Intégration

Exercice 1

On définit la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \end{array}$$

1. Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 2$ on a :

$$\frac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

Démonstration.
Soit $x \geqslant 2$.

- Traitons l'inégalité de gauche.

Tout d'abord	$x^2 \geqslant x^2 - 1 \geqslant 3$	*(l'inégalité de droite est vérifiée car $x \geqslant 2$)*
donc	$\sqrt{x^2} \geqslant \sqrt{x^2-1} \geqslant \sqrt{3}$	*(car la fonction racine est croissante)*
ainsi	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	*(par décroissance de la fonction inverse sur $]0,+\infty[$)*

$$\boxed{\text{Comme } x \geqslant 2,\ \sqrt{x^2} = x \text{ et ainsi : } \frac{1}{x} \leqslant f(x).}$$

- Pour la deuxième inégalité, raisonnons par équivalence.

$$\begin{array}{rcll} & f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & & \\ \Leftrightarrow & \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & & \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^2-1} \geqslant \sqrt{x-1} & & \textit{(par stricte croissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \Leftrightarrow & x^2 - \cancel{1} \geqslant x - \cancel{1} & & \textit{(par stricte croissance de la fonction élévation au carré sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ \Leftrightarrow & x^2 - x \geqslant 0 & & \end{array}$$

Or : $x^2 - x = x\ (x-1)$.
On reconnaît une fonction polynomiale de degré 2 de racines 0 et -1 et dont le cœfficient du terme dominant est positif. On en déduit que :

$$\begin{cases} x\ (x-1) \leqslant 0 & \text{si } x \in [0,1] \\ x\ (x-1) > 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La dernière inégalité étant vérifée, la première l'est aussi. Ainsi : } f(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}}$$

□

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'intégrale :

$$I_n = \int_2^n f(x)\ dx$$

a. En utilisant l'inégalité de la première question, démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Soit $x \geqslant 2$. D'après la question précédente :

$$f(x) \ \geqslant\ \frac{1}{x}$$

- Ainsi, par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($2 \leqslant n$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_2^n f(x)\ dx & \geqslant & \displaystyle\int_2^n \frac{1}{x}\ dx & & \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ I_n & & [\ \ln(|x|)\ ]_2^n & = & \ln(n) - \ln(2) \end{array}$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n) - \ln(2) = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par théorème de comparaison, } \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty.}$$

□

b. On définit la fonction F suivante :

$$F \;:\; \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \end{array}$$

Calculer la dérivée de F, en déduire une expression de I_n en fonction de n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord que la fonction $u : x \mapsto \sqrt{x^2-1}$ est dérivable sur $[2,+\infty[$ car est la composée $v_2 \circ v_1$ des fonctions :
  - $\times$ $v_1 : x \mapsto x^2 - 1$ dérivable sur $[2,+\infty[$ car polynomiale,
    et telle que $v_A(\,[2,+\infty[\,) \subset \,]0,+\infty[$ (pour tout $x \geqslant 2$, $x^2 - 1 \geqslant 3 > 0$).
  - $\times$ $v_2 : x \mapsto \sqrt{x}$, dérivable sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \geqslant 2$.

$$u'(x) \;=\; \frac{1}{\cancel{2}\,\sqrt{x^2-1}}\,\cancel{2}x \;=\; \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

- La fonction F est dérivable sur $[2,+\infty[$ car est la composée $H \circ G$ des fonctions :
  - $\times$ $G : x \mapsto x + \sqrt{x^2-1}$ dérivable sur $[2,+\infty[$ d'après ce qui précède,
    et telle que $G(\,[2,+\infty[\,) \subset \,]0,+\infty[$ (pour tout $x \geqslant 2$, $x + \sqrt{x^2-1} \geqslant x \geqslant 2 > 0$).
  - $\times$ $H : x \mapsto \ln(x)$, dérivable sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \geqslant 2$.

$$F'(x) \;=\; \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \;=\; \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \;=\; f(x)$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 2,\ F'(x) = f(x)}$$

- On en déduit que F est une primitive de f. Ainsi :

$$I_n \;=\; \int_2^n f(x)\,dx \;=\; [\;F(x)\;]_2^n \;=\; F(n) - F(2) \;=\; \ln(n+\sqrt{n^2-1}) - \ln(2+\sqrt{3})$$

$$\boxed{I_n \;=\; \ln(n+\sqrt{n^2-1}) - \ln(2+\sqrt{3})}$$

□

c. Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} I_n - \ln(n) &= \ln(n+\sqrt{n^2-1}) - \ln(n) - \ln(2+\sqrt{3}) \\ &= \ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n}\right) - \ln(2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \; \frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$$

Ainsi, par composition des limites, la fonction ln étant continue en 2 :

$$\ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n - \ln n \;=\; \ln(2) - \ln(2+\sqrt{3}) \;=\; \ln\left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)}$$

□

3. On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$$

a. Pour tout k entier supérieur ou égal à trois, montrer qu'on a :

$$\int_k^{k+1} f(x)\ dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\ dx$$

Démonstration.
Soit $k \geqslant 3$.

- La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ est dérivable sur $[2,+\infty[$ comme inverse de la fonction u, dérivable sur $[2,+\infty[$ et qui `NE S'ANNULE PAS` sur $[2,+\infty[$.
  Soit $x \geqslant 2$.

$$f'(x) \;=\; -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{(\sqrt{x^2-1})^2} \;=\; -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}\ (\sqrt{x^2-1})^2} \leqslant 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f \text{ est décroissante sur } [2,+\infty[.}$$

- Soit $x \in [k-1,k]$.

Tout d'abord	$k-1$	$\leqslant$	x	$\leqslant$	k	
donc	$f(k-1)$	$\geqslant$	$f(x)$	$\geqslant$	$f(k)$	*(car $k-1 \geqslant 2$ et que f est décroissante sur $[2,+\infty[$)*
et	$\int_{k-1}^{k} f(k-1)\ dx$	$\geqslant$	$\int_{k-1}^{k} f(x)\ dx$	$\geqslant$	$\int_{k-1}^{k} f(k)\ dx$	*(par croissance de l'intégration les bornes étant dans l'ordre croissant ($k-1 \leqslant k$))*
	$\parallel$				$\parallel$	
	$f(k-1)$				$f(k)$	

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, pour tout } k \geqslant 3 :\ f(k-1) \geqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\ dx \geqslant f(k) \text{ et en particulier :} \\ f(k) = \dfrac{1}{\sqrt{k^2-1}} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\ dx.\end{array}}$$

- On procède de même sur $[k, k+1]$.

> On démontre alors que pour tout $k \geqslant 3$: $f(k) \geqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\ dx \geqslant f(k+1)$ et en particulier : $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\ dx \leqslant f(k) = \frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$.

Commentaire

Pour le calcul de dérivée de la fonction f, on pouvait remarquer que : $\forall x \geqslant 2,\ f(x) = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$.
Ainsi :

$$f'(x) \ = \ -\frac{1}{\cancel{2}}\,(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\ \cancel{2}\ x \ = \ -x\ (x^2-1)^{-\frac{3}{2}} \ = \ -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}\ (x^2-1)}$$

□

b. En déduire que : $\forall n \geqslant 3,\ I_{n+1} \leqslant S_n \leqslant I_n + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

- En sommant les inégalités précédentes, vérifiées pour tout $k \geqslant 3$, on obtient :

$$\sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} f(x)\ dx \ \leqslant \ \sum_{k=3}^{n} f(k) \ \leqslant \ \sum_{k=3}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\ dx$$

donc $$\int_3^{n+1} f(x)\ dx \ \leqslant \ \sum_{k=2}^{n} f(k) - f(2) \ \leqslant \ \int_2^{n} f(x)\ dx$$ *(par la relation de Chasles)*

et $$\int_2^{n+1} f(x)\ dx - \int_2^{3} f(x)\ dx \ \leqslant \ S_n - f(2) \ \leqslant \ \int_2^{n} f(x)\ dx$$

- Et comme $\displaystyle\int_2^{n+1} f(x)\ dx = I_{n+1}$, on obtient :

$$\left(f(2) - \int_2^3 f(x)\ dx\right) + I_{n+1} \ \leqslant \ S_n \ \leqslant \ I_n + f(2)$$

- Puis, comme f est décroissante sur $[2, +\infty[$: $f(x) \leqslant f(2)$.
Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($2 \leqslant 3$), on obtient :

$$\int_2^3 f(x)\ dx \ \leqslant \ \int_2^3 f(2)\ dx = f(2)$$

et donc $f(2) - \displaystyle\int_2^3 f(x)\ dx \ \geqslant \ 0$.

- On calcule enfin : $f(2) = \dfrac{1}{\sqrt{4-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 3,\ I_{n+1} \ \leqslant \ S_n \ \leqslant \ I_n + \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

□

c. Démontrer que : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

- Comme $\ln(n) > 0$, on déduit de la question précédente que :

$$\frac{I_{n+1}}{\ln(n)} \leqslant \frac{S_n}{\ln(n)} \leqslant \frac{I_n}{\ln(n)} + \frac{1}{\sqrt{3}\ \ln(n)}$$

Or :

$$I_n = \ln(n+\sqrt{n^2-1}) = \ln\left(n\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{I_n}{\ln(n)} &= \frac{\ln(n)+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}{\ln(n)} \\ &= 1 + \frac{\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\end{aligned}$$

En effet, $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et par théorème de composition, la fonction ln étant continue en 2 : $\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1+\sqrt{1}) = \ln(2)$.

- De même :

$$\begin{aligned}\frac{I_{n+1}}{\ln(n)} &= \frac{\ln(n+1)+\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{(n+1)^2}}\right)}{\ln(n)} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} + \frac{\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{(n+1)^2}}\right)}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\end{aligned}$$

En effet, $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car :

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\,\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$$

- En conclusion :

$$\underbrace{\frac{I_{n+1}}{\ln(n)}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ 1} \leqslant \frac{S_n}{\ln(n)} \leqslant \underbrace{\frac{I_n}{\ln(n)} + \frac{1}{\sqrt{3}\ln(n)}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\ 1}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, par le théorème d'encadrement : } \frac{S_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1\text{, ce qui démontre que : } S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).}$$

□

4. On se donne un réel α et on définit, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k^2-1)^\alpha}$$

a. Dans cette question, $\alpha = 1$. Trouver deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$$

En déduire une expression de T_n et sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- Cherchons a et b tels que spécifiés. Tout d'abord :

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a\ (k+1) + b\ (k-1)}{k^2-1} = \frac{(a+b)\ k + (a-b)}{k^2-1}$$

En identifiant les polynômes de chaque numérateur, on obtient le système : $\left\{\begin{array}{l} a+b=0 \\ a-b=1 \end{array}\right.$. Or :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 0 \\ a & - & b & = & 1 \end{array}\right. \overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 0 \\ & & 2b & = & 1 \end{array}\right. \overset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{ccc} 2a & = & -1 \\ 2b & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Les réels } a = \frac{1}{2} \text{ et } b = -\frac{1}{2} \text{ conviennent.}}$$

- On considère maintenant $\alpha = 1$. On a :

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=2}^{n} \frac{\frac{1}{2}}{k-1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{-\frac{1}{2}}{k+1} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{k+1} \right) + 1 + \frac{1}{2} - \left(\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{T_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}}$$

□

b. Pour quelles valeurs de α la suite (T_n) est-elle convergente ?

Démonstration.
Procédons par disjonction de cas.

- Si $\alpha < 0$ alors :
$$\frac{1}{(n^2-1)^\alpha} = (n^2-1)^{-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n^2-1)^\alpha}$ est donc (grossièrement) divergente.
$$\boxed{\text{La suite } (T_n) \text{ diverge si } \alpha < 0.}$$
- Si $\alpha \geqslant 0$ alors :
$$\frac{1}{(n^2-1)^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{2\alpha}} \ (\geqslant 0)$$
En effet : $\dfrac{\frac{1}{(n^2-1)^\alpha}}{\frac{1}{n^{2\alpha}}} = \dfrac{n^{2\alpha}}{(n^2-1)^\alpha} = \dfrac{n^{2\alpha}}{n^{2\alpha}} \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$
Or la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ est convergente si et seulement si $2\alpha > 1$ *i.e.* $\alpha > \frac{1}{2}$ en tant que série de Riemann d'exposant 2α.
On en déduit, par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs que la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n^2-1)^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{En conclusion, la série } \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(n^2-1)^\alpha} \text{ est convergente si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.}$$

□

Exercice 2 : EDHEC 2014

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$ est définie pour tout réel x.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto \sqrt{t^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car est la composée $h_1 \circ g_1$ des fonctions :
  - × $g_1 : t \mapsto 1+t^2$ continue sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et telle que $g(\mathbb{R}) \subset]0,+\infty[$. (pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1+t^2 \geqslant 1 > 0$)
  - × $h_1 : t \mapsto \sqrt{t}$, continue sur $]0,+\infty[$.
- On en déduit que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car est l'inverse de la fonction $t \mapsto \sqrt{1+t^2}$ continue sur $\mathbb{R}$ et qui `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R}$ (pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1+t^2 \geqslant 1 > 0$).
- En particulier, pour tout $x \geqslant 0$ (resp. $x < 0$), h est continue sur le segment $[x, 2x]$ (resp. $[2x, x]$).

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \text{ est définie pour tout réel } x.}$$

□

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt$$

2. Établir que f est impaire.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \, dt$$

La fonction $t \mapsto -t$ est C^1 sur $[0,1]$.
On peut donc effectuer le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$u = -t$
(et donc $t = -u$)
$\hookrightarrow du = -dt$ et $dt = -du$
- $t = -x \Rightarrow u = -(-x) = x$
- $t = -2x \Rightarrow u = -(-2x) = 2x$

On a donc :

$$\int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \, dt = \int_{x}^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+(-u)^2}} (-du) = -\int_{x}^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \, du = -f(x)$$

$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f \text{ est impaire.}}$

□

3. a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. On note G l'une d'elle. Par définition, G est C^1 sur $\mathbb{R}$ (puisqu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée g qui est continue sur $\mathbb{R}$).
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$f(x) = \int_{x}^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \, dt = \left[\, G(t) \, \right]_{x}^{2x} = G(2x) - G(x)$$

Enfin, la fonction $x \mapsto G(2x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$ par composée de fonctions C^1 sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

□

b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= G'(2x) \times 2 - G'(x) \\ &= 2 \, g(2x) - g(x) \\ &= 2 \, \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = 2 \, \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

- Raisonnons par équivalence.

$$\begin{array}{rcll} f'(x) > 0 & \Leftrightarrow & 2\,\dfrac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}} > \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \\ & \Leftrightarrow & 2\,\sqrt{1+x^2} > \sqrt{1+4x^2} & \textit{(car } \sqrt{1+x^2} > 0 \textit{ et } \sqrt{1+4x^2} > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 4\,(1+x^2) > 1+4x^2 & \textit{(par stricte croissance de } u \mapsto u^2 \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 4+4x^2 > 1+4x^2 & \\ & \Leftrightarrow & 3 > 0 & \end{array}$$

La dernière inégalité étant vérifiée, il en est de même de la première. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

□

4. a) En utilisant la relation $t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant t^2+2t+1$, valable pour tout t positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)$$

Démonstration.

- Soient $t \geqslant 0$ et $x > 0$. Remarquons tout d'abord que : $t^2+2t+1 = (t+1)^2$. Ainsi :

$$\begin{array}{lcl} & t^2 \ \leqslant\ t^2+1 \ \leqslant\ (t+1)^2 & \textit{(d'après l'inégalité de l'énoncé)} \\ \text{donc} & \sqrt{t^2} \ \leqslant\ \sqrt{t^2+1} \ \leqslant\ \sqrt{(t+1)^2} & \textit{(par croissance de la fonction racine)} \\ \textit{i.e.} & t \ \leqslant\ \sqrt{t^2+1} \ \leqslant\ t+1 & \textit{(car } t \geqslant 0 \textit{ et } t+1 \geqslant 0\textit{)} \\ \text{et} & \dfrac{1}{t} \ \geqslant\ \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \ \geqslant\ \dfrac{1}{t+1} & \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{ainsi} & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dx \ \geqslant\ \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dx \ \geqslant\ \int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\,dx & \textit{(par croissance de l'intégrale les bornes } x \textit{ et } 2x \textit{ étant dans l'ordre croissant } (x \leqslant 2x)\textit{)} \end{array}$$

- Enfin :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt \ = \ [\,\ln(|t|)\,]_x^{2x} \ = \ \ln(|2x|) - \ln(|x|) \ = \ \ln(2x) - \ln(x) \ = \ \ln(2) + \cancel{\ln(x)} - \cancel{\ln(x)}$$

et :

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}\,dt \ = \ [\,\ln(|t+1|)\,]_x^{2x} \ = \ \ln(|2x+1|) - \ln(|x+1|) \ = \ \ln(2x+1) - \ln(x+1)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall x > 0,\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) \ \leqslant\ f(x) \ \leqslant\ \ln(2).}$$

□

b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $x > 0$. D'après la question précédente :

$$\ln(2x+1) - \ln(x+1) \ \leqslant \ f(x) \ \leqslant \ \ln(2)$$

- Remarquons tout d'abord que :

$$\ln(2x+1) \ = \ \ln\left(2x \ \left(1+\frac{1}{2x}\right)\right) \ = \ \ln(2x) + \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) \ = \ \ln(2) + \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)$$

De la même manière :

$$\ln(x+1) \ = \ \ln\left(x \ \left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \ = \ \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \ = \ \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x > 0, \ \ln(2x+1) - \ln(x+1) = \ln(2) + \cancel{\ln(x)} + \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) - \cancel{\ln(x)} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right).}$$

- D'autre part, par composition des limites :
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2x}\right) \ = \ \ln(1) \ = \ 0.$
  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \ = \ \ln(1) \ = \ 0.$

  On en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(2x+1) - \ln(x+1) = \ln(2)$.
- On conclut alors, par le théorème d'encadrement, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ln(2)}$$

□

c) Dresser le tableau de variation complet de f.

Démonstration.
D'après les questions précédentes :

x	$-\infty$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variations de f	$-\ln(2) \nearrow \ln(2)$

La limite en $-\infty$ est obtenue par imparité de f.
En effet, à l'aide du changement de variable $X = -x$ (*i.e.* $x = -X$), on obtient :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \ = \ \lim_{X\to+\infty} f(-X) \ = \ \lim_{X\to+\infty} -f(X) \ = \ -\ln(2)$$

□

d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Démonstration.

- La fonction f est :
  - $\times$ continue sur $]-\infty, +\infty[$,
  - $\times$ strictement croissante sur $]-\infty, +\infty[$.

  Elle réalise donc une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[)$. Or :

$$f(]-\infty, +\infty[) \ = \ ]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)[\ = \ ]-\ln(2), \ln(2)[$$

- Comme $0 \in \ ]-\ln(2), \ln(2)[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $x \in \ ]-\infty, +\infty[$.
- Il suffit alors de remarquer que $x = 0$ est solution évidente de cette équation. En effet :

$$f(0) \ = \ \int_0^0 g(t)\ dt \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = 0 \text{ admet } x = 0 \text{ comme unique solution.}}$$

□

5. a) Montrer que, pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord : $x^2 + 1 > x^2$.
  Ainsi, par stricte croissance de la fonction racine :

$$\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x|$$

  On en déduit que :

$$x + \sqrt{x^2 + 1} > x + |x|$$

- Enfin : $x + |x| = \left\{ \begin{array}{ll} 2x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } -x < 0 \end{array} \right.$ ce qui permet d'affirmer que $x + |x| \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par transitivité que : } \forall x \in \mathbb{R},\ x + \sqrt{x^2 + 1} > 0.}$$

□

b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x, associe $\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

Démonstration.

- La fonction $h : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car est la composée $h_2 \circ g_2$ des fonctions :
  - $\times$ $g_2 : x \mapsto x + \sqrt{x^2 + 1}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ l'est (en procédant comme dans la question ***1.***), et telle que $g(\mathbb{R}) \subset \ ]0, +\infty[$ (car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$).
  - $\times$ $h_2 : x \mapsto \ln(x)$, dérivable sur $]0, +\infty[$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\, 2x\right) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\ \frac{2\sqrt{x^2+1}+2x}{2\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}\ 2\ \frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}{2\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ = \ g(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = g(x).}$$

□

c) En déduire une expression explicite de $f(x)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, la fonction h est une primitive de g.
- On en déduit, que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \ = \ [\ h(t)\ ]_x^{2x} \ = \ h(2x) - h(x) \\
&= \ln\left(2x + \sqrt{(2x)^2+1}\right) - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\
&= \ln\left(\frac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \ln\left(\frac{2x+\sqrt{4x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)}$$

□

6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.

a) Établir que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x - f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)}\, dt.$

Démonstration.
Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
x - f(x) &= \int_x^{2x} 1\, dt - \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt \\
&= \int_x^{2x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) dt \qquad \textit{(par linéarité de l'intégration)}
\end{aligned}$$

On remarque alors que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} &= \frac{\sqrt{1+t^2}-1}{\sqrt{1+t^2}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{1+t^2}-1\right)\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} \\
&= \frac{((1+t^2)-1^2)}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} = \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}\, dt}$$

□

b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3$.

Démonstration.
Soient $x > 0$ et $t \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord :

$$1 + t^2 \geqslant 1 \qquad \textit{(car } t^2 \geqslant 0\textit{)}$$

donc $$\sqrt{1+t^2} \geqslant \sqrt{1} = 1 \qquad \textit{(par croissance de la fonction racine)}$$

et $$\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right) \geqslant \left(\sqrt{t^2+1}+1\right) \qquad \textit{(car } \sqrt{t^2+1}+1 \geqslant 0\textit{)}$$

ainsi $$\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right) \geqslant 2 \qquad \textit{(car } \sqrt{t^2+1}+1 \geqslant 2\textit{)}$$

d'où $$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} \leqslant \frac{1}{2} \qquad \textit{(décroissance de la fonction inverse sur }]0,+\infty[\textit{)}$$

enfin $$\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} \leqslant \frac{t^2}{2} \qquad \textit{(car } t^2 \geqslant 0\textit{)}$$

$$\boxed{\text{Dès lors : } 0 \leqslant \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)} \leqslant \frac{t^2}{2}.}$$

- Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \leqslant 2x$ car $x > 0$) :

$$\begin{array}{ccccc}
\displaystyle\int_x^{2x} 0\ dx & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{t^2+1}+1\right)}\ dx & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{2}\ dx \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\
0 & & f(x) - x & & \frac{1}{6}\ \left[\ t^3\ \right]_x^{2x} \ = \frac{1}{6}\ ((2x)^3 - x^3)
\end{array}$$

Enfin : $(2x)^3 - x^3 = 8x^3 - x^3 = 7x^3$.

$$\boxed{\forall x > 0,\ 0 \leqslant f(x) - x \leqslant \frac{7}{6}\ x^3}$$

Remarque

- Il est très important de remarquer dans cette question que les bornes de l'intégration sont bien ordonnées. Il faut noter que si $x \leqslant 0$ alors : $x \geqslant 2x$. Ainsi, l'intégration de l'inégalité membre à membre provoquera un changement des symboles d'inégalités.
- Dans la démonstration, on utilise le fait que : $\sqrt{t^2+1}+1 \geqslant 2$.
  Si on minore de manière un peu plus brutale, on obtient simplement $\sqrt{t^2+1}+1 \geqslant 1$ et le membre droit diffère alors d'un facteur 2. En réalité, ce facteur importe peu pour la suite des questions et la majoration par $\dfrac{7}{3}x^3$ n'est pas pénalisée. □

c) Conclure que : $f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} x$.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- D'après la question précédente : $0 \leqslant f(x) - x \leqslant \dfrac{7}{6}\, x^3$.
  On en déduit que : $x \;\leqslant\; f(x) \;\leqslant\; x + \dfrac{7}{6}\, x^3$.
  Et ainsi, comme $x > 0$:
$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{x}{x} & \leqslant & \dfrac{f(x)}{x} & \leqslant & \dfrac{x}{x} + \dfrac{7}{6}\,\dfrac{x^3}{x} \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ 1 & & & & 1 + \dfrac{7}{6}\, x^2 \end{array}$$
- Or :
  × $1 \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$
  × $1 + \dfrac{7}{6}\, x^2 \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$

  Ainsi, par le théorème d'encadrement, on conclut que : $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1$.

$$\boxed{f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} x}$$

Remarque
Afin de pouvoir utiliser l'inégalité précédente, on doit faire l'hypothèse : $x > 0$.
C'est ce qui explique que l'on trouve un équivalent en 0^+ et non pas en 0 directement. □

d) Montrer que l'on a aussi : $f(x) \underset{x \to 0^-}{\sim} x$.

Démonstration.
Soit $x < 0$. On effectue le changement de variable $X = -x$ (*i.e.* $x = -X$).
Ainsi, on a : $x \to 0^- \;\Leftrightarrow\; X \to 0^+$.
D'où :
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{X \to 0^+} \frac{f(-X)}{-X} = \lim_{X \to 0^+} \frac{-f(X)}{-X} = \lim_{X \to 0^+} \frac{f(X)}{X} = 1$$
(la deuxième égalité est obtenue car f est impaire)

$$\boxed{f(x) \underset{x \to 0^-}{\sim} x}$$

□

Exercice 3 : EML 1996

Pour tout entier naturel n, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \, \mathrm{e}^{-x} \, dx$.

1. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction $f : x \mapsto x^n \, \mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $[0, 1]$.
- Soit $x \in [0, 1]$. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ étant décroissante, on a :

$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-0} = 1$$

En multipliant par $x^n \geqslant 0$ de part et d'autre :

$$0 \leqslant x^n \, \mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n$$

Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(1 \geqslant 0)$:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 x^n \, \mathrm{e}^{-x} \, dx & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 x^n \, dx \\ & & \shortparallel & & \shortparallel \\ & & I_n & & \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \, 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}}$$

□

b) En déduire que la suite (I_n) converge et donner sa limite.

Démonstration.
Remarquons tout d'abord :

× $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$,

× $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par le théorème d'encadrement, la suite } (I_n) \text{ est convergente, et } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$ □

2. À l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$$

Démonstration.
On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{ll} u(x) = \mathrm{e}^{-x} & u'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \\[2ex] v'(x) = x^n & v(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n\ \mathrm{e}^{-x}\ dx &= \frac{1}{n+1}\ \Big[\ x^{n+1}\ \mathrm{e}^{-x}\ \Big]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1}\ \mathrm{e}^{-x}\ dx \\ &= \frac{1}{n+1}\ \left(\mathrm{e}^{-1} - 0 \times \mathrm{e}^0\right) + \frac{1}{n+1}\ I_{n+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} + \frac{I_{n+1}}{n+1}}$$

Remarque
Évidemment, il est possible de procéder en partant de I_{n+1}.
L'intégration par parties s'écrit alors :

$$\left|\begin{array}{ll} u(x) = x^{n+1} & u'(x) = (n+1)\ x^n \\[2ex] v'(x) = \mathrm{e}^{-x} & v(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$$

Et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{n+1}\ \mathrm{e}^{-x}\ dx &= \Big[\ x^{n+1}\ \mathrm{e}^{-x}\ \Big]_0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n\ \mathrm{e}^{-x}\ dx \\ &= \left(\mathrm{e}^{-1} - 0 \times \mathrm{e}^0\right) - (n+1)\ I_n \end{aligned}$$

On obtient le résultat souhaité en réordonnant.

□

3. a) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n - \dfrac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question *2.* : $I_n - \dfrac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} = \dfrac{I_{n+1}}{n+1}$.
- Or, d'après la question *1.a)* : $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$. Comme $\dfrac{1}{n+1} \geqslant 0$, on en déduit :

$$0 \leqslant \frac{I_{n+1}}{(n+1)\ \mathrm{e}} \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n - \frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)}}$$

□

b) Trouver un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente :

$$\frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

- Comme $\dfrac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} > 0$, on en déduit :

$$1 \leqslant \frac{I_n}{\frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}}} \leqslant (n+1)\ \mathrm{e}\left(\frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = 1 + \frac{\cancel{(n+1)}\ \mathrm{e}}{\cancel{(n+1)}(n+2)}$$

- Or :
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$,
  - × $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\mathrm{e}}{n+2} = 1$.

  Ainsi, par le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{\frac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}}} = 1$.

  Ce qui revient à dire : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n+1)\ \mathrm{e}}$.

$$\boxed{\text{Comme } n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n, \text{ on en conclut : } I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ \mathrm{e}}}$$

Remarque
On pouvait aussi divisier l'encadrement par $\dfrac{1}{n\ \mathrm{e}}$:

$$\frac{n\ \cancel{\mathrm{e}}}{(n+1)\ \cancel{\mathrm{e}}} \leqslant I_n \leqslant \frac{n\ \cancel{\mathrm{e}}}{(n+1)\ \cancel{\mathrm{e}}} + \frac{n\ \mathrm{e}}{(n+1)(n+2)}$$

et conclure une nouvelle fois par le théorème d'encadrement.

□

Exercice 4 : HEC 2011

Dans tout l'exercice :

- le réel x est fixé, α est un réel strictement positif et f est une fonction définie et continue sur l'intervalle $[x-\alpha, x+\alpha]$ à valeurs réelles ;
- pour tout réel h vérifiant $0 < h \leqslant \alpha$, on pose :

$$S_x(h) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t)\ dt \quad \text{et} \quad G_x(h) = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} tf(x+t)\ dt$$

- sous réserve d'existence, on pose : $s(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} S_x(h)$ et $g(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} G_x(h)$.

L'objet du problème est l'étude d'une généralisation de la notion de dérivée d'une fonction à partir de fonctions définies par des intégrales.

1. ***a)*** Calculer $\displaystyle\int_{-h}^{h} dt$, $\displaystyle\int_{-h}^{h} (x+t)\ dt$, $\displaystyle\int_{-h}^{h} t(x+t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{-h}^{h} (x+t)^2\ dt$.

Démonstration.

- $\displaystyle\int_{-h}^{h} dt = h-(-h) = 2h$
- $$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} (x+t)\ dt &= \int_{-h}^{h} x\ dt + \int_{-h}^{h} t\ dt \\ &= x\ (h-(-h)) + \frac{1}{2}\ \left[\ t^2\ \right]_{-h}^{h} = 2\ xh + \frac{1}{2}\ \cancel{(h^2-(-h)^2)} = 2xh\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} t\ (x+t)\ dt &= \int_{-h}^{h} xt\ dt + \int_{-h}^{h} t^2\ dt \\ &= x \cancel{\int_{-h}^{h} t\ dt} + \frac{1}{3}\ \left[\ t^3\ \right]_{-h}^{h} = \frac{1}{3}\ (h^3-(-h)^3) = \frac{1}{3}\ 2h^3\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} (x+t)^2\ dt &= \int_{-h}^{h} (x+t)\ (x+t)\ dt \\ &= x \int_{-h}^{h} (x+t)\ dt + \int_{-h}^{h} t\ (x+t)\ dt = 2x^2h + \frac{2}{3}h^3\end{aligned}$$

Ces calculs ont été réalisés par linéarité de l'intégration.

$$\boxed{\int_{-h}^{h} dt = 2h,\ \int_{-h}^{h} (x+t)\ dt = 2xh,\ \int_{-h}^{h} t(x+t)\ dt = \frac{2}{3}h^3 \text{ et } \int_{-h}^{h} (x+t)^2\ dt = 2x^2h + \frac{2}{3}h^3}$$ □

b) Démontrer que : $\displaystyle\int_{-h}^{h} t(x+t)^2\ dt = \frac{4h^3x}{3}$.

Démonstration.
Par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} t\ (x+t)^2\ dt &= x^2 \cancel{\int_{-h}^{h} t\ dt} + 2x \int_{-h}^{h} t^2\ dt + \cancel{\int_{-h}^{h} t^3\ dt} \\ &= 2x\ \frac{2}{3}\ h^3 = \frac{4h^3x}{3}\end{aligned}$$

(car $t \mapsto t$ et $t \mapsto t^3$ sont impaires)

$$\boxed{\int_{-h}^{h} t(x+t)^2\ dt = \frac{4h^3x}{3}}$$

□

c) Établir les deux formules : $S_x(h) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x+ht)\ dt$ et $G_x(h) = \dfrac{3}{2h}\displaystyle\int_{-1}^{1} tf(x+ht)\ dt$.

Démonstration.
Soit h tel que $0 < h \leqslant \alpha$.

- On effectue le changement de variable $u = ht$.

$$\left|\begin{array}{l} u = ht \quad \Big(\text{donc } t = \dfrac{u}{h} \text{ ce qui est possible car } h \neq 0\Big) \\ \hookrightarrow du = h\ dt \quad \text{ et } \quad dt = \dfrac{du}{h} \\ \bullet\ t = -1 \ \Rightarrow\ u = -h \\ \bullet\ t = 1 \ \Rightarrow\ u = h \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\varphi : u \mapsto \dfrac{u}{h}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[-h, h]$. On obtient :

$$\int_{-1}^{1} f(x+ht)\ dt \ = \ \int_{-h}^{h} f(x+u)\frac{du}{h} \ = \ \frac{1}{h}\int_{-h}^{h} f(x+u)\ du \ = \ 2\ S_x(h)$$

$$\boxed{S_x(h) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x+ht)\ dt}$$

- On procède de même pour la deuxième égalité.

$$\int_{-1}^{1} t\ f(x+ht)\ dt \ = \ \int_{-h}^{h} \frac{u}{h}\ f(x+u)\frac{du}{h} \ = \ \frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h} u\ f(x+u)\ du \ = \ \frac{2h}{3}\ G_x(h)$$

$$\boxed{G_x(h) = \frac{3}{2h}\int_{-1}^{1} t\ f(x+ht)\ dt}$$

□

2. *Dans cette question uniquement*, soit n un entier naturel donné et f la fonction définie par $f(t) = t^n$.

a) Soit k un entier naturel. Calculer suivant la parité de k, la valeur de $h^k(1-(-1)^k)$.

Démonstration.
Deux cas se présentent.

- Si k est pair alors $(-1)^k = 1$ et :

$$h^k\ (1-(-1)^k) \ = \ h^k\ (1-1) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{Si } k \text{ est pair, } h^k\ (1-(-1)^k) = 0.}$$

- Si k est impair alors $(-1)^k = -1$ et :

$$h^k\ (1-(-1)^k) \ = \ h^k\ (1-(-1)) \ = \ 2h^k$$

$$\boxed{\text{Si } k \text{ est impair, } h^k\ (1-(-1)^k) = 2h^k.}$$

□

b) Calculer $S_x(h)$ et $G_x(h)$ lorsque $x = 0$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} S_0(h) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(t)\ dt = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} t^n\ dt = \frac{1}{2h}\ \frac{1}{n+1}\ \left[\ t^{n+1}\ \right]_{-h}^{h} \\ &= \frac{1}{2h}\ \frac{1}{n+1}\ \left(h^{n+1} - (-h)^{n+1}\right) = \frac{1}{2h}\ \frac{1}{n+1}\ h^{n+1}\ \left(1 - (-1)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{S_0(h) = 0 \text{ si } n \text{ est impair et } S_0(h) = \frac{h^n}{n+1} \text{ si } n \text{ est pair.}}$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned} G_0(h) &= \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t\ f(t)\ dt = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^{n+1}\ dt = \frac{3}{2h^3}\ \frac{1}{n+2}\ \left[\ t^{n+2}\ \right]_{-h}^{h} \\ &= \frac{3}{2h^3}\ \frac{1}{n+2}\ h^{n+2}\ \left(1 - (-1)^{n+2}\right) = \frac{3}{2h^2}\ \frac{1}{n+2}\ h^{n+1}\ \left(1 - (-1)^{n}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{G_0(h) = 0 \text{ si } n \text{ est pair et } G_0(h) = \frac{3}{h^2}\ \frac{h^{n+1}}{n+2} \text{ si } n \text{ est impair.}}$$

□

c) À l'aide de la formule du binôme, démontrer que :

$$S_x(h) = x^n + h^2 A_x(h) \qquad \text{et} \qquad G_x(h) = n x^{n-1} + h^2 B_x(h)$$

où A_x et B_x sont deux fonctions polynomiales en h (dont les coefficients dépendent de x).

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} S_x(h) &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t)\ dt = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} (x+t)^n\ dt \\ &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ x^{n-k}\ t^k\ dt \\ &= \frac{1}{2h} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ x^{n-k} \int_{-h}^{h} t^k\ dt && \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\ &= \frac{1}{2h} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ x^{n-k}\ \frac{1}{k+1}\ \left[\ t^{k+1}\ \right]_{-h}^{h} \\ &= \frac{1}{2h} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ x^{n-k}\ \frac{h^{k+1}}{k+1}\ \left(1 - (-1)^{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2h} \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}\ x^{n-k}\ \frac{h^{k+1}}{k+1}\ \left(1 - (-1)^{k+1}\right) + \cancel{\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}\ x^{n-k}\ \frac{h^{k+1}}{k+1}\ \left(1 - (-1)^{k+1}\right)} \right) \end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \ x^{n-k} \ \frac{h^{k+1}}{k+1} \ \left(1-(-1)^{k+1}\right) \\
= \ & \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} \ x^{n-2j} \ \frac{h^{2j+1}}{2j+1} \ 2 \\
= \ & 2h \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} \ \frac{x^{n-2j}}{2j+1} \ h^{2j} \\
= \ & 2h \left(\binom{n}{0} \frac{1}{x^0} \ h^0 + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} \ \frac{x^{n-2j}}{2j+1} \ h^{2j} \right) \\
= \ & 2h \left(x^n + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor -1} \binom{n}{2j+2} \ \frac{x^{n-2j-2}}{2j+3} \ h^{2j+2} \right) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & 2h \left(x^n + h^2 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor -1} \binom{n}{2j+2} \ \frac{x^{n-2j-2}}{2j+3} \ h^{2j} \right)
\end{aligned}$$

- En notant $A_x(h) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor -1} \binom{n}{2j+2} \ \frac{x^{n-2j-2}}{2j+3} \ h^{2j}$, on obtient :

$$S_x(h) \ = \ \frac{1}{\cancel{2h}} \ \cancel{2h} \ \left(x^n + h^2 A_x(h)\right)$$

$$\boxed{\text{On trouve bien : } S_x(h) = x^n + h^2 A_x(h) \text{ où } A_x \text{ est une fonction polynomiale en } h \text{ dont les cœfficients dépendent de } x.}$$

- On procède de même pour G_x.

$$\begin{aligned}
G_x(h) \ & = \ \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t \ f(x+t) \ dt \ = \ \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t \ (x+t)^n \ dt \\
& = \ \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ x^{n-k} \ t^k \ dt \\
& = \ \frac{3}{2h^3} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ x^{n-k} \int_{-h}^{h} t^{k+1} \ dt && \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\
& = \ \frac{3}{2h^3} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ x^{n-k} \ \frac{h^{k+2}}{k+2} \ \left(1-(-1)^{k+2}\right) \\
& = \ \frac{3}{\cancel{2}h^3} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} \ x^{n-2j-1} \ \frac{h^{2j+3}}{2j+3} \ \cancel{2} && \textit{(car si } k \textit{ pair, } 1-(-1)^{k+2} = 0\textit{)} \\
& = \ \frac{3}{h^3} \left(\binom{n}{1} \ x^{n-1} \ \frac{h^3}{3} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2j+1} \ x^{n-2j-1} \ \frac{h^{2j+3}}{2j+3} \right) \\
& = \ \frac{3}{h^3} \left(n \ x^{n-1} \ \frac{h^3}{3} + \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor -1} \binom{n}{2j+3} \ x^{n-2j-3} \ \frac{h^{2j+5}}{2j+5} \right) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = \ \frac{3}{h^3} \left(n \ x^{n-1} \ \frac{h^3}{3} + h^5 \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor -1} \binom{n}{2j+3} \ x^{n-2j-3} \ \frac{h^{2j}}{2j+5} \right)
\end{aligned}$$

- En notant $B_x(h) = 3 \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1} \binom{n}{2j+3} \ x^{n-2j-3} \ \frac{h^{2j}}{2j+5}$, on obtient :

$$G_x(h) \ = \ n \ x^{n-1} + h^2 \ B_x(h)$$

$$\boxed{\text{On trouve bien : } G_x(h) = n \ x^{n-1} + h^2 \ B_x(h) \text{ où } B_x \text{ est une fonction polynomiale en } h \text{ dont les cœfficients dépendent de } x.}$$

$\square$

d) En déduire l'existence et l'expression de $s(x)$ et $g(x)$.

Démonstration.
Les fonctions A_x et B_x sont polynomiales en h. Elles sont donc continues sur $\mathbb{R}$ et admettent en particulier une limite en 0. On en déduit :

$$\lim_{h \to 0^+} h^2 \ A_x(h) \ = \ 0 \times \lim_{h \to 0^+} A_x(h) \ = \ 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0^+} h^2 \ B_x(h) \ = \ 0 \times \lim_{h \to 0^+} B_x(h) \ = \ 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } s(x) \text{ et } g(x) \text{ existent et : } \lim_{h \to 0^+} S_x(h) = x^n \text{ et } \lim_{h \to 0^+} G_x(h) = n \ x^{n-1}.}$$

$\square$

3. *Dans cette question uniquement*, la fonction f est définie par $f(t) = |t|$ et on choisit $x = 0$.

a) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Démonstration.

- La fonction f est dérivable à droite en 0 et :

$$f'_d(0) \ = \ \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \ = \ \lim_{t \to 0^+} \frac{|t|}{t} \ = \ \lim_{t \to 0^+} \frac{t}{t} \ = \ 1$$

- La fonction f est dérivable à gauche en 0 et :

$$f'_g(0) \ = \ \lim_{t \to 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \ = \ \lim_{t \to 0^-} \frac{|t|}{t} \ = \ \lim_{t \to 0^-} \frac{-t}{t} \ = \ -1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ n'est pas dérivable en 0.}}$$

$\square$

b) Calculer $S_x(h)$ et $G_x(h)$ pour $x = 0$. En déduire l'existence et la valeur de $s(0)$ et $g(0)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} S_0(h) \ &= \ \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(t) \ dt \ = \ \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |t| \ dt \\ &= \ \frac{1}{\cancel{2}h} \ \cancel{2} \int_{0}^{h} |t| \ dt && \textit{(car } t \mapsto |t| \textit{ est paire)} \\ &= \ \frac{1}{h} \int_{0}^{h} t \ dt \ = \ \frac{1}{h} \ \frac{1}{2} \ \left[\ t^2 \ \right]_{0}^{h} \\ &= \ \frac{1}{2h} \ h^2 \ = \ \frac{h}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_0(h) = \frac{h}{2}}$$

- Ensuite :

$$G_0(h) = \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t\ f(t)\ dt$$

$$= \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t\ |t|\ dt = 0 \quad \textit{(car la fonction } t \mapsto t\ |t| \textit{ est impaire)}$$

$$\boxed{G_0(h) = 0}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } s(0) = \lim_{h\to 0^+} S_0(h) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h} = 0 \quad \text{et} \quad s(0) = \lim_{h\to 0^+} G_0(h) = \lim_{h\to 0^+} 0 = 0.}$$

□

Dans les questions 4 et 5, on revient au cas général.

4. Exprimer $S_x(h)$ à l'aide d'une primitive F de f.
Établir l'existence de $s(x)$ et démontrer que $s(x) = f(x)$.

Démonstration.

- On considère F une primitive de f sur le segment $[x-\alpha, x+\alpha]$.
La fonction $H : t \mapsto F(x+t)$ est une primitive de $t \mapsto f(x+t)$ car elle est dérivable comme composée de fonctions dérivables (F et $t \mapsto x+t$) et :

$$H'(t) = F'(x+t) = f(x+t)$$

- On en déduit :

$$S_x(h) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t)\ dt = \frac{1}{2h} \left[\ F(x+t)\ \right]_{-h}^{h} = \frac{1}{2h} \left(F(x+h) - F(x-h)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{F(x+h)-F(x)}{h} + \frac{F(x)-F(x-h)}{h} \right)$$

- Or la fonction F est dérivable en x. Ainsi :

$$\lim_{y\to x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = F'(x) = f(x)$$

En effectuant le changement de variable $h = y - x$ (*i.e.* $y = x + h$), on obtient :

$$\lim_{y\to x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

En effectuant le changement de variable $h = -y + x$ (*i.e.* $y = x - h$), on obtient :

$$\lim_{y\to x} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x-h)-F(x)}{-h} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x)-F(x-h)}{h} = f(x)$$

- Ainsi, $S_h(x)$ admet une limite en 0. Plus précisément :

$$\lim_{h\to 0} S_x(h) = \frac{1}{2} \big(f(x) + f(x)\big) = f(x)$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } s(x) \text{ existe et vaut } f(x).}$$

□

5. *On suppose dans cette question que f est dérivable en x de dérivée $f'(x)$.*

a) Démontrer l'existence d'une fonction v_x définie et continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant $v_x(0) = 0$ et telle que pour tout réel t on ait : $f(x+t) = f(x) + tf'(x) + tv_x(t)$.

Démonstration.

- On considère la fonction v_x définie par :

$$v_x : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x+t) - f(x)}{t} - f'(x) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- La fonction v_x est continue en 0.
  En effet, comme f est dérivable en x : $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x+t) - f(x)}{t} = f'(x)$. Et ainsi :

$$\lim_{t \to 0} v_x(t) \;=\; f'(x) - f'(x) \;=\; 0 \;=\; v_x(0)$$

- La fonction v_x est de plus continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient $v_x = \dfrac{g}{h}$ de :
  × $g : t \mapsto f(x+t) - f(x)$ continue sur $\mathbb{R}^*$.
  (pour cela, il faut que f soit continue sur $\mathbb{R}$ alors que l'énoncé mentionne uniquement de la continuité sur $[x-\alpha, x+\alpha]$)
  × $h : t \mapsto t$ continue sur $\mathbb{R}^*$,
  et qui `NE S'ANNULE PAS` sur $\mathbb{R}^*$.
- À l'aide de cette définition, on obtient, pour tout $t \neq 0$:

$$v_x(t) \;=\; \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - f'(x)$$

  et ainsi : $f(x+t) - f(x) = t\ (v_x(t) + f'(x))$.

> On obtient bien, pour tout réel t : $f(x+t) = f(x) + tf'(x) + tv_x(t)$ (cette égalité est aussi vérifiée en 0 car correspond à l'égalité $f(x) = f(x)$).

□

b) En déduire l'égalité : $G_x(h) = f'(x) + \dfrac{3}{2h^3} \displaystyle\int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)\ dt$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} G_x(h) &= \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t\ f(x+t)\ dt \\ &= \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t\ \big(f(x) + tf'(x) + tv_x(t)\big)\ dt \\ &= \frac{3}{2h^3} \left(f(x) \cancel{\int_{-h}^{h} t\ dt} + f'(x) \int_{-h}^{h} t^2\ dt + \int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)\ dt \right) && \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\ &= \frac{3}{2h^3} \left(f'(x)\ \frac{1}{3}\ \left[\ t^3\ \right]_{-h}^{h} + \int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)\ dt \right) \\ &= \frac{3}{2h^3} \left(f'(x)\ \frac{2h^3}{3} + \int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)\ dt \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{G_x(h) = f'(x) + \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)\ dt}$$

□

c) Soit ε un réel strictement positif. Démontrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $h \in]0, \delta]$, on a :

$$\left| \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 \ v_x(t) \ dt \right| \ \leqslant \ \varepsilon$$

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 \ v_x(t) \ dt \right| &= \left| \frac{3}{2h^3} \right| \left| \int_{-h}^{h} t^2 \ v_x(t) \ dt \right| \\ &\leqslant \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} |t^2 \ v_x(t)| \ dt && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ &= \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 \ |v_x(t)| \ dt \end{aligned}$$

- Soit $\varepsilon > 0$. Comme v_x est continue en 0, alors, par définition, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\forall t \in [-\delta, \delta], \ |v_x(t)| \ \leqslant \ \varepsilon$$

- Considérons $h \in]0, \delta]$. Ce qui s'écrit : $0 < h \leqslant \delta$. Alors, pour tout $t \in [-h, h]$:

$$-\delta \leqslant -h \leqslant t \leqslant h \leqslant \delta$$

On en déduit que pour tout $t \in [-h, h]$, l'inégalité précédente est vérifiée : $|v_x(t)| \ \leqslant \ \varepsilon$.
En multipliant de part et d'autre par $t^2 \geqslant 0$:

$$t^2 \ |v_x(t)| \ \leqslant \ t^2 \ \varepsilon$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($-h < h$), on obtient :

$$\int_{-h}^{h} t^2 \ |v_x(t)| \ dt \ \leqslant \ \int_{-h}^{h} t^2 \ \varepsilon \ dt$$

Et enfin, par multiplication par $\dfrac{3}{2h^3} \geqslant 0$:

$$\frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 \ |v_x(t)| \ dt \ \leqslant \ \frac{3}{2h^3} \ \varepsilon \int_{-h}^{h} t^2 \ dt \ = \ \varepsilon \ \frac{3}{2h^3} \ \frac{1}{3} \ \left[\ t^3 \ \right]_{-h}^{h} \ = \ \varepsilon$$

$$\boxed{\text{En conclusion : } \left| \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 \ v_x(t) \ dt \right| \ \leqslant \ \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 \ |v_x(t)| \ dt \ \leqslant \ \varepsilon}$$

□

d) En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de $f'(x)$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.b)*** :

$$| \ G_x(h) - f'(x) \ | \ = \ \left| \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 v_x(t) \ dt \right|$$

- Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$\left| \frac{3}{2h^3} \int_{-h}^{h} t^2 v_x(t) \ dt \right| \ \leqslant \ \varepsilon$$

- On a donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall h \in \,]0, \delta],\ \mid G_x(h) - f'(x) \mid \ \leqslant \ \varepsilon$$

Ce qui n'est autre que la définition de : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} G_x(h)$.

$$\boxed{\text{Ainsi } g(x) = f'(x).}$$

□

Exercice 5 : EML 2008

On admet l'encadrement suivant : $2,7 < \mathrm{e} < 2,8$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $f : [0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0,+\infty[$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln(t) - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$ en tant que produit et différence de fonctions continues sur $]0,+\infty[$.
- Par croissances comparées : $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ \ln(t) = 0$. Donc :

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = 0 = f(0)$$

Donc f est continue en 0.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

□

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0,+\infty[$.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto t\ \ln(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ en tant que} \\ \text{différence de fonctions de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[.\end{array}}$$

- Soit $t \in]0,+\infty[$.

$$f'(t) = \ln(t) + \cancel{t}\,\frac{1}{\cancel{t}} - 1 = \ln(t)$$

$$\boxed{\forall t \in]0,+\infty[,\ f'(t) = \ln(t)}$$

□

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.
Soit $t \in]0,+\infty[$. Alors : $f(t) = t\ (\ln(t) - 1)$.

Or : $\lim\limits_{t\to+\infty} \ln(t) - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t = +\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty.}$$

□

4. Dresser le tableau des variations de f.

Démonstration.

- Soit $t \in]0,+\infty[$. Alors : $f'(t) = \ln(t)$. Donc :

$$f'(t) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ t \geqslant 1$$

- On obtient le tableau de variations suivant :

t	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

En effet : $f(1) = 1 \times \cancel{\ln(1)} - 1 = -1$. $\square$

5. Montrer que f est convexe sur $]0, +\infty[$.

Démonstration.
On sait que : $\forall t \in]0, +\infty[$, $f'(t) = \ln(t)$. Or, la fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. D'où f' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est convexe sur }]0, +\infty[.}$$

Remarque
On aurait aussi pu résoudre cette question de la manière suivante.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que : $\forall t \in]0, +\infty[$, $f''(t) \geqslant 0$. $\square$

6. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

a) Montrer que Γ admet une demi-tangente en O.

Démonstration.
Soit $t \in]0, +\infty[$.

$$\tau_0(f)(t) = \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \ln(t) - 1 \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$$

$$\boxed{\text{La courbe } \Gamma \text{ admet une demi-tangente verticale en } 0.}$$

$\square$

b) Déterminer les points d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses.

Démonstration.
Soit $(x, y) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$.
Le point (x, y) est un point d'intersection de Γ avec l'axe des abscisses si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & f(x) \\ y & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} f(x) & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array} \right.$$

Or :

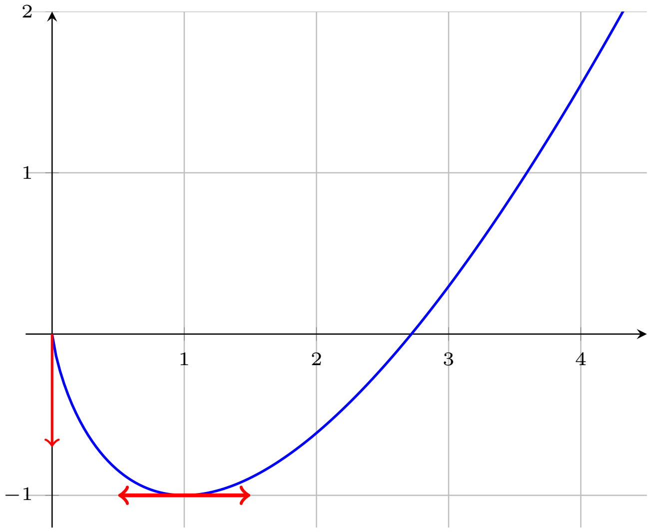
$$f(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x(\ln(x) - 1) = 0 \ \Leftrightarrow\ \begin{array}{c} x = 0 \\ \text{OU} \\ \ln(x) - 1 = 0 \end{array} \ \Leftrightarrow\ \begin{array}{c} x = 0 \\ \text{OU} \\ \ln(x) = 1 \end{array} \ \Leftrightarrow\ \begin{array}{c} x = 0 \\ \text{OU} \\ x = \mathrm{e} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Donc les points d'intersection de } \Gamma \text{ avec l'axe des abscisses sont } (0, 0) \text{ et } (0, \mathrm{e}).}$$

$\square$

c) Tracer Γ.

Démonstration.



□

Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application $G :]1,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]1,+\infty[$, par :

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\ dt$$

1. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[$ et que, pour tout $x \in]1,+\infty[$:

$$\begin{array}{rrcl} & G'(x) & = & \dfrac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right) \\ \text{et} & G''(x) & = & \dfrac{1}{2}\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right) \end{array}$$

À cet effet, on pourra faire intervenir une primitive F de f sans chercher à calculer F.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$, donc elle admet une primitive F sur $[0,+\infty[$.

  On sait de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ (d'après la question *2.*), donc F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

- On obtient alors :

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ G(x) = \frac{1}{2}(F(x+1) - F(x-1))$$

  Or la fonction $x \mapsto F(x-1)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[$ en tant que composée $h \circ g$ de :

  × $g : x \mapsto x-1$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty|$ en tant que fonction polynomiale.

  De plus, $g(]1,+\infty[) \subset]0,+\infty[$.

  × $h : u \mapsto F(u)$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$

  De même, $x \mapsto F(x+1)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } G \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]1,+\infty[\text{ en tant que différence de fonction de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]1,+\infty[.}$$

- Soit $x \in]1, +\infty[$.

$$G'(x) = \frac{1}{2}(F'(x+1) - F'(x-1)) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1))$$

$$\boxed{\forall x \in]1, +\infty[,\ G'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1))}$$

- Soit $x \in]1, +\infty[$.

$$G''(x) = \frac{1}{2}(f'(x+1) - f'(x-1)) = \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(x-1))$$

$$\boxed{\forall x \in]1, +\infty[,\ G''(x) = \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(x-1))}$$

□

2. a) Montrer que G' est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.

Démonstration.
Soit $x \in]1, +\infty[$.

$$G''(x) = \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(x-1)) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Or :

$$\begin{array}{rcll} G''(x) > 0 & \Leftrightarrow & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) > 0 & \\ & \Leftrightarrow & \frac{x+1}{x-1} > 1 & \textit{(car } x \mapsto e^x \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & x+1 > x-1 & \textit{(car } x > 1, \textit{ donc } x-1 > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 2 > 0 & \end{array}$$

La dernière assertion étant vérifiée, la première l'est aussi.
Ainsi : $\forall x \in]1, +\infty[,\ G''(x) > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } G' \text{ est strictement croissante sur }]1, +\infty[.}$$

□

b) Vérifier : $G'(2) > 0$.

Démonstration.
Par définition de G', on a :

$$G'(2) = \frac{1}{2}(f(3) - f(1))$$

Or, d'après la question *4.*, la fonction f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Donc : $f(3) > f(1)$. D'où : $f(3) - f(1) > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, comme } \frac{1}{2} > 0, \text{ on obtient : } G'(2) > 0.}$$

□

c) Établir que l'équation $G'(x) = 0$, d'inconnue $x \in]1, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que $\alpha < 2$.

Démonstration.

- La fonction G' est :
  - $\times$ continue sur $]1, +\infty[$ (d'après la question ***II-1.***),
  - $\times$ strictement croissante sur $]1, +\infty[$ (d'après la question ***II-2.a)***).

  Ainsi, G' réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $G'(]1, +\infty[)$. Or :

$$G'(]1, +\infty[) = \left] \lim_{x \to 1^+} G'(x), \lim_{x \to +\infty} G'(x) \right[$$

  Déterminons ces deux limites.

  - $\times$ Comme f est continue en 0, alors G' est continue en 1. On en déduit :

$$\lim_{x \to 1^+} G'(x) = G'(1) = \frac{1}{2}(f(2) - f(0)) = \frac{1}{2}\, f(2) = \frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2} \ln(2) - \cancel{2}) = \ln(2) - 1$$

    Or, d'après l'encadrement donné par l'énoncé : $\mathrm{e} > 2$.
    Donc, par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$, on obtient : $1 = \ln(\mathrm{e}) > \ln(2)$.
    D'où : $\ln(2) - 1 < 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi } G'(1) = \ln(2) - 1 < 0.}$$

  - $\times$ Soit $x \in]1, +\infty[$.

$$\begin{array}{rcl} G'(x) & = & f(x+1) - f(x-1) \\ & = & (x+1)\ln(x+1) - (\cancel{x}+1) - ((x-1)\ln(x-1) - (\cancel{x}-1)) \\ & = & (x+1)\ln(x+1) - (x-1)\ln(x-1) - 2 \\ & = & (x-1)\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right) + 2\ln(x+1) - 2 \\ & = & (x-1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) + 2\ln(x+1) - 2 \\ & = & (x-1)\ln\left(\dfrac{x-1+2}{x-1}\right) + 2\ln(x+1) - 2 \\ & = & (x-1)\ln\left(1 + \dfrac{2}{x-1}\right) + 2\ln(x+1) - 2 \end{array}$$

    Or : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x-1} = 0$. On en déduit : $\ln\left(1 + \dfrac{2}{x-1}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{x-1}$.
    Ainsi, par multiplication de part et d'autre par $x - 1$:

$$(x-1)\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \cancel{(x-1)} \times \frac{2}{\cancel{(x-1)}} = 2$$

    Ainsi : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x-1)\ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right) = 2$.
    De plus : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 2\ln(x+1) = +\infty$.

$$\boxed{\text{On obtient alors : } \lim_{x \to +\infty} G'(x) = +\infty.}$$

Finalement : $G'(]1,+\infty[) =]G'(1),+\infty[$.

Or $0 \in]G'(1),+\infty[$ (car $G'(1) < 0$).

$\boxed{\text{On en déduit que l'équation } G'(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur }]1,+\infty[\text{, notée } \alpha.}$

- De plus, d'après la question ***II-2.b)*** :

$$G'(2) > 0 = G'(\alpha)$$

D'après le théorème de la bijection, la fonction $(G')^{-1} : G'(]1,+\infty[) \to]1,+\infty[$ est strictement croissante. En appliquant $(G')^{-1}$ de part et d'autre de l'égalité, on obtient :

$$2 > \alpha$$

$$\boxed{\text{Finalement : } 1 < \alpha < 2}$$

□

Exercice 6 : EDHEC 2007

1. ***a)*** Montrer que pour tout $x > 0$: $x - \ln(x) > 0$.

Démonstration.
La fonction $h : x \mapsto \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$.
Ainsi, elle est située en dessous de ses tangentes, notamment celle au point d'abscisse 1, qui n'est autre que la droite d'équation :

$$\begin{array}{rcl} y & = & h(1) + h'(1)\ (x-1) \\ & = & 0 + 1 \times (x-1) = x - 1 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x > 0,\ \ln(x) \leqslant x - 1 < x.}$$

Remarque
La rédaction ci-dessus utilise les propriétés classiques de convexité. Il est évidemment possible de traiter cette question en faisant l'étude de la fonction $h : x \mapsto x - \ln(x)$. □

b) On pose alors : $f : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$

Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
La quantité $\dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)}$ est bien définie si :

× la quantité $\ln(x)$ est bien définie c'est à dire si $x > 0$.

× la quantité $x - \ln(x)$ est bien définie (ce qui est vrai pour tout $x > 0$) et non nulle.
Or, d'après la question précédente, $x - \ln(x) \neq 0$ pour tout $x > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la quantité } \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} \text{ est bien définie pour tout } x > 0.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } D = \mathbb{R}_+^* \cup \{0\} = \mathbb{R}_+.}$$ □

2. ***a)*** Montrer que f est continue sur D.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ car est le quotient $f = \dfrac{g_1}{g_2}$ de :

  × $g_1 : x \mapsto \ln(x)$ continue sur $]0, +\infty[$.

  × $g_1 : x \mapsto x - \ln(x)$ continue sur $]0, +\infty[$
  et qui ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est } \mathcal{C}^0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

- Démontrons que f est continue en 0.
Soit $x > 0$. Tout d'abord : $x - \ln(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\ln(x)$. En effet :

$$\frac{x - \ln(x)}{-\ln(x)} = \frac{x}{-\ln(x)} + 1 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{car } x \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad -\ln(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \infty$$

On en déduit :

$$\frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{\ln(x)}{-\ln(x)} = -1 \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -1$$

Ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1 = f(0)$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc continue en } 0.}$$

$$\boxed{\text{En conclusion, } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

□

b) Montrer que f est dérivable (à droite) en 0 et que $f'_d(0) = 0$.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

$$\tau_0(f)(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} + 1}{x} = \frac{\frac{\ln(x) + (x - \ln(x))}{x - \ln(x)}}{x} = \frac{x}{x\ (x - \ln(x))} = \frac{1}{x - \ln(x)}$$

Or : $x - \ln(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\ln(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$.
Ainsi : $\tau_0(f)(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } f \text{ est dérivable à droite en } 0 \text{ et } f'_d(0) = 0.}$$

□

3. a) Justifier que f est dérivable sur $D \setminus \{0\}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $D \setminus \{0\}$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ car est le quotient $f = \dfrac{g_1}{g_2}$ de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, \infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[.}$$

- Soit $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\ (x - \ln(x)) - \ln(x)\ (1 - \frac{1}{x})}{(x - \ln(x))^2} = \frac{1 - \cancel{\frac{\ln(x)}{x}} - \ln(x) + \cancel{\frac{\ln(x)}{x}}}{(x - \ln(x))^2}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{(x - \ln(x))^2}}$$

□

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(par croissances comparées)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

□

c) Dresser le tableau de variations de f.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- Comme $(x - \ln(x))^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - \ln(x)$. Or :

$$\begin{aligned} 1 - \ln(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(x) < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x < \mathrm{e}^1 \qquad \textit{(car } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \end{aligned}$$

- On en déduit le tableau de variation suivant.

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}-1}$	$\searrow$	0

En effet :

$$f(\mathrm{e}) \;=\; \frac{\ln(\mathrm{e})}{\mathrm{e} - \ln(\mathrm{e})} \;=\; \frac{1}{\mathrm{e} - 1}$$

□

4. Étudier le signe de $f(x)$.

Démonstration.
D'après la question ***1.a)***, pour tout $x > 0$: $x - \ln(x) > 0$.
On en déduit que pour tout $x > 0$, $f(x)$ est du signe de $\ln(x)$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Ainsi : } \forall x \in]0,1[,\ f(x) < 0 \ \text{ et } \ \forall x \in]1,+\infty[,\ f(x) > 0. \\ \text{De plus, } f(0) = -1 \text{ et } f(1) = 0. \end{array}}$$

Remarque

- Dans la question précédente, on a construit le tableau de variation de f. Il est assez naturel de vouloir l'exploiter et de démontrer, à l'aide du théorème de la bijection, qu'il exite un unique réel $\alpha \in]0, \mathrm{e}[$ tel que $f(x) = 0$. Ce qui permet, par la suite, d'obtenir le signe de $f(x)$.
- La démonstration présentée ici est beaucoup plus simple. En réalité, l'utilisation du théorème de la bijection ne se révèle pas pertinent dans cette question car il est simple de trouver les solutions de l'équation $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\ln(x)}{x - \ln(x)} = 0 \;\Leftrightarrow\; \ln(x) = 0 \Leftrightarrow\; x = 1$$

□

5. Pour tout réel x élément de D, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D puis étudier ses variations.

Démonstration.

- La fonction f est $\mathcal{C}^0$ sur $[0, +\infty[$.
  Elle admet donc une primitive H de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
- Pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$F(x) \ = \ \int_0^x f(t)\ dt \ = \ [\ H(t)\ ]_0^x \ = \ H(x) - H(0)$$

  Ainsi, la fonction F est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de H ($\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$) et d'une constante.
- Enfin, pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$F'(x) \ = \ H'(x) \ = \ f(x) \qquad \textit{(car } H \textit{ est une primitive de } f\textit{)}$$

- À l'aide de la question précédente, on obtient le tableau de variation suivant.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de F	0	$\searrow$		$\nearrow$	

Remarque

- On peut aussi rédiger en remarquant directement que la fonction F est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction f.
- Le choix de rédaction effectué ici est stratégique. L'intérêt de cette manière de rédiger est qu'elle s'adapte à plus de situations. Par exemple, les fonctions :

$$g_1 : x \mapsto \int_0^{v(x)} f(t)\ dt, \qquad g_2 : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ dt, \qquad g_3 : x \mapsto \int_{u(x)}^{0} f(t)\ dt$$

  `NE SONT PAS` des primitives de la fonction f mais s'expriment très bien à l'aide de H.
  Plus précisément, pour tout $x \in [0, +\infty[$:

$$g_1(x) = [\ H(t)\ ]_0^{v(x)} \ = H(v(x)) - H(0)$$

$$g_2(x) = [\ H(t)\ ]_{u(x)}^{v(x)} \ = H(v(x)) - H(u(x))$$

$$g_3(x) = [\ H(t)\ ]_{u(x)}^{0} \ = H(0) - H(u(x))$$

  Cette écriture permet de démontrer la régularité des fonctions g_i et d'obtenir une expression de leur dérivée (lorsqu'elles sont dérivables).

□

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt$.

Démonstration.
Soit $x \geqslant \mathrm{e}$.

- Pour tout $t \geqslant \mathrm{e}$, $\ln(t) \geqslant 1$. Ainsi :

$$\forall t \geqslant \mathrm{e},\ \frac{\ln(t)}{t} \ \geqslant\ \frac{1}{t}$$

  (car $\frac{1}{t} > 0$ si $t \geqslant \mathrm{e}$)

- Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \geqslant \mathrm{e}$) :

$$\int_{\mathrm{e}}^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt \ \geqslant\ \int_{\mathrm{e}}^x \frac{1}{t}\, dt = [\ \ln(t)\ ]_{\mathrm{e}}^x = \ln(x) - \ln(\mathrm{e}) = \ln(x) - 1$$

- Or :

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt & = & \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t}\, dt + \int_{\mathrm{e}}^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt & \textit{(d'après la relation de Chasles)} \\ & \geqslant & \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt & \textit{(car } \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t}\, dt \geqslant 0\textit{)} \\ & \geqslant & \ln(x) - 1 & \end{array}$$

- Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - 1 = +\infty$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par théorème de comparaison des limites infinies : } \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt = +\infty}$$

Remarque

- En déterminant la limite demandée, on démontre dans cette question que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est divergente. L'analyse de l'intégrande $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ doit permettre d'aboutir rapidement à cette conclusion (cette fonction est « trop grosse » au voisinage de $+\infty$ pour que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ soit convergente). Formellement :

$$\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln(t)}{t}\right)$$

  C'est ce constat de divergence qui doit guider la démonstration.

- Il était possible de mettre en place une démonstration plus directe à l'aide d'une primitive à vue. En effet :

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt \ =\ \left[\frac{(\ln(t))^2}{2}\right]_1^x \ =\ \frac{1}{2}\ [\ (\ln(t))^2\ ]_1^x \ =\ \frac{1}{2}\ \big((\ln(x))^2 - (\ln(1))^2\big) \ =\ \frac{1}{2}\ (\ln(x))^2$$

  Et on peut alors conclure simplement car : $\dfrac{1}{2}\ (\ln(x))^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

□

c) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln(t)}{t-\ln(t)}\, dt$ puis $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Démonstration.

- Pour tout $t \geqslant 1$, $\ln(t) \geqslant 0$ donc : $t - \ln(t) \leqslant t$.
  On en déduit, par passage à l'inverse : $\forall t \geqslant 1$, $\dfrac{1}{t-\ln(t)} \geqslant \dfrac{1}{t}$.
  Et enfin :
  $$\forall t \geqslant 1,\ \frac{\ln(t)}{t-\ln(t)} \geqslant \frac{\ln(t)}{t}$$
  car $\ln(t) \geqslant 0$.
- Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \geqslant 1$) :
  $$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t-\ln(t)}\, dt \ \geqslant\ \int_1^x \frac{\ln(t)}{t}\, dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
  $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\ln(t)}{t-\ln(t)}\, dt = +\infty}$$
- D'après la relation de Chasles, pour tout $x \geqslant 0$:
  $$F(x) \ = \ \int_0^x f(t)\, dt \ = \ \int_0^1 f(t)\, dt + \int_1^x f(t)\, dt \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$
  $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty}$$

Remarque

Dans la question précédente, on démontre que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\, dt$ est divergente.
Or :
$$\frac{\ln(t)}{t-\ln(t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t}$$
On peut alors, à l'aide du théorème d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, démontrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t-\ln(t)}\, dt$ est divergente.
Enfin, la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t-\ln(t)}\, dt$:

× est croissante (car $\dfrac{\ln(t)}{t} \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 1$).

× n'est pas majorée (sinon G aurait une limite finie en $+\infty$ et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t-\ln(t)}\, dt$ serait convergente).

On en déduit que G a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

□