\left[\ \mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}\ \right]_B^1 \ = \ -(\mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda B^\alpha}) \underset{B\to 0}{\longrightarrow} -\mathrm{e}^{-\lambda} + 1$$
- On en conclut que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$ est convergente. De plus :
  $$\int_0^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx = \int_0^1 f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx + \int_1^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx = (-\mathrm{e}^{-\lambda} + 1) + \mathrm{e}^{-\lambda} = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement, } f_{(\lambda,\alpha)} \text{ est une densité de probabilité sur } \mathbb{R}.}$$

□

Soit W une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, de densité $f_{(\lambda,\alpha)}$. On dit que W suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$.

b) On note $F_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction de répartition de W. Calculer pour tout x réel, $F_{(\lambda,\alpha)}(x)$.

Démonstration.
D'après l'énoncé, $W(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x \leqslant 0$ alors $[W \leqslant x] = \varnothing$.
Ainsi, $F_{(\lambda,\alpha)}(x) = \mathbb{P}([W \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

× si $x > 0$:
La fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ est nulle en dehors de $]0, +\infty[$ donc :

$$\int_{-\infty}^{x} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx = \int_{0}^{x} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx$$

La fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ est $\mathcal{C}^0$ sur $]0, x]$.
Soit $B \in\ ]0, x]$.

$$\begin{aligned} \int_{B}^{x} f_{(\lambda,\alpha)}(t)\ dt &= \int_{B}^{x} \lambda\alpha\, t^{\alpha-1}\, \mathrm{e}^{-\lambda t^{\alpha}}\ dt \\ &= -\left[\ \mathrm{e}^{-\lambda t^{\alpha}}\ \right]_{B}^{x} = \mathrm{e}^{-\lambda B^{\alpha}} - \mathrm{e}^{-\lambda x^{\alpha}} \underset{B\to 0}{\longrightarrow} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^{\alpha}} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$F_{(\lambda,\alpha)}(x) = \mathbb{P}([W \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f_{(\lambda,\alpha)}(x)\ dx = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^{\alpha}}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{(\lambda,\alpha)} : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^{\alpha}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.}$$

Remarque

- Il faut noter que la fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ n'est pas forcément définie (ni continue) en 0 : dans le cas où $\alpha < 1$, on retombe sur une étude similaire à celle de la question ***3.a)***.
- Il faut par ailleurs noter que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_{(\lambda,\alpha)}(t)\ dt$ est forcément convergente puisque l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(\lambda,\alpha)}(t)\ dt$ l'est. Cependant, on est amené à introduire une variable B car comme précisé au point précédent, la fonction $f_{(\lambda,\alpha)}$ n'est pas forcément continue en 0. □

c) Montrer que la variable aléatoire $F_{(\lambda,\alpha)}(W)$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Démonstration.
On note $U = F_{(\lambda,\alpha)}(W)$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} U(\Omega) &= \big(F_{(\lambda,\alpha)}(W)\big)\ (\Omega) \\ &= F_{(\lambda,\alpha)}\ \big(W(\Omega)\big) \\ &\subset F_{(\lambda,\alpha)}\ \big(]0, +\infty[\big) \end{aligned}$$

Or, comme $F_{(\lambda,\alpha)}$ est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$:

$$F_{(\lambda,\alpha)}\ \big(]0, +\infty[\big) = \Big]\lim_{x\to 0} F_{(\lambda,\alpha)}(x), \lim_{x\to+\infty} F_{(\lambda,\alpha)}(x)\Big[=]0, 1[$$

$$\boxed{U(\Omega) \subset\ ]0, 1[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Trois cas se présentent :
  × si $x \leqslant 0$, alors $[U \leqslant x] = \varnothing$, car $U(\Omega) \subset \,]0,1[$. Donc :
  $$F_U(x) = \mathbb{P}([U \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
  × si $x \geqslant 1$, alors $[U \leqslant x] = \Omega$, car $U(\Omega) \subset \,]0,1[$. Donc :
  $$F_U(x) = \mathbb{P}([U \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$
  × si $x \in \,]0,1[$.
  $$\begin{aligned}
  F_U(x) &= \mathbb{P}([U \leqslant x]) \\
  &= \mathbb{P}\left(\left[F_{(\lambda,\alpha)}(W) \leqslant x\right]\right) \\
  &= \mathbb{P}\left(\left[1 - \mathrm{e}^{-\lambda W^\alpha} \leqslant x\right]\right) && \textit{(car W est à valeurs strictement positives)} \\
  &= \mathbb{P}\left(\left[1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda W^\alpha}\right]\right) \\
  &= \mathbb{P}\left([\ln(1-x) \leqslant -\lambda W^\alpha]\right) && \textit{(car $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$)} \\
  &= \mathbb{P}\left(\left[-\frac{\ln(1-x)}{\lambda} \geqslant W^\alpha\right]\right) && \textit{(car $-\lambda < 0$)} \\
  &= \mathbb{P}\left(\left[\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqslant W\right]\right) && \textit{(car $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$)} \\
  &= F_{(\lambda,\alpha)}\left(\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \\
  &= 1 - \exp\left(-\lambda\left(\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}\right) && \textit{(car $\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$)} \\
  &= 1 - \exp\left(-\cancel{\lambda}\left(-\frac{1}{\cancel{\lambda}}\ln(1-x)\right)\right) \\
  &= 1 - \exp(\ln(1-x)) \;=\; \cancel{1} - (\cancel{1} - x) \\
  &= x
  \end{aligned}$$
  Finalement :
  $$F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x & \text{si } x \in \,]0,1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi uniforme sur $[0,1]$.
Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } U = F_{(\lambda,\alpha)}(W) \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]).}$$

Remarque
On reconnaît ici la méthode d'inversion appliquée à la v.a.r. W suivant une loi de Weibull.

□

d) Écrire une fonction **Scilab** permettant de simuler W.

Démonstration.

- On note $G_{(\lambda,\alpha)}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \,]0,1[,\ G_{(\lambda,\alpha)}(x) = \left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Alors, avec les mêmes calculs qu'à la question précédente, on obtient, pour tout $x > 0$:

$$G_{(\lambda,\alpha)}\ \left(F_{(\lambda,\alpha)}(x)\right) \ = \ x$$

Or $U = F_{(\lambda,\alpha)}(W)$ donc $G_{(\lambda,\alpha)}(U) = G_{(\lambda,\alpha)}\big(F_{(\lambda,\alpha)}(W)\big) = W$.

$$\boxed{W = G_{(\lambda,\alpha)}(U)}$$

- On en déduit la fonction **Scilab** suivante pour simuler W :

```
funcion w = simuWB(lambda, alpha)
    u = rand()
    w = (-(1 / lambda) ⋆ log(1-u)) ^ (1 / alpha)
endfunction
```

□

8. Soit K une variable aléatoire à densité définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, de densité f_K nulle sur $\mathbb{R}_-$, continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On note F_K la fonction de répartition de K.
On pose pour tout x réel $R(x) = -\ln\left(1 - F_K(x)\right)$ et $r(x) = R'(x)$, où R' est la dérivée de R.

a) On suppose dans cette question que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$ avec $\lambda > 0$.
Établir les propriétés ***(i)*** et ***(ii)*** suivantes :

(i) la fonction r est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et $r(0) = 0$.

(ii) la variable aléatoire $r(K)$ suit la loi $\mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\lambda}, 2\right)$.

Démonstration.

(i) • D'après les hypothèse de cette question :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_K(x) = f_{(\lambda,2)}(x) = \begin{cases} 2\lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_K(x) = F_{(\lambda,2)}(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

• Si $x > 0$, on a donc :

$$R(x) = -\ln(1 - F_K(x)) = -\ln(\cancel{1} - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\lambda x^2})) = -\ln(\mathrm{e}^{-\lambda x^2}) = -(-\lambda x^2) = \lambda x^2$$

Et si $x \leqslant 0$:

$$R(x) = -\ln(1 - F_K(x)) = -\ln(1-0) = 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } R : x \mapsto \begin{cases} \lambda x^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.}$$

- La fonction R est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Donc r est continue sur $]0,+\infty[$.
  De plus, pour tout $x > 0$:

$$\tau_0(R)(x) = \frac{R(x) - R(0)}{x - 0} = \frac{\lambda x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \lambda x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

  Donc R est dérivable en 0 et $r(0) = R'(0) = 0$.

- Soit $x > 0$.

$$r(x) = R'(x) = 2\lambda x$$

  Donc : $\lim\limits_{x \to 0^+} r(x) = 0 = r(0)$.
  Ainsi r est continue à droite en 0.

- De plus, comme $\lambda > 0$, r est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{La fonction } r \text{ est continue et strictement croissante sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } r(0) = 0.}$$

(ii) On note $Z = r(K)$.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} Z(\Omega) & = & \big(r(K)\big)\,(\Omega) \\ & = & r\big(K(\Omega)\big) \\ & \subset & r\big(]0,+\infty[\big) \end{array}$$

  Or, comme r est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$r\big(]0,+\infty[\big) = \,]\lim_{x \to 0} r(x), \lim_{x \to +\infty} r(x)[\, \subset \,]0,+\infty[$$

$$\boxed{Z(\Omega) \subset \,]0,+\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x \leqslant 0$, alors $[Z \leqslant x] \subset \varnothing$, car $Z(\Omega) = \,]0,+\infty[$. Donc :

$$F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

× si $x > 0$.

$$\begin{array}{rcl} F_Z(x) & = & \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([r(K) \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([2\lambda K \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}\left(\left[K \leqslant \dfrac{x}{2\lambda}\right]\right) \\ & = & F_K\left(\dfrac{x}{2\lambda}\right) \ = \ 1 - \exp\left(-\lambda\left(\dfrac{x}{2\lambda}\right)^2\right) \\ & = & 1 - \exp\left(-\dfrac{1}{4\lambda}x^2\right) \end{array}$$

- Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Z(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\dfrac{1}{4\lambda}x^2\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

  On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\lambda}, 2\right)$.

  Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } r(K) \hookrightarrow \mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\lambda}, 2\right).}$$

□

b) Réciproquement, on suppose dans cette question que les propriétés ***(i)*** et ***(ii)*** sont vérifiées. Montrer que K suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$. Conclusion ?

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Deux cas se présentent :
  - × si $x \leqslant 0$.
  $$F_K(x) = \mathbb{P}([K \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f_K(t)\ dt = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt = 0$$
  - × si $x > 0$.
  D'après ***(i)***, la fonction r est strictement croissante, donc :
  $$[K \leqslant x] = [r(K) \leqslant r(x)]$$
  D'où :
  $$F_K(x) = \mathbb{P}([K \leqslant x]) = \mathbb{P}([r(K) \leqslant r(x)]) = F_{r(K)}(r(x))$$
  Or, d'après ***(ii)*** : $r(K) \hookrightarrow \mathcal{WB}\left(\dfrac{1}{4\lambda}, 2\right)$. D'où :
  $$F_K(x) = F_{(\frac{1}{4\lambda},2)}(x) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{4\lambda}(r(x))^2\right)$$
  On en déduit :
  $$1 - F_K(x) = \exp\left(-\frac{1}{4\lambda}(r(x))^2\right)$$
  Ainsi :
  $$R(x) = -\ln(1 - F_K(x)) = \frac{1}{4\lambda}(r(x))^2$$
    - D'après ***(i)***, la fonction r est strictement croissante et vérifie $r(0) = 0$.
    Donc : $\forall x > 0,\ r(x) > 0$.
    - D'après l'énoncé : $\forall x > 0,\ f_K(x) > 0$. Donc F_K est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
    Or $F_K(0) = 0$. Donc : $\forall x > 0,\ F_K(x) > 0$.
    De plus, comme F_k est une fonction de répartition : $\lim\limits_{x \to +\infty} F_K(x) = 1$.
    Donc, comme F_K est strictement croissante : $\forall x > 0,\ F_K(x) < 1$.
    Finalement :
    $$\forall x > 0,\ 0 < F_K(x) < 1, \quad \text{donc} \quad R(x) = -\ln(1 - F_K(x)) > 0$$
  On obtient alors :
  $$R'(x) = r(x) = \sqrt{4\lambda R(x)} = 2\sqrt{\lambda}\sqrt{R(x)}$$
  Donc, comme $R(x) > 0$:
  $$\frac{R'(x)}{2\sqrt{R(x)}} = \sqrt{\lambda}$$
  Soit $a \in]0, x]$. On obtient :
  $$\begin{array}{ccc} \displaystyle\int_a^x \frac{R'(t)}{2\sqrt{R(t)}}\ dt & = & \displaystyle\int_a^x \sqrt{\lambda}\ dt = \Big[\ \sqrt{\lambda}\ t\ \Big]_a^x = \sqrt{\lambda}\ x - \sqrt{\lambda}\ a \\ \shortparallel & & \\ \Big[\ \sqrt{R(x)}\ \Big]_a^x & & \\ \shortparallel & & \\ \sqrt{R(x)} - \sqrt{R(a)} & & \end{array}$$

Or F_K est une primitive de f_K et, d'après l'énoncé, f_K est continue sur $\mathbb{R}$.
Donc F_K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En particulier F_K est continue sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que R est continue sur $\mathbb{R}$.
D'où : $\lim\limits_{a\to 0^+} \sqrt{R(a)} = R(0) = 0$.
De plus : $\lim\limits_{a\to 0^+} \sqrt{\lambda}\, a = 0$.
On en déduit :

$$\sqrt{R(x)} = \sqrt{\lambda}\, x \quad \text{donc} \quad R(x) = \lambda x^2$$

En dérivant, on obtient : $r(x) = R'(x) = 2\lambda x$.
En remplaçant r dans l'expression de F_K, on a :

$$F_K(x) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{4\lambda}(r(x))^2\right) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{4\lambda}\,(2\lambda x)^2\right) = 1 - \exp(-\lambda x^2)$$

- Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_K(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{WB}(\lambda, 2)$.
Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } K \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, 2)}$$

On a montré en question ***8.a)*** :

$$K \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, 2) \ \Rightarrow\ \textit{(i)} \text{ et } \textit{(ii)} \text{ sont vérifiées}$$

On a montré en question ***8.b)*** :

$$K \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, 2) \ \Leftarrow\ \textit{(i)} \text{ et } \textit{(ii)} \text{ sont vérifiées}$$

$$\boxed{\text{Donc } K \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, 2) \text{ si et seulement si les propriétés } \textit{(i)} \text{ et } \textit{(ii)} \text{ sont vérifiées}}$$

Remarque
Cette question nécessitait de nombreuses prises d'initiative.
En particulier pour la résolution de l'équation :

$$R'(x) = 2\sqrt{\lambda}\sqrt{R(x)}$$

On remarque que cette équation relie la fonction R et sa dérivée. On appelle de telles équations des **équations différentielles d'ordre 1** (d'ordre 1 puisqu'elle fait apparaître la dérivée première). On les exprime généralement sous cette forme :

$$y'(x) = f(y(x)) + c(x) \quad \text{que l'on note plus simplement} \quad y' = f(y) + c(x)$$

où c, f et y sont trois fonctions.
On est, dans cette question, dans un cas particulier d'une équation différentielle dite de Bernoulli :

$$y'(x) = b(x)\ (y(x))^\beta \quad \text{que l'on note plus simplement} \quad y' = b(x)\ y^\beta$$

Dans notre cas, $b(x) = 2\sqrt{\lambda}$ et $\beta = \dfrac{1}{2}$.
Ce type d'équation se résout toujours de la même manière :

1) on divise l'équation par y^β (en ayant vérifié au préalable que $y^\beta(x) \neq 0$, pour tout x).
On obtient :

$$\frac{y'}{y^\beta} = b(x)$$

2) on intègre l'équation précédente entre a et x (où a est une constante à fixer). □

Dans les questions ***9.*** et ***10.***, l'entier n est supérieur ou égal à 2. On note $w_1, \ldots, w_n$ des réels strictement positifs et non tous égaux.

9. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x \, \ln(w_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} - \frac{1}{x}$$

a) Soit $y_1, \ldots, y_n$ des réels non tous nuls et $z_1, \ldots, z_n$ des réels quelconques.
En étudiant la fonction polynomiale du second degré Q définie sur $\mathbb{R}$ par $Q(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} (z_k - t\, y_k)^2$, établir l'inégalité :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\, z_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right)$$

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{n} (z_k - ty_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} (z_k^2 - 2ty_kz_k + t^2y_k^2) = \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\Big)t^2 - 2\Big(\sum_{k=1}^{n} y_kz_k\Big)t + \sum_{k=1}^{n} z_k^2$$

La fonction Q est donc une fonction polynomiale du second degré.
De plus : $Q(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} (z_k - ty_k)^2 \geqslant 0$.
Donc son discriminant Δ est négatif ou nul. D'où :

$$\cancel{4}\Big(\sum_{k=1}^{n} y_kz_k\Big)^2 - \cancel{4}\Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\Big) \leqslant 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \Big(\sum_{k=1}^{n} y_kz_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\Big)}$$

□

b) Montrer que la fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- Soit $x \in \,]0, +\infty[$.

$$\varphi(x) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x \ln(w_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} - \frac{1}{x} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x\ln(w_k)} \ln(w_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x\ln(w_k)}} - \frac{1}{x}$$

  Or : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{e}^{x\ln(w)} > 0$.
  Donc : $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x\ln(w_k)} > 0$.
  Ainsi la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de quotients de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont les dénominateurs ne s'annulent pas.
  $(\forall x \in \,]0, +\infty[,\ x > 0$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x\ln(w_k)} > 0)$

- Soit $x \in \,]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 \mathrm{e}^{x\ln(w_k)}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{x\ln(w_k)}\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)\mathrm{e}^{x\ln(w_k)}\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x\right)^2} + \dfrac{1}{x^2} \\
&= \dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 (w_k)^x\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x\right)^2} + \dfrac{1}{x^2} \\
&= \dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left((w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x\right)^2} + \dfrac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

- On applique alors la question ***8.a)*** avec :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \left\{ \begin{array}{l} y_k = \ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}} \\ z_k = (w_k)^{\frac{x}{2}} \end{array} \right.$$

  Les réels y_1, ..., y_n sont bien non tous nuls.
  En effet, si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $y_k = 0$, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $w_k = 1$.
  Ceci n'est pas possible car w_1, ..., w_n sont non tous égaux.
  On obtient alors :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \left((w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right)$$

  Donc :

$$\dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \left((w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\frac{x}{2}}(w_k)^{\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x\right)^2} \geqslant 0$$

  Or : $\dfrac{1}{x^2} > 0$. Donc : $\varphi'(x) > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } \varphi \text{ est strictement croissante sur }]0, +\infty[.}$$

□

c) On note n_0 le nombre d'entiers k_0 de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $w_{k_0} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (w_k)$.
Montrer que $1 \leqslant n_0 \leqslant n - 1$.

Démonstration.

- La famille de réels $(w_1, \ldots, w_n)$ est finie. Donc elle admet un maximum. Ainsi : $n_0 \geqslant 1$.
- D'après l'énoncé, w_1, ..., w_n sont non tous égaux. Donc au moins l'un de ces réels ne réalise pas le maximum. Ainsi : $n_0 \leqslant n - 1$.

$$\boxed{\text{Finalement : } 1 \leqslant n_0 \leqslant n - 1.}$$

□

d) Donner un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x$ en fonction de n_0 et w_{k_0}, lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration.

- On note I_0 l'ensemble des entiers naturels k vérifiant : $w_k = w_{k_0} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (w_k)$.
  Autrement dit :
  $$I_0 = \{k \in [\![1, n]\!] \ / \ w_k = w_{k_0}\}$$
  (par définition de I_0 : $\text{Card}(I_0) = n_0$*)*
- Soit $x \in \,]0, +\infty[$.
  $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (w_k)^x &= \sum_{k \in I_0} (w_k)^x + \sum_{k \notin I_0} (w_k)^x \\ &= \sum_{k \in I_0} (w_{k_0})^x + \sum_{k \notin I_0} (w_k)^x \\ &= n_0 (w_{k_0})^x + \sum_{k \notin I_0} (w_k)^x \end{aligned}$$
  On obtient alors :
  $$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x}{n_0 (w_{k_0})^x} = 1 + \frac{\sum\limits_{k \notin I_0} (w_k)^x}{n_0 (w_{k_0})^x} = 1 + \frac{1}{n_0} \sum_{k \notin I_0} \left(\frac{w_k}{w_{k_0}}\right)^x$$
- Or, si $k \notin I_0$, alors : $0 < w_k < w_{k_0} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} (w_k)$.
  Donc : $0 < \dfrac{w_k}{w_{k_0}} < 1$.
  D'où : $\forall k \notin I_0, \ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{w_k}{w_{k_0}}\right)^x = 0$.
  Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x}{n_0 (w_{k_0})^x} = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \sum_{k=1}^{n} (w_k)^x \underset{x \to +\infty}{\sim} n_0 (w_{k_0})^w.}$$

□

e) Calculer en fonction de w_{k_0}, la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
(on distinguera les deux cas $w_{k_0} = 1$ et $w_{k_0} \neq 1$).

Démonstration.

- Si $w_{k_0} = 1$.
  - × D'après la question précédente : $\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x \underset{x \to +\infty}{\sim} n_0$. Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x = n_0$.
  - × On calcule :
  $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x &= \sum_{k \in I_0} \ln(w_k)(w_k)^x + \sum_{k \notin I_0} \ln(w_k)(w_k)^x \\ &= n_0 \ln(w_{k_0})(w_{k_0})^x + \sum_{k \notin I_0} \ln(w_k)(w_k)^x \\ &= \sum_{k \notin I_0} \ln(w_k)(w_k)^x \qquad \textit{(car } w_{k_0} = 1, \textit{ donc } \ln(w_{k_0}) = 0\textit{)} \end{aligned}$$

Or, par définition de I_0 :
$$\forall k \notin I_0, \ 0 < w_k < w_{k_0} = 1$$
Donc : $\forall k \notin I_0, \ \lim\limits_{x \to +\infty} (w_k)^x = 0$.
D'où :
$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x = \lim_{x \to +\infty} \sum_{k \notin I_0} \ln(w_k)(w_k)^x = 0$$
Ainsi : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} = \dfrac{0}{n_0} = 0$.

× De plus : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Ainsi, si $w_{k_0} = 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0 = \ln(w_{k_0})$.

- Si $w_{k_0} \neq 1$.
Avec le même raisonnement qu'à la question précédente, on obtient :
$$\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x \underset{x \to +\infty}{\sim} n_0 \ln(w_{k_0})(w_{k_0})^x$$
Donc :
$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\cancel{n_0} \cancel{(w_{k_0})^x} \ln(w_{k_0})}{\cancel{n_0} \cancel{(w_{k_0})^x}} = \ln(w_{k_0})$$
D'où :
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} = \ln(w_{k_0})$$
Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
Ainsi, si $w_{k_0} \neq 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \ln(w_{k_0})$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = \ln(w_{k_0}).}$$

□

f) En déduire que sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $\varphi(x) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)$ admet une unique solution.

Démonstration.

- La fonction φ est :
  × continue sur $]0, +\infty[$ (car dérivable sur $]0, +\infty[$ d'après la question ***9.b)***)
  × strictement croissante sur $]0, +\infty[$ (toujours d'après la question ***9.b)***)

  Ainsi, φ réalise une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\varphi(]0, +\infty[)$.
$$\varphi(]0, +\infty[) = \left] \lim_{x \to 0^+} \varphi(x), \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) \right[=]-\infty, \ln(w_{k_0})[$$

- Détaillons le calcul de $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x)$.
  Tout d'abord : $\lim\limits_{x \to 0^+} (w_k)^x = 1$.
  Donc :
  $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^x}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^x} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)}{n}$$
  De plus : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
  Finalement, on a donc bien : $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty$.

- Montrons maintenant que $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) \in \,]-\infty, \ln(w_{k_0})[$.
  Tout d'abord :
  × pour tout $k \notin I_0$: $w_k < w_{k_0}$, donc $\ln(w_k) < \ln(w_{k_0})$ (car la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$).
  D'où : $\sum\limits_{k \notin I_0} \ln(w_k) < \sum\limits_{k \notin I_0} \ln(w_{k_0})$.
  × pour tout $k \in I_0$: $w_k = w_{k_0}$, donc $\ln(w_k) = \ln(w_{k_0})$.
  D'où : $\sum\limits_{k \in I_0} \ln(w_k) = \sum\limits_{k \in I_0} \ln(w_{k_0})$.
  D'où :
  $$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{k \in I_0} \ln(w_k) + \sum\limits_{k \notin I_0} \ln(w_k) & < & \sum\limits_{k \in I_0} \ln(w_{k_0}) + \sum\limits_{k \notin I_0} \ln(w_{k_0}) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) & & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_{k_0}) \ = \ n \ln(w_{k_0}) \end{array}$$
  Ainsi :
  $$\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) < n \ln(w_{k_0})$$
  On en déduit :
  $$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) < \frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n} \ln(w_{k_0}) = \ln(w_{k_0})$$
  On a donc bien : $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) \in \,]-\infty, \ln(w_{k_0})[$.

$$\boxed{\text{Ainsi l'équation } \varphi(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) \text{ admet une unique solution sur }]0, +\infty[, \text{ que l'on notera } \hat{\alpha}.}$$

□

10. On note $(W_1, \dots, W_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi $\mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$ définie dans la question ***7.*** dont une réalisation est le n-uplet $(w_1, \dots, w_n)$.
On suppose que les paramètres λ et α sont inconnus.
Soit G la fonction de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $G(\lambda, \alpha) = \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_{(\lambda,\alpha)}(w_k)\right)$.

a) Montrer que la fonction G admet un unique point critique $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

Démonstration.

- Déterminons une expression explicite de G.
Soit $(\lambda, \alpha) \in]0, +\infty[^2$.

$$\begin{array}{rcl} G(\lambda,\alpha) & = & \ln\left(\prod\limits_{k=1}^{n} f_{(\lambda,\alpha)}(w_k)\right) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(f_{(\lambda,\alpha)}(w_k)\right) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\lambda\alpha(w_k)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda(w_k)^\alpha}\right) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\ln(\lambda) + \ln(\alpha) + (\alpha-1)\ln(w_k) + \ln(\mathrm{e}^{-\lambda(w_k)^\alpha})\right) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(\lambda) + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(\alpha) + (\alpha-1)\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) - \lambda\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha \\ & = & n\ln(\lambda) + n\ln(\alpha) + (\alpha-1)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)\Big) - \lambda\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha\Big) \end{array}$$

- Montrons que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$.
La fonction $(\lambda, \alpha) \mapsto \ln(\lambda)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$ en tant que composée $h_2 \circ h_1$ de :
  - × $h_1 : (\lambda, \alpha) \mapsto \lambda$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$ en tant que fonction polynomiale, et $h_1(]0, +\infty[^2) \subset]0, +\infty[$,
  - × $h_2 : u \mapsto \ln(u)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

  De même, la fonction $(\lambda, \alpha) \mapsto \ln(\alpha)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$.
De plus, la fonction $(\lambda, \alpha) \mapsto (\alpha-1)\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)\Big) - \lambda\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha\Big)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$ en tant que fonction polynomiale.

La fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$ en tant que combinaison linéaire de fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$.

- Soit $(\lambda, \alpha) \in]0, +\infty[^2$.

$$\partial_1(G)(\lambda, \alpha) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} (w_k)^\alpha$$

$$\partial_2(G)(\lambda, \alpha) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) - \lambda\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^\alpha$$

- Soit $(\lambda, \alpha) \in \,]0, +\infty[^2$.
  Le point (λ, α) est un point critique de G si et seulement si : $\nabla(G)(\lambda, \alpha) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$.

$$\begin{array}{rl} & \nabla(G)(\lambda, \alpha) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(G)(\lambda, \alpha) & = & 0 \\ \partial_2(G)(\lambda, \alpha) & = & 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{n}{\lambda} - \sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\alpha} \ = \ 0 \\ \dfrac{n}{\alpha} + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) - \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\alpha} \ = \ 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \lambda \ = \ \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\alpha}} \\ \dfrac{n}{\alpha} + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) - \lambda \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\alpha} \ = \ 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} \lambda \ = \ \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\alpha}} \\ \dfrac{n}{\alpha} + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) - n \, \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\alpha}}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\alpha}} \ = \ 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Or :

$$\begin{array}{rl} & \dfrac{n}{\alpha} + \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) - n \, \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\alpha}}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\alpha}} \ = \ 0 \\ \Leftrightarrow & n \, \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\alpha}}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\alpha}} - \dfrac{n}{\alpha} = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) \\ \Leftrightarrow & \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\alpha}}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\alpha}} - \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) \\ \Leftrightarrow & \varphi(\alpha) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k) \end{array}$$

Or, d'après la question ***9.f***, $\hat{\alpha}$ est l'unique solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation $\varphi(\alpha) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)$.

Donc :

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \hat{\alpha}$$

On obtient donc :

$$\nabla(G)(\lambda,\alpha) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\alpha}} \\ \alpha & = & \hat{\alpha} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}} = \hat{\lambda} \\ \alpha & = & \hat{\alpha} \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } G \text{ admet un unique point critique } (\hat{\lambda},\hat{\alpha}) \text{ sur } (\mathbb{R}_+^*)^2.}$$

□

b) Montrer que la fonction G admet un maximum local au point $(\hat{\lambda},\hat{\alpha})$.

Démonstration.

- Soit $(\lambda,\alpha) \in \,]0,+\infty[^2$.

$$\partial^2_{1,1}(G)(\lambda,\alpha) = -\frac{n}{\lambda^2}$$

$$\partial^2_{1,2}(G)(\lambda,\alpha) = -\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\alpha}$$

Or, G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$, donc, d'après le théorème de Schwarz :

$$\partial^2_{2,1}(G)(\lambda,\alpha) = -\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\alpha}$$

Enfin :

$$\partial^2_{2,2}(G)(\lambda,\alpha) = -\frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2(w_k)^{\alpha}$$

- On en déduit :

$$\partial^2_{1,1}(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha}) = -\frac{n}{\hat{\lambda}^2} = -\frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}\right)^2}{n}$$

- Notons alors : $A = \nabla^2(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha})$. D'après le théorème de Schwarz, la matrice A est symétrique réelle et donc diagonalisable.
On en conclut qu'il existe $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible tel que :

$$\nabla^2(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha}) \;=\; P\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

(où μ_1 et μ_2 sont les valeurs propres - pas forcément distinctes - de A)
Dans la suite, on adopte les notations de Monge, à savoir :

$$A = \nabla^2(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha}) \;=\; \begin{pmatrix} r & t \\ t & s \end{pmatrix}$$

- Remarquons :

$$\begin{array}{rcl} \mu \text{ valeur propre de } A & \Leftrightarrow & A - \mu\, I_2 \text{ non inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det\big(A - \mu\, I_2\big) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \det\left(\begin{pmatrix} r-\mu & t \\ t & s-\mu \end{pmatrix}\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow & (r-\mu)\,(t-\mu) - s^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & \mu^2 - (r+t)\,\mu + (rt - s^2) = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{array}{l} \mu \text{ est racine du polynôme} \\ Q(X) = X^2 - (r+t)\,X + (rt - s^2) \end{array} \end{array}$$

- Comme μ_1 et μ_2 sont valeurs propres (pas forcément distinctes) de A, alors elles sont racines de P. Précisons que P ne peut admettre d'autre racine (sinon A aurait une valeur propre différente de μ_1 et μ_2). On en déduit que Q est facteur de $(X-\mu_1)$ et $(X-\mu_2)$. Enfin, comme Q est unitaire :

$$\begin{array}{rcl} Q(X) & = & (X-\mu_1)\,(X-\mu_2) \\ & = & X^2 - (\mu_1+\mu_2)\,X + \mu_1\,\mu_2 \end{array}$$

- On en déduit, par identification :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r+t & = & \mu_1+\mu_2 \\ rt-s^2 & = & \mu_1\,\mu_2 \end{array} \right.$$

- Déterminons alors le signe de $\mu_1\,\mu_2$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \mu_1\,\mu_2 & = & rt-s^2 \ = \ \det\left(\nabla^2(G)(\hat{\lambda},\hat{\alpha})\right) \\ & = & \dfrac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}\right)^2}{n} \left(\dfrac{n}{\hat{\alpha}^2} + \dfrac{n}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}\right)^2} \sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 (w_k)^{\hat{\alpha}} \right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\hat{\alpha}}\right)^2 \\ & = & \left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}}{\hat{\alpha}} \right)^2 + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}\right)\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 (w_k)^{\hat{\alpha}}\right) - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\hat{\alpha}}\right)^2 \end{array}$$

On applique la question ***9.a)*** (en procédant comme dans la question ***9.b)***), avec :

$$\forall k \in [\![1,N]\!], \left\{ \begin{array}{rcl} y_k & = & \ln(w_k)(w_k)^{\frac{\hat{\alpha}}{2}} \\ z_k & = & (w_k)^{\frac{\hat{\alpha}}{2}} \end{array} \right.$$

On obtient alors :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)(w_k)^{\hat{\alpha}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} (\ln(w_k))^2 (w_k)^{\hat{\alpha}}\right)$$

Comme de plus :

$$\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (w_k)^{\hat{\alpha}}}{\hat{\alpha}} \right)^2 > 0$$

on en déduit : $rt-s^2>0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mu_1\,\mu_2 > 0. \text{ Les valeurs propres de } A \text{ sont donc non nulles et de même signe. On en conclut que } G \text{ admet un extremum local au point } (\hat{\lambda},\hat{\alpha}).}$$

- Il reste à déterminer le signe de ces valeurs propres μ_1 et μ_2.
  Remarquons :
  $$rt \ = \ \mu_1\,\mu_2 + s^2 \ > \ 0$$
  Ainsi, r et t sont aussi deux quantités non nulles et de même signe. Or :
  $$r \ = \ \partial^2_{1,1}(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha}) = -\frac{n}{\hat{\lambda}^2} < 0$$
  Enfin :
  $$\mu_1 + \mu_2 \ = \ r + t < 0$$
  Comme μ_1 et μ_2 sont de même signe, on en déduit $\mu_1 < 0$ et $\mu_2 < 0$.

En résumé, la fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]0, +\infty[^2$. Elle admet le point critique $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ sur cet ensemble. De plus, les valeurs propres μ_1 et μ_2 de la matrice $A = \nabla^2(G)(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$ sont non nulles et toutes les deux négatives. On en déduit que G admet un maximum local au point $(\hat{\lambda}, \hat{\alpha})$.

Remarque
La démonstration consiste à redémontrer un théorème classique mais hors programme en voie ECE, dont l'énoncé est le suivant.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^2$.

Soit $(x_0, y_0) \in D$ un point critique de f.

Notons :

$$\Delta \ = \ \partial^2_{1,1}(f)(x_0, y_0) \times \partial^2_{2,2}(f)(x_0, y_0) \ - \ \left(\partial^2_{1,2}(f)(x_0, y_0)\right)^2 \ = \ \det\left(\nabla^2(f)(x_0, y_0)\right)$$

1. Si $\Delta < 0$ alors f n'admet pas d'extremum local au point (x_0, y_0).
(car dans ce cas les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et de signe opposé)

2. Si $\Delta > 0$ alors f admet un extremum local au point (x_0, y_0).
(car dans ce cas les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et de même signe)

 a) Si $\partial^2_{1,1}(f)(x_0, y_0) < 0$, c'est un maximum.
 (car les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et négatives)

 b) Si $\partial^2_{1,1}(f)(x_0, y_0) > 0$, c'est un minimum.
 (car les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et positives)

3. Si $\Delta = 0$, on ne peut pas conclure.
(l'une des deux valeurs propres est nulle) □