Intégration

Exercice 1

On définit la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'intégrale :

$$I_n = \int_2^n f(x)\ dx$$

a. En utilisant l'inégalité de la première question, démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = +\infty$.

b. On définit la fonction F suivante :

$$F : \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \end{array}$$

Calculer la dérivée de F, en déduire une expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$

a. Pour tout k entier supérieur ou égal à trois, montrer qu'on a :

$$\int_k^{k+1} f(x)\ dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\ dx$$

b. En déduire que : $\forall n \geqslant 3,\ I_{n+1} \leqslant S_n \leqslant I_n + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

c. Démontrer que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

4. On se donne un réel α et on définit, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k^2-1)^{\alpha}}$$

a. Dans cette question, $\alpha = 1$. Trouver deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$$

En déduire une expression de T_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

b. Pour quelles valeurs de α la suite (T_n) est-elle convergente ?

Exercice 2 : EDHEC 2014

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$ est définie pour tout réel x.

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$$

2. Établir que f est impaire.

3. ***a)*** Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4. ***a)*** En utilisant la relation $t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant t^2+2t+1$, valable pour tout t positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)$$

b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variation complet de f.

d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

5. ***a)*** Montrer que, pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.

b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x, associe $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

c) En déduire une expression explicite de $f(x)$.

6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

a) Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\displaystyle x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\, dt$.

b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \dfrac{7}{6}x^3$.

c) Conclure que : $f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} x$.

d) Montrer que l'on a aussi : $f(x) \underset{x\to 0^-}{\sim} x$.

Exercice 3 : EML 1996

Pour tout entier naturel n, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\, \mathrm{e}^{-x}\, dx$.

1. ***a)*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire que la suite (I_n) converge et donner sa limite.

2. À l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{1}{(n+1)\,\mathrm{e}} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$$

3. a) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n - \dfrac{1}{(n+1)\,\mathrm{e}} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

b) Trouver un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4 : HEC 2011

Dans tout l'exercice :

× le réel x est fixé, α est un réel strictement positif et f est une fonction définie et continue sur l'intervalle $[x-\alpha, x+\alpha]$ à valeurs réelles ;

× pour tout réel h vérifiant $0 < h \leqslant \alpha$, on pose :

$$S_x(h) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)\ dt \quad \text{et} \quad G_x(h) = \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} tf(x+t)\ dt$$

× sous réserve d'existence, on pose : $s(x) = \lim\limits_{h\to 0^+} S_x(h)$ et $g(x) = \lim\limits_{h\to 0^+} G_x(h)$.

L'objet du problème est l'étude d'une généralisation de la notion de dérivée d'une fonction à partir de fonctions définies par des intégrales.

1. a) Calculer $\displaystyle\int_{-h}^{h} dt$, $\displaystyle\int_{-h}^{h} (x+t)\ dt$, $\displaystyle\int_{-h}^{h} t(x+t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{-h}^{h} (x+t)^2\ dt$.

b) Démontrer que : $\displaystyle\int_{-h}^{h} t(x+t)^2\ dt = \frac{4h^3x}{3}$.

c) Établir les deux formules : $S_x(h) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x+ht)\ dt$ et $G_x(h) = \dfrac{3}{2h}\displaystyle\int_{-1}^{1} tf(x+ht)\ dt$.

2. Dans cette question uniquement, soit n un entier naturel donné et f la fonction définie par $f(t) = t^n$.

a) Soit k un entier naturel. Calculer suivant la parité de k, la valeur de $h^k(1-(-1)^k)$.

b) Calculer $S_x(h)$ et $G_x(h)$ lorsque $x = 0$.

c) À l'aide de la formule du binôme, démontrer que :

$$S_x(h) = x^n + h^2A_x(h) \quad \text{et} \quad G_x(h) = nx^{n-1} + h^2B_x(h)$$

où A_x et B_x sont deux fonctions polynomiales en h (dont les coefficients dépendent de x).

d) En déduire l'existence et l'expression de $s(x)$ et $g(x)$.

3. Dans cette question uniquement, la fonction f est définie par $f(t) = |t|$ et on choisit $x = 0$.

a) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

b) Calculer $S_x(h)$ et $G_x(h)$ pour $x = 0$. En déduire l'existence et la valeur de $s(0)$ et $g(0)$.
Dans les questions 4 à 6, on revient au cas général.

4. Exprimer $S_x(h)$ à l'aide d'une primitive F de f. Établir l'existence de $s(x)$ et démontrer que $s(x) = f(x)$.

5. On suppose dans cette question que f est dérivable en x de dérivée $f'(x)$.

a) Démontrer l'existence d'une fonction v_x définie et continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant $v_x(0) = 0$ et telle que pour tout réel t on ait : $f(x+t) = f(x) + tf'(x) + tv_x(t)$.

b) En déduire l'égalité : $G_x(h) = f'(x) + \dfrac{3}{2h^3}\displaystyle\int_{-h}^{h} t^2v_x(t)\ dt$.

c) Soit ε un réel strictement positif. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $h \in]0,\delta]$, on a :

$$\left|\frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} t^2v_x(t)\ dt\right| \leqslant \varepsilon$$

d) En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de $f'(x)$.

Exercice 5 : EML 2008

On admet l'encadrement suivant : $2,7 < \mathrm{e} < 2,8$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f : [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0,+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

4. Dresser le tableau des variations de f.

5. Montrer que f est convexe sur $]0,+\infty[$.

6. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O \ ; \ \vec{i} \ ; \ \vec{j}\right)$.

a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O.

b) Déterminer les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.

c) Tracer Γ.

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G :]1,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1,+\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t) \ dt$$

1. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[$ et que, pour tout $x \in]1,+\infty[$:

$$\begin{array}{rrcl} & G'(x) & = & \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right) \\ \text{et} & G''(x) & = & \frac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right) \end{array}$$

À cet effet, on pourra faire intervenir une primitive F de f sans chercher à calculer F.

2. ***a)*** Montrer que G' est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

b) Vérifier : $G'(2) > 0$.

c) Établir que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in]1,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que $\alpha < 2$.

Exercice 6 : EDHEC 2007

1. ***a)*** Montrer que pour tout $x > 0$: $x - \ln(x) > 0$.

b) On pose alors : $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.

2. ***a)*** Montrer que f est continue sur D.

b) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

3. ***a)*** Justifier que f est dérivable sur $D \setminus \{0\}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $D \setminus \{0\}$.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

c) Dresser le tableau de variations de f.

4. Étudier le signe de $f(x)$.

5. Pour tout réel x élément de D, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$.

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D puis étudier ses variations.

b) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt$.

c) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln(t)}{t - \ln(t)}\, dt$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.