Fonctions réelles de deux variables réelles

Exercice 1 (EDHEC 2006)

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$.

1. a) Calculer les dérivées partielles premières de f.

Démonstration.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale.
Donc elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 (*et* 2) sur $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)(x, y) = 4x + 2y - 1 \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x, y) = 4y + 2x - 1}$$

□

b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}\right)$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Le couple (x, y) est un point critique de f si et seulement si : $\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$. De plus :

$$\begin{aligned}
\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \partial_1(f)(x, y) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x, y) & = & 0 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 4x & + & 2y & = & 1 \\ 2x & + & 4y & = & 1 \end{array}\right. \\
&\overset{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rcrcl} 4x & + & 2y & = & 1 \\ & & 6y & = & 1 \end{array}\right. \quad \overset{L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \left\{\begin{array}{rrcl} 12x & & = & 2 \\ & 6y & = & 1 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{6} \\ y = \frac{1}{6} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, le seul point critique de } f \text{ est } A = \left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}\right).}$$

□

2. a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.

Démonstration.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial^2_{1,1}(f)(x, y) = 4, \quad \partial^2_{2,1}(f)(x, y) = 2 \\ \partial^2_{1,2}(f)(x, y) = 2 \quad \text{et} \quad \partial^2_{2,2}(f)(x, y) = 4 \end{array}}$$

□

b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.

Démonstration.

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
  La matrice hessienne $\nabla^2(f)(x, y)$ de f est donnée par :

$$\nabla^2(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(x, y) & \partial^2_{1,2}(f)(f)(x, y) \\ \partial^2_{2,1}(f)(x, y) & \partial^2_{2,2}(f)(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\nabla^2(f)\left(\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}$$

- Déterminons les valeurs propres de $\nabla^2(f)\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

  Le réel λ est valeur propre de $\nabla^2(f)\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ si et seulement si $\nabla^2(f)\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) - \lambda\, I_2$ n'est pas inversible.

$$\begin{aligned}\det\left(\nabla^2(f)\left(\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6}\right) - \lambda\, I_2\right) &= \det\left(\begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix}\right) = (4-\lambda)^2 - 4 \\ &= (4-\lambda-2)(4-\lambda+2) = (2-\lambda)(6-\lambda)\end{aligned}$$

  Donc la matrice $\nabla^2(f)\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) - \lambda\, I_2$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda \in \{2,6\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Sp}\left(\nabla^2(f)\left(\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6}\right)\right) = \{2,6\}.}$$

- Or $2 > 0$ et $6 > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ admet un minimum local en } A.}$$

- De plus :

$$\begin{aligned} m &= f\left(\tfrac{1}{6},\tfrac{1}{6}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \\ &= \cancel{6} \times \frac{1}{6^{\cancel{2}}} - \frac{2}{6} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{m = -\frac{1}{6}}$$

□

3. ***a)*** Développer $2\left(x + \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{3}{2}\left(y - \dfrac{1}{6}\right)^2$.

Démonstration.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} & 2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 \\ = \ & 2\left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{1}{16} + \cancel{2}\, x\, \frac{y}{\cancel{2}} - 2\, x\, \frac{1}{4} - \cancel{2}\, \frac{y}{\cancel{2}}\, \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{2}\left(y^2 - 2\, y\, \frac{1}{6} + \frac{1}{36}\right) \\ = \ & 2x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{1}{8} + 2xy - x - \frac{y}{2} + \frac{3}{2}y^2 - \frac{y}{2} + \frac{1}{24} \\ = \ & 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y + \frac{1}{6} \\ = \ & f(x,y) - m \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = f(x,y) - m}$$

□

b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
D'après la question précédente :

$$f(x,y) - m = 2\left(x + \frac{y}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 \ \geqslant \ 0$$

On obtient donc :

$$f(x,y) \geqslant m$$

$$\boxed{\text{Cette inégalité est valable pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ donc } m \text{ est le minimum global de } f \text{ sur } \mathbb{R}^2.}$$

□

4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$, par :

$$g(x,y) = 2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{2y} + 2\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y$$

a) Utiliser la question ***3.*** pour établir que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) \geqslant -\dfrac{1}{6}$.

Démonstration.

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} g(x,y) & = & 2\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^{2y} + 2\mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y \\ & = & 2(\mathrm{e}^x)^2 + 2(\mathrm{e}^y)^2 + 2(\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^y) - \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y \end{array}$$

  Donc, en posant $X = \mathrm{e}^x$ et $Y = \mathrm{e}^y$:

$$g(x,y) = 2X^2 + 2Y^2 + 2XY - X - Y = f(X,Y)$$

- Or, d'après la question ***3.***, le réel m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
  On en déduit : $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^2,\ f(X,Y) \geqslant m$. Ainsi :

$$g(x,y) = f(X,Y) \ \geqslant \ m = -\frac{1}{6}$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) \geqslant -\frac{1}{6}}$$

□

b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- D'après la question précédente, g admet $-\dfrac{1}{6}$ comme minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
- Par ailleurs, en conservant les notations précédentes, si $X = \dfrac{1}{6}$ et $Y = \dfrac{1}{6}$, alors :

$$f(X,Y) = -\frac{1}{6} = g(x,y)$$

- Il s'agit donc de trouver x et y tels que : $X = \dfrac{1}{6}$ et $Y = \dfrac{1}{6}$. Or :

$$X = \frac{1}{6} \ \Leftrightarrow \ \mathrm{e}^x = \frac{1}{6} \ \Leftrightarrow \ x = \ln\left(\frac{1}{6}\right) \ \Leftrightarrow \ x = -\ln(6)$$

  De même :

$$Y = \frac{1}{6} \ \Leftrightarrow \ y = -\ln(6)$$

- On obtient alors :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) \geqslant -\frac{1}{6} = g(-\ln(6), -\ln(6))$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } g \text{ admet } -\dfrac{1}{6} \text{ comme minimum global sur } \mathbb{R}^2. \\ \text{Il est atteint au point } (-\ln(6), -\ln(6)).\end{array}}$$

□

Exercice 2 (ECRICOME 2017)

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0$, $\varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

Démonstration.

- Déterminons $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x)$.

  Tout d'abord, comme $a > 0$: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{2a} = 0$. De plus : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

  $$\boxed{\text{Donc : } \lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty.}$$

- Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x)$.

  Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

  $$\varphi(x) = x^{2a}\left(\frac{\ln(x)}{x^{2a}} - a\right) = x^{2a}\left(\frac{1}{2a}\frac{2a\ln(x)}{x^{2a}} - a\right) = x^{2a}\left(\frac{1}{2a}\frac{\ln(x^{2a})}{x^{2a}} - a\right)$$

  Tout d'abord, comme $a > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2a} = +\infty$.

  Donc, par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^{2a})}{x^{2a}} = 0$.

  $$\boxed{\text{D'où, comme } -a < 0 : \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty.}$$

□

2. Étudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.

On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

  $$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a^2x^{2a-1} = \frac{1}{x} - 2a^2\frac{x^{2a}}{x} = \frac{1-2a^2x^{2a}}{x}$$

- On a : $x > 0$. Donc :

  $$\begin{aligned}
  \varphi'(x) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - 2a^2x^{2a} \geqslant 0 \\
  &\Leftrightarrow \quad 1 \geqslant 2a^2x^{2a} \\
  &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2a^2} \geqslant x^{2a} \\
  &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}} \geqslant x
  \end{aligned}$$

  (car, comme $a > 0$, $x \mapsto x^{\frac{1}{2a}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$)

- On note $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	0		x_0		$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

Commentaire

On rappelle que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha > 0$.
Ici, $a > 0$, donc : $\dfrac{1}{2a} > 0$. D'où la stricte croissance de $x \mapsto x^{\frac{1}{2a}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\square$

3. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.
Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$? Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$?

Démonstration.

- Déterminons le signe de $\varphi(x_0)$ lorsque $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x_0) & = & \ln(x_0) - a\ {x_0}^{2a} \\ & = & \ln\left(\left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}\right) - a\ \left(\left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}\right)^{2a} \\ & = & -\dfrac{1}{2a}\ \ln(2a^2) - a\ \dfrac{1}{2a^2} \\ & = & -\dfrac{1}{2a}\ \ln(2a^2) - \dfrac{1}{2a} \\ & = & -\dfrac{1}{2a}\ (\ln(2a^2) + 1) \end{array}$$

Or : $0 < a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$. Donc : $a^2 < \dfrac{1}{2\mathrm{e}}$. D'où : $2a^2 < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
Ainsi : $\ln(2a^2) < \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\ln(\mathrm{e}) = -1$ car la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
Donc : $\ln(2a^2) + 1 < 0$.
Comme $-\dfrac{1}{2a} < 0$, on en déduit : $-\dfrac{1}{2a}(\ln(2a^2) + 1) > 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \varphi(x_0) > 0.}$$

– Étude sur $]0, x_0]$. La fonction φ est :
  × continue sur $]0, x_0]$,
  × strictement croissante $]0, x_0]$.
  Ainsi φ réalise une bijection de $]0, x_0]$ dans $\varphi(]0, x_0])$.

$$\varphi(]0, x_0]) = \left] \lim_{x \to 0} \varphi(x), \varphi(x_0) \right] =]-\infty, \varphi(x_0)]$$

  Or : $0 \in]-\infty, \varphi(x_0)]$, car $\varphi(x_0) > 0$.

  Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement une solution sur $]0, x_0]$ que l'on notera z_1.

– Étude sur $]x_0, +\infty[$. La fonction φ est :
  × continue sur $]x_0, +\infty[$,
  × strictement décroissante sur $]x_0, +\infty[$.
  Ainsi φ réalise une bijection de $]x_0, +\infty[$ dans $\varphi(]x_0, +\infty[)$.

$$\varphi(]x_0, +\infty[) = \left] \lim_{x \to +\infty} \varphi(x), \varphi(x_0) \right[=]-\infty, \varphi(x_0)[$$

  Or : $0 \in]-\infty, \varphi(x_0)[$, car $\varphi(x_0) > 0$.

  Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement une solution sur $]x_0, +\infty[$ que l'on notera z_2.

L'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2 vérifiant $0 < z_1 < x_0 < z_2$.

- Si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, alors : $\varphi(x_0) = 0$.

  Or, d'après l'étude effectuée en question précédente, pour tout $x \in]0, x_0[\cup]x_0, +\infty[$:

$$\varphi(x) < \varphi(x_0) = 0$$

  Ainsi, si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution : x_0.

- Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, alors $\varphi(x_0) < 0$.

  Or, d'après l'étude effectuée en question précédente, pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) < 0$$

  Ainsi, si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction φ doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- Pour le cas « $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$ », on ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0, +\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels φ est strictement monotone (ici $]0, x_0]$ et $]x_0, +\infty[$).

□

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $U = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ par :

$$\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a.$$

4. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

Démonstration.

- La fonction $(x,y) \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car est la composée $\psi_1 \circ g_1$ où :
  - × $g_1 : (x,y) \mapsto x$ est :
    - – de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car polynomiale sur U,
    - – telle que $g_1(U) \subset \mathbb{R}_+^*$.
  - × $\psi_1 : z \mapsto \ln(z)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- De même la fonction $(x,y) \mapsto \ln(y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
- La fonction $(x,y) \mapsto (xy)^a$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car elle est la composée $\psi_2 \circ g_2$ où :
  - × $g_2 : (x,y) \mapsto xy$ est :
    - – de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car polynomiale sur U,
    - – telle que $g_2(U) \subset \mathbb{R}_+^*$.
  - × $\psi_2 : z \mapsto z^a$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur U comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

Commentaire

Attention à ne pas confondre les fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $(x,y) \mapsto \ln(x)$!
La première est fonction d'une variable réelle :

$$\begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

La seconde est une fonction de **deux** variables réelles :

$$\begin{array}{ccccc}]0,+\infty[& \times &]0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ (x & , & y) & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

□

5. Calculer les dérivées partielles premières de f.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U donc, en particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
  Elle admet donc des dérivées partielles premières en tout point de U.
- Soit $(x,y) \in U$.

$$\partial_1(f)(x,y) = \frac{\ln(y)}{x} - a x^{a-1} y^a = \frac{\ln(y) - a(xy)^a}{x}$$

(en utilisant l'écriture : $f(x,y) = \ln(y)\ \ln(x) - y^a\ x^a$)

$$\partial_2(f)(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} - a y^{a-1} x^a = \frac{\ln(x) - a(xy)^a}{y}$$

(en utilisant l'écriture : $f(x,y) = \ln(x)\ \ln(y) - x^a\ y^a$)

Pour tout $(x,y) \in U$, $\partial_1(f)(x,y) = \dfrac{\ln(y) - a(xy)^a}{x}$ et $\partial_2(f)(x,y) = \dfrac{\ln(x) - a(xy)^a}{y}$.

□

6. Démontrer que pour tout $(x, y) \in U$:

$$(x, y) \text{ est un point critique de } f \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = y, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

Démonstration.
Soit $(x, y) \in U$.

$$(x, y) \text{ est un point critique de } f \;\Leftrightarrow\; \nabla(f)(x, y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \partial_1(f)(x, y) &= 0 \\ \partial_2(f)(x, y) &= 0 \end{cases}$$

D'après la question précédente, on obtient :

$$(x, y) \text{ est un point critique de } f$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\ln(y) - a(xy)^a}{x} &= 0 \\ \dfrac{\ln(x) - a(xy)^a}{y} &= 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \ln(y) - a(xy)^a &= 0 \\ \ln(x) - a(xy)^a &= 0 \end{cases} \qquad \textit{(car } x \neq 0 \textit{ et } y \neq 0\textit{)}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} \ln(y) - \ln(x) &= 0 \\ \ln(x) - a(xy)^a &= 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \ln(x) = \ln(y) \\ \ln(x) - a(xy)^a = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ \ln(x) - a(xy)^a = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ \ln(x) - a(xx)^a = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ \ln(x) - a x^{2a} = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{(x, y) \text{ est un point critique de } f \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = y \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}.}$$

□

7. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie **A**.

Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$ et $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$.

Démonstration.

- On suppose : $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$.

  D'après ***3.***, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $]0, +\infty[$: z_1 et z_2.
  En reprenant la suite d'équivalences précédente, on obtient alors :

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ est un point critique de } f \;&\Leftrightarrow\; \begin{cases} x &= y \\ \varphi(x) &= 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow\; \begin{cases} x &= y \\ x &= z_1 \end{cases} \quad \texttt{OU} \quad \begin{cases} x &= y \\ x &= z_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow\; \begin{cases} y &= z_1 \\ x &= z_1 \end{cases} \quad \texttt{OU} \quad \begin{cases} y &= z_2 \\ x &= z_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow\; (x, y) \in \{(z_1, z_1), (z_2, z_2)\} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}},\ f \text{ admet exactement deux points critiques : } (z_1, z_1) \text{ et } (z_2, z_2).}$$

- On suppose : $a = \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$.

  D'après la question *3.*, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement une solution dans $]0, +\infty[$: x_0.
  En reprenant la suite d'équivalences de la question précédente, on a donc :

$$(x, y) \text{ est un point critique de } f \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ \varphi(x) & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ x & = & x_0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x_0 \\ x & = & x_0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) \in \{(x_0, x_0)\}$$

$$\boxed{\text{Si } a = \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}},\ f \text{ admet exactement un point critique : } (x_0, x_0).}$$

- On suppose : $a > \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$.

  D'après la question *3.*, l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{Si } a > \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}},\ f \text{ n'admet aucun point critique.}}$$

□

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\frac{1}{2e}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie **A**.

8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U d'après la question *4*.
  Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2.
- Soit $(x, y) \in U$.

$$\partial^2_{1,1}(f)(x, y) = \ln(y)\ \frac{-1}{x^2} - ay^a\ (a-1)x^{a-2} = -\frac{\ln(y) + a(a-1)(xy)^a}{x^2}$$

$$\textit{(en utilisant l'écriture : } \partial_1(f)(x, y) = \ln(y)\ \frac{1}{x} - ay^a\ x^{a-1}\textit{)}$$

$$\partial^2_{2,2}(f)(x, y) = \ln(x)\ \frac{-1}{y^2} - ax^a\ (a-1)y^{a-2} = -\frac{\ln(x) + a(a-1)(xy)^a}{y^2}$$

$$\textit{(en utilisant l'écriture : } \partial_2(f)(x, y) = \ln(x)\ \frac{1}{y} - ax^a\ y^{a-1}\textit{)}$$

$$\partial^2_{1,2}(f)(x, y) = \frac{1}{y}\ \frac{1}{x} - ay^{a-1}\ ax^{a-1} = \frac{1 - a^2(xy)^a}{xy} = \partial^2_{2,1}(f)(x, y)$$

$$\textit{(en utilisant l'écriture : } \partial_2(f)(x, y) = \frac{1}{y}\ \ln(x) - ay^{a-1}\ x^a\textit{)}$$

La dernière égalité est obtenue d'après le théorème de Schwarz, car f est $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U.

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall (x, y) \in U,\ \partial^2_{1,1}(f)(x, y) = -\dfrac{\ln(y) + a(a-1)(xy)^a}{x^2},\ \partial^2_{2,2}(f)(x, y) = -\dfrac{\ln(x) + a(a-1)(xy)^a}{y^2}, \\ \partial^2_{1,2}(f)(x, y) = \partial_{2,1}((f))(x, y) = \dfrac{1 - a^2(xy)^a}{xy} \end{array}}$$

□

9. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1).
Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 {z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 {z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\partial^2_{1,1}(f)(z_1, z_1) = -\frac{\ln(z_1) + a(a-1)(z_1 z_1)^a}{z_1^2} = -\frac{\ln(z_1) + a(a-1){z_1}^{2a}}{z_1^2}$$

Or, par définition de z_1 : $\varphi(z_1) = 0$. Donc : $\ln(z_1) = a{z_1}^{2a}$. D'où :

$$\partial^2_{1,1}(f)(z_1, z_1) = -\frac{\cancel{a{z_1}^{2a}} + a^2{z_1}^{2a} - \cancel{a{z_1}^{2a}}}{z_1^2} = -a^2{z_1}^{2a-2}$$

- Avec exactement le même calcul, on obtient : $\partial^2_{2,2}(f) = -a^2{z_1}^{2a-2}$.
- Toujours d'après la question précédente :

$$\partial^2_{1,2}(f)(z_1, z_1) = \frac{1 - a^2(z_1 z_1)^a}{z_1 z_1} = \frac{1 - a^2{z_1}^{2a}}{z_1^2} = \frac{1}{z_1^2} - a^2{z_1}^{2a-2}$$

- Par définition de la matrice hessienne :

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(z_1, z_1) & \partial^2_{1,2}(f)(z_1, z_1) \\ \partial^2_{2,1}(f)(z_1, z_1) & \partial^2_{2,2}(f)(z_1, z_1) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 {z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} & -a^2 {z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}.}$$

□

10. On pose $M = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.

Démonstration.

- On calcule :

$$MX_1 = \begin{pmatrix} -a^2 {z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 {z_1}^{2a-2} & -a^2 {z_1}^{2a-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{z_1^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot X_1$$

où $\lambda_1 = \dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2}$.

$$\boxed{\text{Comme } MX_1 = \lambda_1 \cdot X_1 \text{ avec } X_1 \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}, \text{ alors } \lambda_1 = \frac{1}{z_1^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2} \text{ est valeur propre de } M.}$$

- De même :

$$MX_2 = \begin{pmatrix} -a^2{z_1}^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2{z_1}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2{z_1}^{2a-2} & -a^2{z_1}^{2a-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{z_1^2} \\ -\dfrac{1}{z_1^2} \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{z_1^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_2 \cdot X_2$$

où $\lambda_2 = -\dfrac{1}{z_1^2}$.

$\boxed{\text{Comme } MX_2 = \lambda_2 \cdot X_2 \text{ avec } X_2 \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}, \text{ alors } \lambda_2 = -\dfrac{1}{z_1^2} \text{ est valeur propre de } M.}$

- Démontrons que M n'admet pas d'autre valeur propre.
Pour ce faire, raisonnons par l'absurde.
On suppose que M admet une valeur propre λ_3 différente de λ_1 et différente de λ_2.
Il existe alors un vecteur propre $X_3 \neq 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$ associé à λ_3.

La famille (X_1, X_2, X_3) est alors une famille libre de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. En effet :
  × la famille (X_1, X_2) est une famille libre (car constituée de deux vecteurs non colinéaires) de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de λ_3.
  × la famille (X_3) est une famille libre (car constituée d'un vecteur non nul) de vecteurs propres associé à la valeur propre λ_3.

Ainsi, la famille (X_1, X_2, X_3) obtenue par concaténation de ces deux familles libres de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est une famille libre.
On a donc exhibé une famille libre telle que :

$$\text{Card}\big((X_1, X_2, X_3)\big) = 3 \ > \ 2 = \dim\big(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})\big)$$

Absurde !

$\boxed{\text{On en conclut que } M \text{ admet pour uniques valeurs propres : } \lambda_1 = \dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -\dfrac{1}{z_1^2}.}$

Commentaire

- Le sujet demande ici **les** valeurs propres de M. Il faut donc toutes les préciser.
La matrice M étant une matrice carrée d'ordre 2, elle admet donc au plus deux valeurs propres distinctes. Si on parvient à démontrer : $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors on a bien obtenu toutes les valeurs propres de M. On peut donc, pour conclure cette question, démontrer : $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Pour ce faire, on peut procéder par équivalence :

$$\lambda_1 = \lambda_2 \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{z_1^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2} = -\frac{1}{z_1^2} \ \Leftrightarrow \ 1 - 2a^2{z_1}^{2a} = -1 \ \Leftrightarrow \ \big(a{z_1}^a\big)^2 = 1^2 \ \Leftrightarrow \ a{z_1}^a = 1$$

(on ne détaille pas ici tous les arguments)
Et comme : ${z_1}^a < {x_0}^a = \sqrt{\frac{1}{2a^2}} \ < \ \sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}$ alors ${z_1}^a \neq \frac{1}{a}$. D'où $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

- On a opté pour une démonstration différente en procédant par l'absurde. L'intérêt de cette démonstration est qu'elle ne dépend pas directement de la valeur de z_1 mais simplement des vecteurs propres X_1 et X_2. C'est en réalité un résultat très général : si une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet une base de vecteurs propres $(X_1, \ldots, X_n)$ associés à des valeurs propres (pas forcément distinctes) $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ alors M n'admet pas d'autre valeur propre.
On adopte un point de vue différent du précédent point de la remarque : on ne démontre pas que λ_1 et λ_2 sont distinctes mais simplement qu'il ne peut exister d'autre valeur propre. □

11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Démonstration.
Pour étudier la présence d'un extremum en (z_1, z_1), il faut étudier le signe des valeurs propres de la matrice $\nabla^2(f)(z_1, z_1)$ (ces valeurs propres ont été déterminées à la question précédente).

- Tout d'abord : $\lambda_2 = -\dfrac{1}{z_1^2} < 0$.
- Montrons ensuite : $\lambda_1 = \dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2 {z_1}^{2a-2} > 0$. On raisonne par équivalence.

$$\begin{array}{rcll} \lambda_1 > 0 & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{z_1^2} > 2a^2 {z_1}^{2a-2} & \\ & \Leftrightarrow & 1 > 2a^2 {z_1}^{2a} & \textit{(par multiplication par } z_1^2 > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{2a^2} > {z_1}^{2a} & \textit{(car } 2a^2 > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}} > z_1 & \\ & \Leftrightarrow & x_0 > z_1 & \end{array}$$

La dernière inégalité est vraie, donc, par équivalence, la première aussi. Ainsi : $\lambda_1 > 0$.

La matrice $\nabla^2(f)(z_1, z_1)$ admet deux valeurs propres non nulles de signes opposés. On en conclut que la fonction f ne présente pas d'extremum local en (z_1, z_1).

Commentaire

- On peut ici préciser la nature de ce point critique : les valeurs propres de la hessienne étant non nulles et de signes opposés, la fonction f admet un point selle en (z_1, z_1).
- Comme : $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, on retrouve : $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

□

12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Démonstration.

- Comme $\varphi(z_2) = 0$, on démontre comme en question ***9.*** que la matrice hessienne au point (z_2, z_2) peut s'écrire sous la forme :

$$N = \nabla^2(f)(z_2, z_2) = \begin{pmatrix} -a^2 {z_2}^{2a-2} & \dfrac{1}{z_2^2} - a^2 {z_2}^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_2^2} - a^2 {z_2}^{2a-2} & -a^2 {z_2}^{2a-2} \end{pmatrix}$$

  En menant les mêmes calculs matriciels qu'en question ***10.*** (z_1 et z_2 jouent des rôles symétriques), on démontre alors : $MX_1 = \left(\dfrac{1}{{z_2}^2} - 2a^2 {z_2}^{2a-2}\right) \cdot X_1$ et $MX_2 = -\dfrac{1}{{z_2}^2} \cdot X_2$.

Ainsi, $\lambda_1 = \dfrac{1}{{z_2}^2} - 2a^2 {z_2}^{2a-2}$ et $\lambda_2 = -\dfrac{1}{{z_2}^2}$ sont valeurs propres de N.

- De plus, en utilisant une nouvelle fois la démonstration de la question ***10.***, la matrice N n'admet pas d'autre valeur propre.

- Il reste alors à déterminer le signe de ces valeurs propres pour pouvoir conclure quant à la nature du point critique (z_2, z_2).
  - Tout d'abord : $\lambda_2 = -\dfrac{1}{{z_2}^2} < 0$.
  - Montrons ensuite : $\lambda_1 < 0$. Pour ce faire, on raisonne par équivalence.

$$\begin{array}{rcll} \lambda_1 < 0 & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{{z_2}^2} - 2a^2 {z_2}^{2a-2} < 0 & \\ & \Leftrightarrow & 1 < 2a^2 {z_2}^{2a} & \textit{(car } z_2 > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}} < z_2 & \\ & \Leftrightarrow & x_0 < z_2 & \end{array}$$

La dernière inégalité est vraie, donc, par équivalence, la première aussi. Ainsi : $\lambda_1 < 0$.

La matrice $\nabla^2(f)(z_2, z_2)$ admet donc deux valeurs propres strictement négatives.
On en conclut que la fonction f présente donc un maximum local en (z_2, z_2).

$\square$

Exercice 3 (EDHEC 2017)

On considère la fonction f qui à tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2\ (x-y)^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{La fonction } f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ car c'est une fonction polynomiale.}}$$

□

2. a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

Démonstration.
La fonction f étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, elle admet des dérivées partielles en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- Tout d'abord :
$$\partial_1(f)(x,y) = 4x^3 - 4\ (x-y) = 4x^3 - 4x + 4y$$
- D'autre part :
$$\partial_2(f)(x,y) = 4y^3 - 4\ (x-y)\ (-1) = 4y^3 + 4x - 4y$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)(x,y) = 4\ (x^3 - x + y) \ \text{ et } \ \partial_2(f)(x,y) = 4\ (y^3 + x - y).}$$

□

b) Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a : $\left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right.$.

Démonstration.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \partial_1(f)(x,y) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} 4\ (x^3 - x + y) & = & 0 \\ 4\ (y^3 + x - y) & = & 0 \end{array}\right. \\
&\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \ \Leftrightarrow \ \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right.}$$

□

c) En déduire que f possède trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Démonstration.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- Par définition d'un point critique :

$$\begin{array}{c} (x,y) \text{ est un point} \\ \text{critique de } f \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
\text{(x,y) est un point critique de f} & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^3-x+y & = & 0 \\ y^3+x-y & = & 0 \end{array}\right. \\[2mm]
& \overset{L_2 \leftarrow L_2+L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{rcl} x^3-x+y & = & 0 \\ y^3 & = & -x^3 \end{array}\right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^3-x+y & = & 0 \\ y^3 & = & (-x)^3 \end{array}\right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^3-x+y & = & 0 \\ y & = & -x \end{array}\right. \quad \textit{(car la fonction $t \mapsto t^3$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$)} \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x^3-2x & = & 0 \\ y & = & -x \end{array}\right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x\,(x^2-2) & = & 0 \\ y & = & -x \end{array}\right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x\,(x-\sqrt{2})\,(x+\sqrt{2}) & = & 0 \\ y & = & -x \end{array}\right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} x=0 \ \texttt{OU} \ x=\sqrt{2} \ \texttt{OU} \ x=-\sqrt{2} \\ y=-x \end{array}\right. \\[2mm]
& \Longleftrightarrow & (x,y) \in \big\{(0,0),\ (\sqrt{2},-\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2},\sqrt{2})\big\}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{La fonction f possède trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.}}$$

Commentaire

- La difficulté de cette question réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$.
  On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc. Il est par exemple assez fréquent de faire apparaître une équation du type :

  $$\varphi(x) = \varphi(y)$$

  où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bijective. En réalité, c'est le caractère injectif (φ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ par exemple) qui nous intéresse ici puisqu'il permet de conclure :

  $$x = y$$

  En injectant cette égalité dans la seconde équation, on obtient une nouvelle équation qui ne dépend plus que d'une variable et qu'il est donc plus simple de résoudre.
- Enfin, vérifier que $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ sont des points critiques ne démontre pas que ce sont les seuls et ne constitue donc pas une réponse à la question. $\square$

3. ***a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

Démonstration.

- La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynomiale.
  Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tout d'abord :
$$\partial_{11}^2(f)(x,y) = 4\ (3x^2 - 1)$$
- Ensuite :
$$\partial_{12}^2(f)(x,y) = 4 = \partial_{21}^2(f)(x,y)$$
  La dernière égalité est obtenue en vertu du théorème de Schwarz puisque la fonction f est $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Enfin :
$$\partial_{22}^2(f)(x,y) = 4\ (3y^2 - 1)$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_{11}^2(f)(x,y) = 4\ (3x^2-1),\ \partial_{12}^2(f)(x,y) = 4 = \partial_{21}^2(f)(x,y) \text{ et } \partial_{22}^2(f)(x,y) = 4\ (3y^2-1)}$$

Commentaire

- Il faut penser à utiliser le théorème de Schwarz dès que la fonction à deux variables considérée est $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.
- Ici, le calcul de $\partial_{12}^2(f)(x,y)$ et $\partial_{21}^2(f)(x,y)$ est aisé. Il faut alors concevoir le résultat du théorème de Schwarz comme une mesure de vérification : en dérivant par rapport à la 1$^{\text{ère}}$ variable puis par rapport à la 2$^{\text{ème}}$, on doit obtenir le même résultat que dans l'ordre inverse.

□

b) Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

Démonstration.
On rappelle que la matrice hessienne de f en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est :
$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{11}^2(f)(x,y) & \partial_{12}^2(f)(x,y) \\ \partial_{21}^2(f)(x,y) & \partial_{22}^2(f)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\ (3x^2-1) & 4 \\ 4 & 4\ (3y^2-1) \end{pmatrix}$$

- On en déduit :
$$\nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (0)^2-1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (0)^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$
- Ensuite :
$$\nabla^2(f)\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (\sqrt{2})^2-1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (-\sqrt{2})^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$
- Enfin :
$$\nabla^2(f)\big(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (\sqrt{2})^2-1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (-\sqrt{2})^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2(f)\big(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} = \nabla^2(f)\big(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)}$$

□

c) Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

Démonstration.
Rappelons tout d'abord que, pour toute matrice $H \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est une valeur propre de } H & \Leftrightarrow & H - \lambda\ I \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(H - \lambda\ I) = 0 \end{array}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \det\left(\nabla^2(f)(0,0) - \lambda\ I\right) & = & \det\left(\begin{pmatrix} -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & = & (-4-\lambda)^2 - 4^2 \\ & = & (4+\lambda)^2 - 4^2 \\ & = & (4+\lambda-4)\ (4+\lambda+4) \ = \ \lambda\ (\lambda+8) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \nabla^2(f)(0,0) \text{ admet pour valeurs propres } 0 \text{ et } -8.}$$

- Et :

$$\begin{array}{rcl} \det\left(\nabla^2(f)(\sqrt{2},-\sqrt{2}) - \lambda\ I\right) & = & \det\left(\begin{pmatrix} 20-\lambda & 4 \\ 4 & 20-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & = & (20-\lambda)^2 - 4^2 \\ & = & (20-\lambda-4)\ (20-\lambda+4) \ = \ (16-\lambda)\ (24-\lambda) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \nabla^2(f)(\sqrt{2},-\sqrt{2}) \text{ et } \nabla^2(f)(-\sqrt{2},\sqrt{2}) \text{ admettent pour valeurs propres } 16 \text{ et } 24.}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ces deux matrices admettent deux valeurs propres strictement positives.} \\ \text{On en déduit que } f \text{ admet un minimum local en } (\sqrt{2},-\sqrt{2}) \text{ et en } (-\sqrt{2},\sqrt{2}).\end{array}}$$

Enfin :

$$\begin{array}{rcl} f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) & = & (\sqrt{2})^4 + (-\sqrt{2})^4 - 2\ (\sqrt{2} - (-\sqrt{2}))^2 \\ & = & 4 + 4 - 2\ (2\ \sqrt{2})^2 \\ & = & 8 - 2 \times 4 \times 2 \\ & = & 8 - 16 \ = \ -8 \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ce minimum local a pour valeur } f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -8 = f(-\sqrt{2},\sqrt{2}).}$$

□

d) Déterminer les signes de $f(x,x)$ et $f(x,-x)$ au voisinage de $x = 0$.
Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord :

$$f(x,x) = x^4 + x^4 - 2\ (x-x)^2 = 2\ x^4 \geqslant 0$$

- Par ailleurs :
$$\begin{array}{rcl} f(x,-x) & = & x^4 + (-x)^4 - 2\ (x-(-x))^2 \\ & = & 2x^4 - 2\ (2\ x)^2 \\ & = & 2x^4 - 8x^2 \\ & = & 2x^2\ (x^2-4) = 2x^2\ (x-2)\ (x+2) \end{array}$$
Comme $x^2 \geqslant 0$, la quantité $f(x,-x)$ est du signe de de $(x-2)\ (x+2)$.
Ainsi, $f(x,-x) < 0$ si $x \in]-2,2[\backslash\{0\}$, et $f(x,-x) \geqslant 0$ sinon.
- Enfin, $f(0,0) = 0$.
On déduit de ce qui précède que pour tout x au voisinage de 0 (exclu), on a :
$$f(x,-x) < f(0,0) < f(x,x)$$

On en conclut qu'au point $(0,0)$, la fonction f n'admet ni un minimum local, ni un maximum local. Il n'y a pas d'extremum au point $(0,0)$.

□

4. ***a)*** Pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2$.

Démonstration.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
$$\begin{array}{rl} & f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2 \\ = & f(x,y) - (x^4 - 4x^2 + 4) - (y^4 - 4y^2 + 4) - 2\ (x^2 + 2xy + y^2) \\ = & (\cancel{x^4} + \cancel{y^4} - 2\ (x-y)^2) - \cancel{x^4} - \cancel{y^4} + 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8 \\ = & -2x^2 + 4xy - 2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8 \\ = & -8 \end{array}$$

Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2 = -8$.

Commentaire

- Il y avait une erreur dans le sujet initial. Il était en effet demandé de calculer :
$$f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2) - 2(x+y)^2$$
Le carré du terme $(y^2-2)^2$ n'était donc pas présent dans les énoncés distribués.
- Il est globalement rare que les sujets contiennent des erreurs. Malheureusement, malgré la relecture soignée des concepteurs, il peut arriver que certaines coquilles subsistent. Un candidat repérant une coquille peut le signaler sur sa copie. Attention cependant au faux positif : signaler qu'on a repéré une coquille alors qu'il n'y en a pas fait plutôt mauvais effet.
- Quand la coquille est avérée, la question sort généralement du barème.
- Ici, on pouvait se douter qu'il y avait un problème car, dans l'expression de f, x et y jouent des rôles symétriques ($\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = f(y,x)$). La coquille introduisait une dissymétrie des rôles de x et y, ce qui pouvait mettre la puce à l'oreille.

□

b) Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

Démonstration.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & -8 + \Big((x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2\Big) \\ & \geqslant & -8 \end{array}$$

  car on ajoute à -8 une somme de carrés.

- On rappelle que $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$. Ainsi :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \leqslant f(x,y)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet aux points } (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ et } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ un minimum global.}}$$

$\square$

5. a) Compléter la deuxième ligne du script suivant afin de définir la fonction f.

```
1  function z = f(x,y)
2      z = ---
3  endfunction
4  x = linspace(-2,2,101)
5  y = x
6  fplotd3d(x,y,f)
```

Démonstration.
Il suffit de recopier la définition de la fonction f.

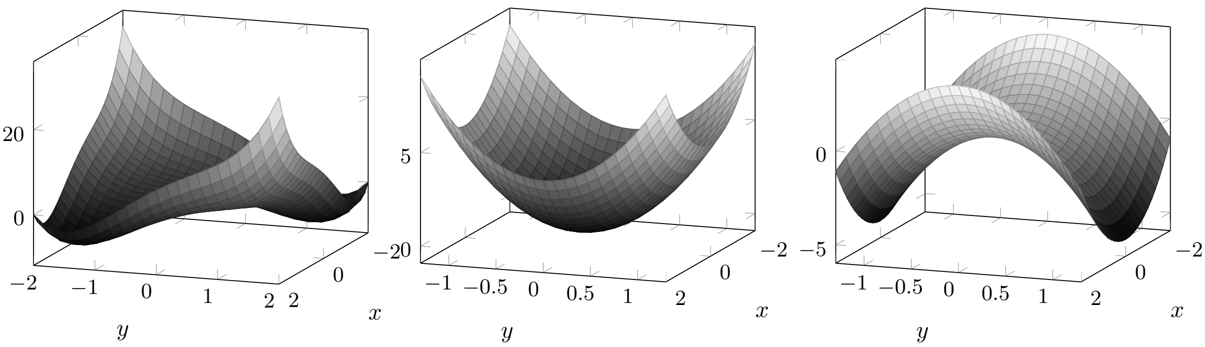
```
2      z = x ^ 4 + y ^ 4 - 2 ⋆ (x - y) ^ 2
```

Commentaire

On rappelle qu'il n'est pas obligatoire de recopier tout le programme lorsqu'il est demandé de compléter un programme à trou.

$\square$

b) Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.



Nappe 1 Nappe 2 Nappe 3

Démonstration.

- D'après l'étude précédente, la fonction f possède un minimum global réalisé en les deux points $((\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}))$.
- On peut écarter la deuxième nappe qui représente une fonction n'admettant un minimum global qu'en un point.
- On peut écarter la troisième nappe qui représente une fonction n'admettant pas de minimum global (elle admet par contre un point selle).
- Seule la première nappe représente une fonction admettant un minimum global réalisé en deux points. C'est donc la représentation de la fonction f considéré.

Le script précédent renvoie la première nappe.

Commentaire

Il était difficile de lire les coordonnées des deux points atteignant le minimum sur l'énoncé original. Pour être certain d'avoir des points (même si la photocopie en noir et blanc rend le graphique peut lisible), il est conseillé de lister les propriétés que doit avoir la nappe représentant f.

$\square$

Exercice 4 (EDHEC 2016)

On considère l'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0, +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet : $0,\ 69 < \ln(2) < 0,\ 70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ car c'est la somme $f = f_1 + f_2$ où :
  - $\times$ $f_1 : t \mapsto t\ln(t)$ continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$,
  - $\times$ $f_2 : t \mapsto t^2$ continue sur $]0, +\infty[$.
- Par ailleurs : $\lim\limits_{t \to 0} t\ln(t) = 0$. De plus, $\lim\limits_{t \to 0} t^2 = 0$.
  Donc $\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0 = f(0)$.
  Donc f est continue en 0.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$

$\square$

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0, +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

Démonstration.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ car c'est la somme $f = f_1 + f_2$ où :
$\times$ $f_1 : t \mapsto t\ln(t)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$,
$\times$ $f_2 : t \mapsto t^2$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

$$\boxed{\forall t \in\ ]0, +\infty[,\ f'(t) = 2t - \left(1 \times \ln(t) + \cancel{t} \times \frac{1}{\cancel{t}}\right) = 2t - \ln(t) - 1}$$

$$\boxed{\forall t \in\ ]0, +\infty[,\ f''(t) = 2 - \frac{1}{t} = \frac{2t - 1}{t}}$$

$\square$

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $t \in\ ]0, +\infty[$. Comme $t > 0$, $f''(t) = \dfrac{2t - 1}{t}$ est du signe de $2t - 1$. Or :

$$2t - 1 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ 2t \geqslant 1 \ \Leftrightarrow\ t \geqslant \frac{1}{2}$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f''(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

Détaillons les éléments de ce tableau.

– $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \cancel{2} \times \dfrac{1}{\cancel{2}} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \cancel{1} + \ln(2) - \cancel{1} = \ln(2)$

– $f'(t) = 2t - \ln(t) - 1 \underset{t \to 0}{\sim} -\ln(t)$. Donc : $\lim\limits_{t \to 0} f'(t) = +\infty$.

– $f'(t) = 2t - \ln(t) - 1 = 2t \left(1 - \dfrac{\ln(t)}{2t}\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} 2t$, car $1 - \dfrac{\ln(t)}{2t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ par croissances comparées.
Donc : $\lim\limits_{t \to +\infty} f'(t) = +\infty$.

- Or $\ln(2) > 0$. Donc : $\forall t \in \,]0, +\infty[$, $f'(t) > 0$.
De plus : $f(t) = t^2 - t\ln(t) = t^2 \left(1 - \dfrac{\ln(t)}{t}\right) \underset{t \to +\infty}{\sim} t^2$ par croissances comparées.
Donc : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.
On obtient donc le tableau de variations suivant pour f :

t	0 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(t)$	$+$
Variations de f	$0 \nearrow +\infty$

$\square$

4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que C admet une tangente en 0 et préciser celle-ci.

Démonstration.

- Soit $t \in \,]0, +\infty[$. Calculons le taux d'accroissement de f en 0.

$$\frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \frac{t^2 - t\ln(t)}{t} = \frac{\cancel{t}(t - \ln(t))}{\cancel{t}} = t - \ln(t)$$

Donc : $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t) - f(0)}{t - 0} = +\infty$.

$\boxed{\text{Donc la courbe } C \text{ admet une demi-tangente verticale en } 0.}$

$\square$

b) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul, noté I, et préciser les coordonnées de I.

Démonstration.
D'après la question précédente, f'' s'annule en changeant de signe uniquement en $\dfrac{1}{2}$.
De plus : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\ln(2)$.

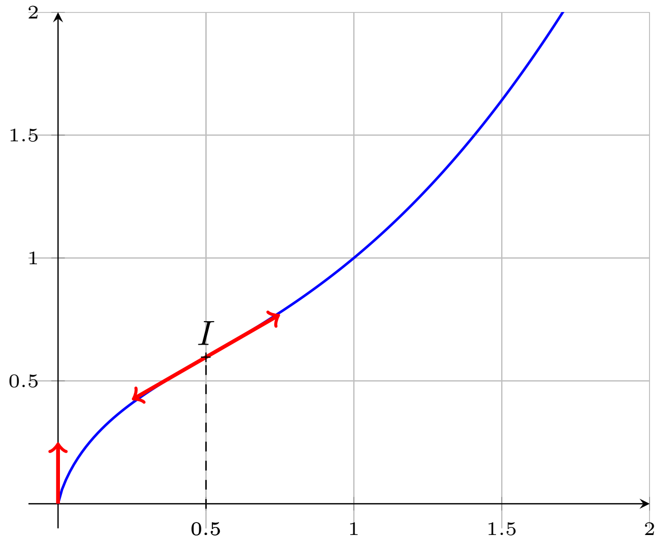
$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un unique point d'inflexion } I \text{ en } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)\right).}$

$\square$

c) Tracer l'allure de C.

Démonstration.
La courbe C admet pour tangente au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ la droite d'équation :

$$\begin{aligned} y &= f\left(\tfrac{1}{2}\right) + f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) \\ &= \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\ \ln(2)\right) + \ln(2)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) \\ &= \tfrac{1}{4} + \ln(2)x \end{aligned}$$



□

5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0, +\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

Démonstration.

- La fonction f est :
  - × continue sur $[0, +\infty[$,
  - × strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

  Ainsi, f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[)$. De plus :

  $$f([0, +\infty[) = \left[f(0), \lim_{t \to +\infty} f(t)\right[= [0, +\infty[$$

  Or $1 \in [0, +\infty[$, donc l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution α sur $[0, +\infty[$.
- De plus $f(1) = 1^2 - 1 \times \ln(1) = 1$. Donc $\alpha = 1$.

$$\boxed{\text{L'équation } f(t) = 1 \text{ admet } 1 \text{ comme unique solution sur } [0, +\infty[.}$$

Commentaire

- Il faut tout de suite repérer cette question comme une application du théorème de la bijection. Et s'empresser d'y répondre !
- Attention de ne pas seulement vérifier que 1 est solution de l'équation $f(t) = 1$.
  Il faut bien montrer ici que c'est **la seule** solution sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$.

□

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0,+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, définie, pour tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$, par :

$$F(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x)$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x,y) de $]0,+\infty[^2$.

Démonstration.

- F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$.
- Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$.

$$\partial_1(F)(x,y) = \ln(y) - y \times \frac{1}{x} = \ln(y) - \frac{y}{x}$$

$$\partial_2(F)(x,y) = x \times \frac{1}{y} - \ln(x) = \frac{x}{y} - \ln(x)$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \partial_1(F)(x,y) = \ln(y) - \frac{y}{x} \ \text{ et } \ \partial_2(F)(x,y) = \frac{x}{y} - \ln(x)}$$

□

7. a) Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$. Montrer que (x,y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f\left(\ln(x)\right) = 1$$

Démonstration.
Le couple (x,y) est un point critique de F si et seulement si :

$$\nabla(F)(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1(F)(x,y) & = & 0 \\ \partial_2(F)(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \ln(y) & = & \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{x}{y} & = & \ln(x) \end{array} \right.$$

- On sait que $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, c'est-à-dire $x > 0$ et $y > 0$. On en déduit : $\dfrac{x}{y} > 0$.
  Ainsi, si (x,y) est un point critique de F, $\ln(x) = \dfrac{x}{y} > 0$, et par stricte croissance de la fonction exponentielle, $x > \mathrm{e}^0 = 1$.
  On a donc déjà $x > 1$.
- On reprend alors la résolution du système.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \ln(y) & = & \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{x}{y} & = & \ln(x) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x\,\ln(y) & = & y \\ \dfrac{x}{\ln(x)} & = & y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x\,\ln\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right) & = & \dfrac{x}{\ln(x)} \\ \dfrac{x}{\ln(x)} & = & y \end{array} \right.$$

La première équation devient alors :

$$\begin{array}{rcl} x\,\ln\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right) = \dfrac{x}{\ln(x)} & \Leftrightarrow & x\,\left(\ln(x) - \ln(\ln(x))\right) = \dfrac{x}{\ln(x)} \\ & \Leftrightarrow & \cancel{x}\,\ln(x)\left(\ln(x) - \ln(\ln(x))\right) = \cancel{x} \quad \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \left(\ln(x)\right)^2 - \ln(x)\,\ln(\ln(x)) = 1 \\ & \Leftrightarrow & f(\ln(x)) = 1 \end{array}$$

On en déduit alors que, si (x, y) est un point critique de F, alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & > & 1 \\ f(\ln(x)) & = & 1 \\ y & = & \dfrac{x}{\ln(x)} \end{array}\right.$$

- Réciproquement, si (x, y) vérifie ces trois conditions, alors $\nabla(F)(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
  D'où (x, y) est un point critique de F.

$$\boxed{\text{Finalement } (x, y) \text{ est un point critique de } F \text{ si et seulement si : } \left\{\begin{array}{l} x > 1 \\ f(\ln(x)) = 1 \\ y = \dfrac{x}{\ln(x)} \end{array}\right.}$$

☐

b) Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e, e).

Démonstration.

- Soit $(x, y) \in \,]0, +\infty[^2$. D'après la question précédente, si (x, y) est un point critique de F, alors, en particulier $f(\ln(x)) = 1$.
- D'après la question ***5.***, l'équation $f(t) = 1$ admet une unique solution sur $]0, +\infty[$: $\alpha = 1$.
  Donc $\ln(x) = 1$ et $x = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
- On obtient alors : $y = \dfrac{\mathrm{e}}{\ln(\mathrm{e})} = \mathrm{e}$. D'où $(x, y) = (\mathrm{e}, \mathrm{e})$.
- Réciproquement :

$$\partial_1(F)(\mathrm{e}, \mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}} = 0 \quad \text{et} \quad \partial_2(F)(\mathrm{e}, \mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}} = 0$$

  Donc (e, e) est un point critique de F.

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } F \text{ admet } (\mathrm{e}, \mathrm{e}) \text{ pour unique point critique.}}$$

☐

8. La fonction F admet-elle un extremum local en (e, e) ?

Démonstration.
Pour savoir si (e, e) est un extremum local pour F, on détermine les valeurs propres de la matrice hessienne de F en (e, e).

- La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$.
  Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur cet ouvert.
- Soit $(x, y) \in \,]0, +\infty[^2$.

$$\nabla^2(F)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(F)(x, y) & \partial^2_{1,2}(F)(x, y) \\ \partial^2_{2,1}(F)(x, y) & \partial^2_{2,2}(F)(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} & -\dfrac{x}{y^2} \end{pmatrix}$$

Donc on obtient :

$$\nabla^2(F)(\mathrm{e},\mathrm{e}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2} & \dfrac{1}{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} \\ \dfrac{1}{\mathrm{e}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} & -\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}$$

- La matrice $\nabla^2(F)(\mathrm{e},\mathrm{e})$ est diagonale, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. D'où $\mathrm{Sp}(\nabla^2(F)(\mathrm{e},\mathrm{e})) = \{\mathrm{e}^{-1}, -\mathrm{e}^{-1}\}$.

$\nabla^2(F)(\mathrm{e},\mathrm{e})$ admet deux valeurs propres de signe contraire,
donc (e,e) n'est pas un extremum local pour F (c'est un point selle).

Commentaire

On rappelle qu'on utilise ici le théorème suivant :
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un **ouvert** U et soit (x_0, y_0) un **point critique** de f.

- Si les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement positives, alors f admet un minimum local en (x_0, y_0).
- Si les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont strictement négatives, alors f admet un maximum local en (x_0, y_0).
- Si les valeurs propres de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$ sont non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0). On parle de *point col* ou *point selle.*
- Si 0 est valeur propre de $\nabla^2(f)(x_0, y_0)$, alors on ne peut rien conclure a priori.

□