
Probabilités discrètes

I. Exercices généraux

Exercice 1 : EML 2000

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Partie I : Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, \dots, 2n - 1\}, \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}$

2. Montrer : $\mathbb{E}(X) = \frac{2n + 1}{3}$.

On rappelle que pour tout entier naturel $p \geq 1$, on a : $\sum_{k=1}^p k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

3. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$.

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1 .

Partie II : Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ème}}$ carte découverte ($k \leq n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer $\mathbb{P}([G_2 = a - k])$.

2. Vérifier : $\mathbb{P}([G_2 = -n]) = \frac{n - 1}{2(2n - 1)}$.

3. Montrer : $\mathbb{E}(G_2) = \frac{3(3n - 1)a - (7n^2 - 1)}{6(2n - 1)}$.

Partie III : Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer, selon les valeurs de a , le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

Exercice 2 : EDHEC 2005

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O .

Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n , alors, à l'instant $(n + 1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k + 1)$ avec la probabilité p ($0 < p < 1$) ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1 - p$.

Pour tout n de \mathbb{N} , on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.

On admet que, pour tout n de \mathbb{N} X_n est définie sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.

On admet que T est une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

1. a) Pour tout k de \mathbb{N}^* , exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables X_i .

b) Donner la loi de X_1 .

c) En déduire $\mathbb{P}([T = k])$ pour tout k de \mathbb{N}^* , puis reconnaître la loi de T .

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$.

b) Pour tout n de \mathbb{N}^* , utiliser le système complet d'évènements $([X_{n-1} = k])_{0 \leq k \leq n-1}$ pour montrer que : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.

3. a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, 2, \dots, n + 1\}, \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p \mathbb{P}([X_n = k - 1])$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}, \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k (1 - p)$.
 En déduire également la valeur de $\mathbb{P}([X_n = n])$.

Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

c) Vérifier que $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \frac{1}{3}$.

On rappelle que `grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```

1  n = input(' Entrez un entier naturel n : ')
2  X = 0
3  for k = 1:n
4      u = grand(1,1,'uin',1,3)
5      if u == 2 then
6          X = .....
7      else
8          X = .....
9      end
10 end
11 disp(X)
    
```

5. a) Montrer que : $\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

b) En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$.

6. a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p(\mathbb{E}(X_n^2) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1)$.

b) Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \mathbb{E}(X_n^2) + (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$.

c) En déduire l'expression de u_n , puis celle de $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de p et n .

d) Montrer enfin que : $\mathbb{V}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$.

7. Dans cette question, on prend $p = \frac{1}{3}$.

a) En s'inspirant du programme de la question 4., écrire en **Scilab** une fonction **TrajectoireX** prenant en paramètre un entier n et calculant en sortie un vecteur **T** contenant les n premières abscisses du mobile.

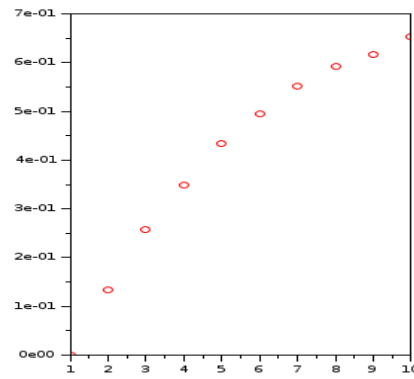
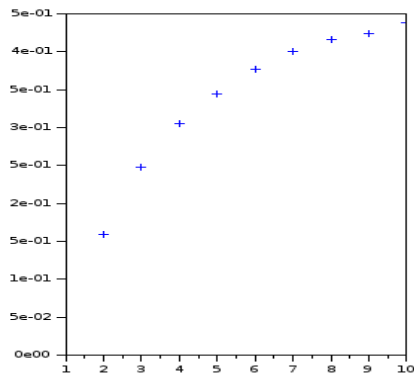
b) On considère le programme **Scilab** suivant :

```
1  n = input('Entrez un entier n : ')
2  N = 1000
3  T = zeros(N,n)
4  for i = 1:N
5      T(i,:) = TrajectoireX(n)
6  end
7  E = zeros(1,n)
8  V = zeros(1,n)
9  for k = 1:n
10     E(k) = mean(T(:,1:k))
11     V(k) = variance(T(:,1:k))
12 end
13 subplot(1,2,1), plot(E,'+')
14 subplot(1,2,2), plot(V,'or')
```

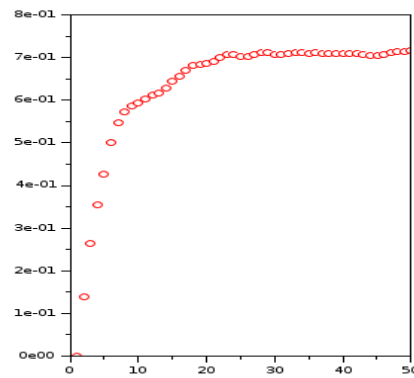
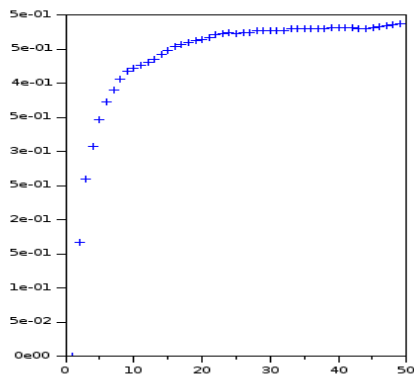
Que représentent les vecteurs **E** et **V** ?

c) Le programme précédent nous permet d'obtenir les graphiques suivants pour différentes valeurs de n :

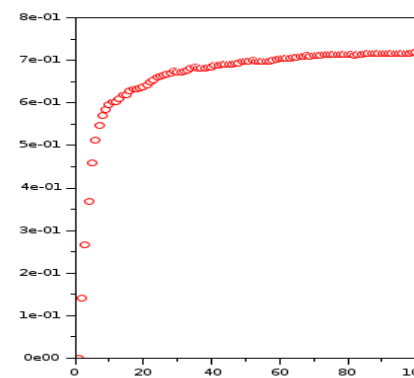
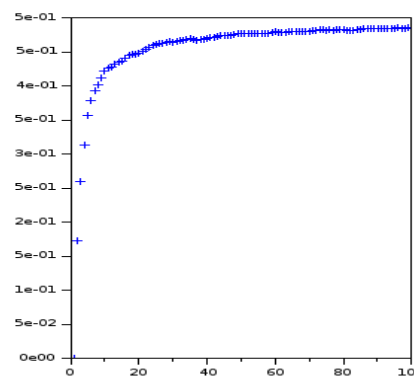
$n=10$



$n=50$



$n=100$



Expliquer ces graphiques à l'aide des questions 5. et 6..

Exercice 3 : EDHEC 2009

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0, 1[$ et on note $q = 1 - p$.

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p .

1. On pose $Z = \inf(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On rappelle que, pour tout entier naturel k , on a l'égalité : $[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$.

a) Pour tout entier naturel k , calculer $\mathbb{P}([Z > k])$.

b) Établir que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, on a :

$$\mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k - 1]) - \mathbb{P}([Z > k])$$

c) En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $(1 - q^2)$.

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :

Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \frac{X(\omega)}{2}$,

et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \frac{1 + X(\omega)}{2}$.

On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.

b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

c) Exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction de certains événements $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z .

3. On rappelle que la fonction `rand` renvoie de façon uniforme un réel aléatoire élément de $[0, 1[$.

Par ailleurs, la commande `modulo(x,2)` permet de tester si x est pair. Plus précisément :

× x est pair si et seulement si `modulo(x,2)` vaut 0,

× x est impair si et seulement si `modulo(x,2)` vaut 1.

Compléter le programme suivant pour que, d'une part, il simule les lancers d'une pièce donnant « pile » avec la probabilité p et calcule la valeur prise par la variable aléatoire X égale au rang du premier « pile » obtenu lors de ces lancers (X suit bien la loi géométrique de paramètre p) et pour que, d'autre part, il calcule et affiche la valeur prise par T , la variable aléatoire T ayant été définie dans la deuxième question.

```

1  x = 1
2  lancer = rand()
3  while lancer <= 1-p
4      x = .....
5      lancer = rand()
6  end
7  if modulo(x,2) == 0 then
8      .....
9  else
10     .....
11  end
12  disp(t)
    
```

Exercice 4 : ESSEC II 2016

Le but du problème est d'étudier le renouvellement d'un des composants d'un système complexe (une machine, un réseau de distribution d'énergie etc...) formé d'un assemblage de différentes pièces susceptibles de tomber en panne. On s'intéresse donc à une de ces pièces susceptibles de se casser ou de tomber en panne et on se place dans la situation idéale où dès que la pièce est défectueuse, elle est immédiatement remplacée. Dans une première partie, on étudie quelques propriétés fondamentales des variables aléatoires discrètes. Puis, dans une deuxième partie, on étudie la probabilité de devoir changer la pièce un certain jour donné. Enfin, dans une troisième partie on cherche à estimer le temps de fonctionnement du système avec un certain nombre de pièces de rechange à disposition.

Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X et $\mathbb{V}(X)$ sa variance. La deuxième partie peut être traitée en admettant si besoin les résultats de la première partie.

Première partie

Dans cette première partie, on étudie les propriétés asymptotiques d'une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N}^* .

1. a) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \mathbb{P}([X > j - 1]) - \mathbb{P}([X > j])$$

b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\sum_{j=1}^p j \mathbb{P}([X = j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) - p \mathbb{P}([X > p])$$

2. a) On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = \mu$.

i. Justifier la convergence de la série de terme général $k \mathbb{P}([X = k])$.

ii. Montrer que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k \mathbb{P}([X = k]) = 0$$

iii. En déduire que :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} p \mathbb{P}([X > p]) = 0$$

iv. Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge.

v. Montrer que : $\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.

b) On suppose que $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$ converge.

i. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p \geq 1}$ définie par :

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j])$$

ii. Comparer $\sum_{j=1}^p j \mathbb{P}([X = j])$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.

iii. En déduire que X admet une espérance.

c) Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge.

3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}([X > j]) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \quad (*)$$

- a) Légitimer que (*) définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* .
- b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.
- c) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \frac{1}{j^\alpha} \left(1 - \frac{1}{(1 + \frac{1}{j})^\alpha} \right)$$

- d) i. Étudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0, 1]$.
- ii. Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) \leq \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}$$

e) Montrer, en utilisant le résultat de 3.c), que :

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} j^{\alpha+1} \mathbb{P}([X = j]) = \alpha$$

f) Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

Deuxième partie : Étude de la probabilité de panne un jour donné.

Dans cette deuxième partie, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \geq 1}$ mutuellement indépendantes et de même loi à valeurs dans \mathbb{N}^* .

Pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du $i^{\text{ème}}$ composant en fonctionnement. Soit k un entier naturel non nul. On note $T_k = X_1 + \dots + X_k$. T_k représente donc le jour où le $k^{\text{ème}}$ composant tombe en panne. On fixe un entier naturel n non nul représentant un jour donné et on considère l'événement A_n : « le composant en place le jour n tombe en panne » c'est-à-dire A_n : « il existe k entier naturel non nul tel que $T_k = n$ », et on se propose d'étudier $\mathbb{P}(A_n)$.

4. Pour tout entier naturel non nul j , on note $p_j = \mathbb{P}([X_1 = j])$ et $u_j = \mathbb{P}(A_j)$. On suppose que pour tout entier naturel non nul j , on a $p_j \neq 0$. On pose de plus par convention $u_0 = 1$.

- a) Montrer que : $u_1 = p_1$.
- b) i. Montrer que : $A_2 = [X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$.
 ii. En déduire u_2 en fonction de p_1 et p_2 .
- c) Pour tout entier naturel i , on pose $\tilde{X}_i = X_{i+1}$.
 i. Montrer que les variables \tilde{X}_i sont mutuellement indépendantes, indépendantes de X_1 et de même loi que X_1 .
 ii. Soit k un entier naturel non nul strictement inférieur à n . Montrer que :

$$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \cap \bigcup_{j \geq 1} [\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_j = n - k]$$

iii. En déduire que pour tout entier naturel k non nul strictement inférieur à n :

$$\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k})$$

d) Montrer que :

$$u_n = u_{n-1} p_1 + \dots + u_0 p_n$$

- e) En **Scilab**, soit $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ le vecteur ligne tel que $P(j) = p_j$ pour j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.
 Écrire un programme en **Scilab** qui calcule u_n à partir de P .

5. Soit λ un réel appartenant à $]0, 1[$.

Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi géométrique de paramètre λ .
 Pour tout entier naturel j non nul, on a donc $\mathbb{P}([X_1 = j]) = \lambda(1 - \lambda)^{j-1}$.

- a) Calculer $\mathbb{P}([X_1 > k])$ pour tout entier naturel k non nul.
 b) Calculer $\mathbb{P}_{[X_1 > k]}([X_1 = k + 1])$.
 c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$\mathbb{P}(A_n) = \lambda$$

6. On suppose dans cette question que p_1 vérifie $0 < p_1 < 1$ et que $p_2 = 1 - p_1$.
 Pour simplifier, on posera $p = p_1 = 1 - p_2$.

- a) Que vaut p_i pour i supérieur ou égal à 3?
 b) Soit la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} p & 1 - p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$$

- c) i. Diagonaliser la matrice M .
 ii. Montrer que :

$$M^{n-1} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- d) i. Exprimer u_n en fonction de p et de n .
 ii. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

II. Couples de v.a.r. discrètes

Exercice 5 : EML 1998

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher. La proportion de boules vertes est p , $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.

On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise (toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant).

1. On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

a) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ?

b) Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de la façon suivante.

Pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $[X = i] \cap [Y = j]$ est l'événement :

« les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i + j + 1)$ ^{ème} est blanche

ou

les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i + j + 1)$ ^{ème} est verte. »

Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB \dots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

2. a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X .

b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p}$.

c) Montrer que $\mathbb{E}(X)$ est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

3. Montrer, pour tout (i, j) de $(\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

4. a) En déduire la loi de la variable aléatoire Y .

b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

5. a) Établir que, si $p \neq \frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

(On pourra envisager $\mathbb{P}([X = 1] \cap [Y = 1])$)

b) Démontrer que, si $p = \frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 6 : EDHEC 2011

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n , contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.

Pour tout i de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. a) Pour tout i et tout k , éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note $U_{i,k}$ l'évènement « l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ».

Écrire l'évènement $[X_i = 1]$ à l'aide de certains des évènements $U_{i,k}$, puis montrer que :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

c) Comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, alors les variables X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

2. On pose $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

a) Déterminer l'espérance de Y_n , notée $\mathbb{E}(Y_n)$.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

3. Pour tout i de $\{1, 2, \dots, n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $\mathbb{E}(N_i)$.

b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

4. On rappelle que `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie au hasard un entier de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```

1  n = input('Donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2')
2  n1 = 0
3  x1 = 1
4  for k = 1:n
5      hasard = grand(1,1,'uin',1,n)
6      if hasard == 1 then
7          x1 = .....
8          n1 = .....
9      end
10 end
11 disp(x1)
12 disp(n1)
    
```

Exercice 7 : HEC 2010

Soit p un réel de $]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $\frac{1}{p}$).

On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$. On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

1. **a)** Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}([X_1 \leq k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.
 - b)** Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{E}(X_1 - X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 - X_2)$.
 - c)** Établir la relation : $\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1 + q}$.
2. **a)** Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1 - q^2$.
 En déduire $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{V}(Z)$ et $\mathbb{E}(T)$.
 - b)** Soit k un entier de \mathbb{N}^* . Justifier l'égalité : $[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]$.
 En déduire la relation suivante : $\mathbb{P}([T = k]) = 2 \mathbb{P}([X_1 = k]) - \mathbb{P}([Z = k])$.
 - c)** Établir la formule : $\mathbb{V}(T) = \frac{q(2q^2 + q + 2)}{(1 - q^2)^2}$.
3. **a)** Préciser $(T - Z)(\Omega)$. Exprimer pour tout j de \mathbb{N}^* , l'évènement $[Z = j] \cap [Z = T]$ en fonction des évènements $[X_1 = j]$ et $[X_2 = j]$.
 En déduire pour tout j de \mathbb{N}^* , l'expression de $\mathbb{P}([Z = j] \cap [Z = T])$.
 - b)** Montrer que pour tout couple (j, l) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T - Z = l]) = 2p^2q^{2j+l-2}$.
 - c)** Montrer que pour tout k de \mathbb{Z} , $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) = \frac{pq^{|k|}}{1 + q}$.
 (on distinguera trois cas : $k = 0$, $k > 0$ et $k < 0$)
 - d)** En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.
 - e)** Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T - Z$ sont indépendantes.
4. **a)** À l'aide du résultat de la question 3.e), calculer $\text{Cov}(Z, T)$.
 Les variables Z et T sont-elles indépendantes?
 - b)** Calculer en fonction de q , le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T .
 - c)** Déterminer la loi de probabilité du couple (Z, T) .
 - d)** Déterminer pour tout j de \mathbb{N}^* , la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.
 - e)** Soit j un élément de \mathbb{N}^* . On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans \mathbb{N}^* , dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.
 Calculer $\mathbb{E}(D_j)$.

Exercice 8 : EML 2013

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On considère une urne \mathcal{U} contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.

On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne \mathcal{U} .

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Donner la loi de X_i . Rappeler l'espérance et la variance de X_i .

2. Les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont-elles indépendantes ?

3. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$.

a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j) .

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k .

Partie II

4. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2 .

En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.

5. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

a) Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = 1])$ et déterminer $\mathbb{P}([Z_k = k])$.

b) Montrer, pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \frac{\ell}{n} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \frac{n - \ell + 1}{n} \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])$.

c) En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n} \mathbb{E}(Z_k) + 1$.

6. a) Montrer que la suite $(v_k)_{k \geq 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n \left(1 - \left(\frac{n-1}{n} \right)^k \right)$.

Partie III

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne \mathcal{U} contient 4 boules numérotées de 1 à 4.

Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k .

7. Rappeler la valeur de $\mathbb{P}([Z_k = 1])$. Déterminer $\mathbb{P}([Z_k \geq 5])$.

8. Montrer : $\mathbb{P}([Z_k = 2]) = 6 \frac{2^k - 2}{4^k}$.

9. On note, pour tout i de $\llbracket 1, 4 \rrbracket$, A_i l'événement :

« la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages ».

a) Montrer : $\mathbb{P}([Z_k \leq 3]) = 4 \mathbb{P}(A_1) - 6 \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4 \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

c) En déduire : $\mathbb{P}([Z_k \leq 3])$, puis $\mathbb{P}([Z_k = 3])$ et $\mathbb{P}([Z_k = 4])$.

Exercice 9 : EML 2005

1. Préliminaire :

Soit $x \in]0, 1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec x , on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n \geq 1}$ et $(T_n)_{n \geq 1}$ de la façon suivante :

- pour tout entier naturel n non nul, S_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le $n^{\text{ème}}$ succès ;
- T_1 est la variable aléatoire égale à S_1 et pour tout entier naturel $n \geq 2$, T_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le $n^{\text{ème}}$ succès après le $(n-1)^{\text{ème}}$ succès.

Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$ et pour tout $n \geq 1$, $S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$.

- a) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer la loi de T_n et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de T_n .
- b) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, justifier l'indépendance des variables aléatoires T_1, T_2, \dots, T_n .
- c) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'espérance et la variance de S_n sont définies et montrer :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{1-x} \text{ et } \mathbb{V}(S_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}$$

- d) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la loi de S_n .

Que peut-on dire, sans calcul, de la valeur de $\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = k])$?

- e) En déduire, pour tout $x \in]0, 1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

2. Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est p (p fixé, $p \in]0, 1[$), et celle d'obtenir face est $q = 1 - p$.

Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A .

Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu par le joueur B .

- a) Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geq 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.
- b) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

- c) Montrer : $\mathbb{P}([Y = 0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \frac{q}{1+q}$.

- d) Soit n un entier naturel non nul.

Montrer : $\mathbb{P}([Y = n]) = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$.

Puis, en utilisant **1.e**, montrer que : $\mathbb{P}([Y = n]) = \frac{1}{(1+q)^2} \left(\frac{q}{1+q} \right)^{n-1}$.