Fonctions réelles de deux variables réelles

Exercice 1 (EDHEC 2006)

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

1. ***a)*** Calculer les dérivées partielles premières de f.

b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}\right)$.

2. ***a)*** Calculer les dérivées partielles secondes de f.

b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.

3. ***a)*** Développer $2\left(x + \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{3}{2}\left(y - \dfrac{1}{6}\right)^2$.

b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, par :

$$g(x, y) = 2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{2y} + 2\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y$$

a) Utiliser la question *3.* pour établir que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) \geqslant -\dfrac{1}{6}$.

b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 2 (ECRICOME 2017)

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0$, $\varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

2. Étudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.

On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.

3. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.

Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$? Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a.$$

4. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

5. Calculer les dérivées partielles premières de f.

6. Démontrer que pour tout $(x,y) \in U$:

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \iff \begin{cases} x = y, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

7. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie **A**.

Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$ et $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$.

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie **A**.

8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.

9. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1).
Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 {z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 {z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}.$$

10. On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.

11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Exercice 3 (EDHEC 2017)

On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2\,(x - y)^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. **a)** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a : $\left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array} \right.$.

c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3. **a)** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

d) Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$.
Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.

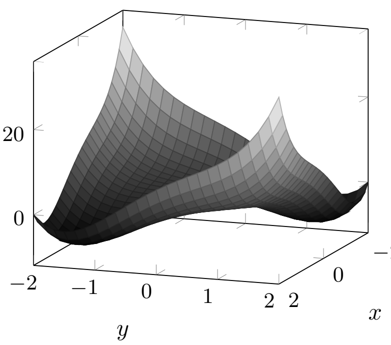
4. **a)** Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.

b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

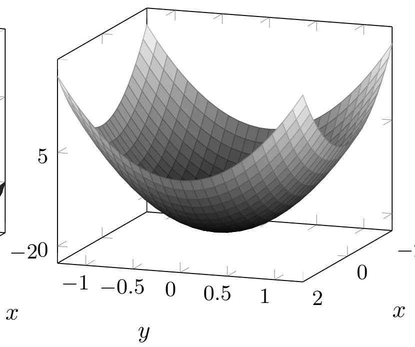
5. **a)** Compléter la deuxième ligne du script suivant afin de définir la fonction f.

```
1 function z = f(x,y)
2     z = ---
3 endfunction
4 x = linspace(-2,2,101)
5 y = x
6 fplotd3d(x,y,f)
```

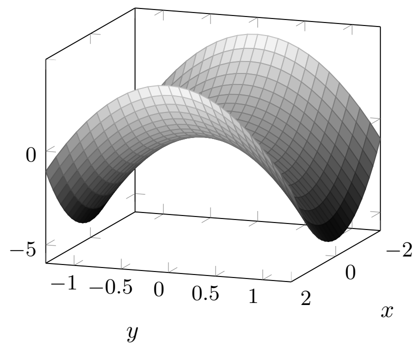
b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.



Nappe 1



Nappe 2



Nappe 3

Exercice 4 (EDHEC 2016)

On considère l'application $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0,+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet : $0,\ 69 < \ln(2) < 0,\ 70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0,+\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Montrer que C admet une tangente en 0 et préciser celle-ci.

b) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I, et préciser les coordonnées de I.

c) Tracer l'allure de C.

5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0,+\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0,+\infty[^2\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$, par :

$$F(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x)$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$.

7. ***a)*** Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$. Montrer que (x,y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f(\ln(x)) = 1$$

b) Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e,e).

8. La fonction F admet-elle un extremum local en (e,e) ?