Probabilités discrètes

I. Exercices généraux

Exercice 1 : EML 2000

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Partie I : Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon alétoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $\mathbb{E}(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, ..., 2n-1\}, \mathbb{P}([X=k]) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, 2n-1]\!]$.

- Un k-tirage réalisant l'événement $[X = k]$ est entièrement déterminé par :
  - × la carte obtenue au 1^{er} tirage : $\dbinom{2n-2}{1} = 2n-2$ choix,
    (on tire une des $2n-2$ cartes qui ne sont pas des rois rouges)
  - × la carte obtenue au $2^{\text{ème}}$ tirage : $\dbinom{2n-3}{1} = 2n-3$ choix,
    (on tire une des $2n-3$ cartes restantes)
  - × $\cdots$
  - × la carte obtenue au $(k-1)^{\text{ème}}$ tirage : $\dbinom{2n-(k-1)-1}{1} = 2n-(k-1)-1 = 2n-k$ choix,
  - × la carte obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage : 2.
    (on tire l'un des 2 rois rouges)
- Notons Ω' l'ensemble des k-tirages.
  Alors $\text{Card}(\Omega') = 2n \times (2n-1) \times \cdots \times (2n-k+1)$.
  Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=k]) &= \frac{\text{Card}([X=k])}{\text{Card}(\Omega')} = \frac{\cancel{(2n-2)} \cdots \cancel{(2n-k+1)}(2n-k)2}{2n(2n-1)\cancel{(2n-2)} \cdots \cancel{(2n-k+1)}} \\ &= \frac{(2n-k)\cancel{2}}{\cancel{2}n(2n-1)} = \frac{2n-k}{2n(2n-1)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, 2n-1]\!], \mathbb{P}([X=k]) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}}$$

Remarque
Il était aussi possible d'utiliser la formule des probabilités composées.
Pour ce faire, il faut prendre l'initiative d'introduire des événements.

- Pour tout $i \in [\![1, 2n]\!]$, notons R_i l'événement R_i : « on a tiré un roi rouge lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».
Ainsi $\overline{R_i}$: « on a tiré une carte autre qu'un roi rouge lors du $i^{\text{ème}}$ tirage ».
On a alors :
$$[X = k] \;=\; \overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}} \cap R_k$$
- On en déduit, par la formule des probabilités composées, et sous réserve de l'existence des probabilités conditionnelles entrant en jeu :
$$\mathbb{P}([X = k]) \;=\; \mathbb{P}(\overline{R_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) \times \ldots \times \mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-2}}}(\overline{R_{k-1}}) \times \mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}}}(R_k)$$

- Or, pour tout $j \in [\![1, k-1]\!]$: $\mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{j-1}}}(\overline{R_j}) = \dfrac{2n-2-(j-1)}{2n-(j-1)} = \dfrac{2n-1-j}{2n+1-j}$.
  En effet, avant la découverte de la $j^{\text{ème}}$ carte, on a tiré $j-1$ cartes (aucun roi rouge) et il reste donc $2n-(j-1)$ cartes dans le paquet dont $2n-2-(j-1)$ qui ne sont pas des rois rouges.
- Et $\mathbb{P}_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}}}(R_k) = \dfrac{2}{2n-(k-1)} = \dfrac{2}{2n+1-k}$.
  En effet, avant la découverte de la $k^{\text{ème}}$ carte, on a tiré $k-1$ cartes et il reste donc $2n-(k-1)$ cartes dans le paquet dont 2 qui sont des rois rouges.
- On en déduit que :

$$\mathbb{P}([X=k]) \;=\; \frac{\cancel{2n-2}}{2n} \; \frac{\cancel{2n-3}}{2n-1} \; \frac{\cancel{2n-4}}{\cancel{2n-2}} \; \cdots \; \frac{\cancel{2n+1-k}}{\cancel{2n+3-k}} \; \frac{2n-k}{\cancel{2n+2-k}} \; \frac{2}{\cancel{2n+1-k}}$$

□

2. Montrer : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.
On rappelle que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, on a : $\sum\limits_{k=1}^{p} k^2 = \dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

Démonstration.
Remarquons que $X(\Omega) = [\![1, 2n-1]\!]$. En effet :
× on peut obtenir un roi rouge dès la première carte,
× comme le jeu contient 2 rois rouges et $2n$ cartes, on obtient le premier roi rouge au plus tard au $(2n-1)^{\text{ème}}$ tirage,
× on peut tirer le premier roi rouge dans chaque tirage intermédiaire.

Ainsi X est une variable aléatoire finie.

$$\boxed{X \text{ admet donc une espérance.}}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{2n-1} k\ \mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=1}^{2n-1} k\ \frac{2n-k}{n(2n-1)} \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n-1} k(2n-k) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n-1} (2nk-k^2) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \left(2n \sum_{k=1}^{2n-1} k - \sum_{k=1}^{2n-1} k^2 \right) \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \left(2n\ \frac{(2n-1)(2n)}{2} - \frac{(2n-1)(2n)(2\ (2n-1)+1)}{6} \right) \\
&= \frac{(2n-1)(2n)}{n(2n-1)} \left(2n\ \frac{1}{2} - \frac{(2\ (2n-1)+1)}{6} \right) \\
&= 2 \left(2n\ \frac{1}{2} - \frac{4n-1}{6} \right) \;=\; \frac{2}{6} \left(6n-(4n-1)\right) \\
&= \frac{2n+1}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{2n+1}{3}}$$

□

3. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs losqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$.
Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1.

Démonstration.

- Par définition de G_1, on a
$$G_1 = a - X$$
- Ainsi, la v.a.r. G_1 admet une espérance en tant que somme de v.a.r. admettant une espérance.
De plus, par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}(G_1) = \mathbb{E}(a - X) = a - \mathbb{E}(X) = a - \frac{2n+1}{3}$$
$$\boxed{\mathbb{E}(G_1) = a - \frac{2n+1}{3}}$$

Remarque
Si on ne repère pas la relation $G_1 = a - X$, on peut toujours résoudre cette question en déterminant la loi de G_1.

- Déterminons la loi de G_1.
  - $G_1(\Omega) = \{a - k \ / \ k \in [\![1, 2n-1]\!]\}$ puisque le premier rouge peut être découvert entre le 1^{er} et le $(2n-1)^{\text{ème}}$ tirage.
  - Soit $k \in [\![1, 2n-1]\!]$.
  Comme : $[G_1 = a - k] = [X = k]$, on a, d'après la question ***1.*** :
$$\mathbb{P}([G_1 = a - k]) = \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2n-k}{n(2n-1)}$$
- G_1 est une variable aléatoire finie. Donc elle admet une espérance.

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}(G_1) & = & \sum\limits_{k=1}^{2n-1} (a-k) \ \mathbb{P}([G_1 = a-k]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{2n-1} (a-k) \ \mathbb{P}([X = k]) & \textit{(car } [G_1 = a-k] = [X=k]\textit{)} \\
& = & a \sum\limits_{k=1}^{2n-1} \ \mathbb{P}([X=k]) - \sum\limits_{k=1}^{2n-1} k \ \mathbb{P}([X=k]) & \\
& = & a - \mathbb{E}(X) & \textit{(car } ([X=k])_{k \in [\![1,2n-1]\!]} \textit{ est un sce)}
\end{array}$$
□

Partie II : Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ème}}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, ..., n\}$, déterminer $\mathbb{P}\left([G_2 = a - k]\right)$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
On remarque que $[G_2 = a - k] = [X = k]$. On en déduit :

$$\mathbb{P}([G_2 = a - k]) = \mathbb{P}([X = k]) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}$$

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}([G_2 = a - k]) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}}$$

□

2. Vérifier : $\mathbb{P}\left([G_2 = -n]\right) = \dfrac{n - 1}{2\,(2n - 1)}$.

Démonstration.

- On remarque que : $G_2(\Omega) = \{a - k \ / \ k \in [\![1, n]\!]\} \cup \{-n\}$.
  En effet, le 1^{er} roi rouge peut être tiré entre le 1^{er} et le $n^{\text{ème}}$ tirage, ou ne jamais être tirée.
- La famille $\left([G_2 = a - 1], [G_2 = a - 2], \dots, [G_2 = a - n], [G_2 = -n]\right)$ est le système complet d'événements associé à G_2.
  On en déduit que : $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([G_2 = a - k]) + \mathbb{P}([G_2 = -n]) = 1$. Ou encore :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([G_2 = -n]) &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([G_2 = a - k]) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2n - k}{n(2n - 1)} \\
&= 1 - \frac{1}{n(2n - 1)} \left(\sum_{k=1}^{n} (2n - k) \right) \\
&= 1 - \frac{1}{n(2n - 1)} \left(2n \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} k \right) \\
&= 1 - \frac{1}{n(2n - 1)} \left(2n\ n - \frac{n(n + 1)}{2} \right) \\
&= 1 - \frac{n}{2n(2n - 1)} \left(4n - (n + 1)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2(2n - 1)} (3n - 1) \\
&= \frac{(4n - 2) - (3n - 1)}{2(2n - 1)} = \frac{n - 1}{2(2n - 1)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([G_2 = -n]) = \frac{n - 1}{2(2n - 1)}}$$

□

3. Montrer : $\mathbb{E}(G_2) = \dfrac{3(3n-1)a - \left(7n^2-1\right)}{6(2n-1)}$.

Démonstration.

- G_2 est une v.a.r. finie, donc elle admet une espérance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G_2) &= \sum_{k=1}^{n} (a-k)\ \mathbb{P}([G_2 = a-k]) + (-n)\ \mathbb{P}([G_2 = -n]) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} (a-k) \frac{2n-k}{n(2n-1)}\right) - n \frac{n-1}{2(2n-1)} \\
&= \frac{1}{n(2n-1)} \left(\sum_{k=1}^{n} (a-k)(2n-k)\right) - n \frac{n-1}{2(2n-1)}
\end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} (a-k)(2n-k) &= \sum_{k=1}^{n} (2an - (a+2n)k + k^2) \\
&= 2an \sum_{k=1}^{n} 1 - (a+2n) \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= 2an\ n - (a+2n)\ \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= 2an^2 + \frac{n(n+1)}{6} (-3\ (a+2n) + (2n+1)) \\
&= 2an^2 + \frac{n(n+1)}{6} (-3a - 4n + 1) \\
&= \frac{n}{6} (12an + (n+1)(-3a-4n+1)) \\
&= \frac{n}{6} \left(12an - 3an - 4n^2 + n - 3a - 4n + 1\right) \\
&= \frac{n}{6} \left(9an - 3a - 3n + 1 - 4n^2\right) \\
&= \frac{n}{6} \left(3a\ (3n-1) + 1 - 3n - 4n^2\right)
\end{aligned}$$

- En combinant ces résultats, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G_2) &= \frac{1}{n(2n-1)} \left(\frac{n}{6} \left(3a\ (3n-1) + 1 - 3n - 4n^2\right)\right) - n \frac{n-1}{2(2n-1)} \\
&= \frac{n}{6n(2n-1)} \left(\left(3a\ (3n-1) + 1 - 3n - 4n^2\right) - 3n(n-1)\right) \\
&= \frac{1}{6(2n-1)} \left(3a\ (3n-1) + 1 - 7n^2\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(G_2) = \frac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)}}$$

□

Partie III : Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

Démonstration.
On cherche à déterminer le protocole donnant l'espérance de gain la plus élevée.
On cherche donc à comparer $\mathbb{E}(G_1)$ et $E(G_2)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G_1) \leqslant \mathbb{E}(G_2) \quad &\Leftrightarrow \quad a - \frac{2n+1}{3} \leqslant \frac{3(3n-1)a - (7n^2-1)}{6(2n-1)} \\
&\Leftrightarrow \quad 6(2n-1)a - 2(2n-1)(2n+1) \leqslant 3(3n-1)a - (7n^2-1) \qquad \textit{(car } 6(2n-1) > 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad (12n - 6 - 9n + 3)a \leqslant 8n^2 - 2 - 7n^2 + 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (3n-3)a \leqslant n^2 - 1 \\
&\Leftrightarrow \quad a \leqslant \frac{(n+1)\cancel{(n-1)}}{3\cancel{(n-1)}} \qquad \textit{(car } n = 16, \textit{ donc } n-1 > 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad a \leqslant \frac{n+1}{3} = \frac{17}{3}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}
\text{Si } a > \dfrac{17}{3}, \text{ le protocole 1 est le plus favorable au joueur.} \\[2ex]
\text{Si } a < \dfrac{17}{3}, \text{ le protocole 2 est le plus favorable au joueur.} \\[2ex]
\text{Si } a = \dfrac{17}{3}, \text{ les deux se valent.}
\end{array}}$$

□

I.1. Exercice 2 : EDHEC 2005

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine.
Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors, à l'instant $(n+1)$ il sera sur le point d'abscisse $(k+1)$ avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $1-p$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse de ce point à l'instant n et l'on a donc $X_0 = 0$.
On admet que, pour tout n de $\mathbb{N}$ X_n est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Par ailleurs, on note T l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).
Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont 0, 0, 1, 2, 0, 0, 1, alors on a $T = 1$. Si les abscisses successives sont : 1, 2, 3, 0, 0, 1, alors on a $T = 4$.
On admet que T est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. a) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'évènement $[T = k]$ en fonction d'évènements mettant en jeu certaines des variables X_i.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- L'événement $[T = k]$ est réalisé si le mobile revient en 0 pour la première fois à l'instant k. Cela signifie qu'entre l'instant 0 et l'instant $k-1$, le mobile n'est pas revenu en 0. Il a donc avancé d'une position à chacun de ces instants. Ainsi :
  - × le mobile se trouve en position 1 à l'instant 1.
  - × le mobile se trouve en position 2 à l'instant 2.
  - × ...
  - × le mobile se trouve en position $k-1$ à l'instant $k-1$.
  - × le mobile se trouve en position 0 à l'instant k.

$$\boxed{[T = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i = i] \right) \cap [X_k = 0]}$$

- Afin de lever toute ambiguïté, précisons cette formule lorsque $k = 1$.

$$\boxed{[T = 1] = [X_1 = 0]}$$

(le mobile revient à la position 0 *dès l'instant* 1*)* □

b) Donner la loi de X_1.

Démonstration.

- $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$. En effet, entre l'instant 0 et l'instant 1 :
  - × soit le mobile a avancé d'une position et se trouve donc en position 1.
  - × soit le mobile est resté sur le point origine.
- D'après l'énoncé, on a de plus :

$$\mathbb{P}([X_1 = 0]) = 1 - p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X_1 = 1]) = p$$

$$\boxed{\text{On en conclut que : } X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p).}$$

□

c) En déduire $\mathbb{P}([T=k])$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$, puis reconnaître la loi de T.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***1.a)*** :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([T=k]) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i=i]\right)\cap[X_k=0]\right) \\ &= \mathbb{P}\left([X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-1}=k-1]\cap[X_k=0]\right)\end{aligned}$$
- On en déduit, par la formule des probabilités composées, et sous réserve de l'existence des probabilités conditionnelles entrant en jeu :
$$\begin{aligned}&\mathbb{P}([T=k]) \\ = \ &\mathbb{P}([X_1=1])\times\ldots\times\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-2}=k-2]}([X_{k-1}=k-1])\times\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-1}=k-1]}([X_k=0])\end{aligned}$$
- La position du mobile à un instant $j \geqslant 2$ ne dépendant que de sa position à l'instant précédent, on obtient :
$$\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{j-1}=j-1]}([X_j=j]) \ = \ \mathbb{P}_{[X_{j-1}=j-1]}([X_j=j]) = p$$
et :
$$\mathbb{P}_{[X_1=1]\cap\ldots\cap[X_{k-1}=k-1]}([X_k=0]) \ = \ \mathbb{P}_{[X_{k-1}=k-1]}([X_k=0]) = 1-p$$
ce qui permet de lever la réserve précédente.
- On en conclut :
$$\boxed{\mathbb{P}([T=k]) = p\times\ldots\times p\times(1-p) = p^{k-1}}$$
- Remarquons alors que : $T(\Omega)=\mathbb{N}^*$.
(le mobile peut revenir, pour la première fois en position 0 à n'importe quel instant)
On peut donc en conclure, grâce au calcul de probabilité précédent que :
$$\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)}$$

□

2. a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $X_n(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $X_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$.

- **Initialisation** :
D'après l'énoncé, $X_0=0$. Ainsi : $X_0(\Omega)=\{0\}=[\![0,0]\!]$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n\in\mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $X_{n+1}(\Omega)=[\![0,n+1]\!]$).
D'après l'hypothèse de récurrence, $X_n(\Omega)=[\![0,n]\!]$. Autrement dit, le mobile peut se trouver à n'importe quelle position $k\in[\![0,n]\!]$ à l'instant n. Deux cas se présentent alors :
  - × soit le mobile se déplace en avant et ainsi le mobile se retrouve en position $k+1\ in[\![1,n+1]\!]$.
  - × soit le mobile revient en position 0.

  Ainsi : $X_{n+1}(\Omega)=[\![0,n+1]\!]$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n\in\mathbb{N},\ X_n(\Omega)=[\![0,n]\!].}$$ □

b) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, utiliser le système complet d'évènements $([X_{n-1} = k])_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ pour montrer que : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après la question précédente, la famille $([X_{n-1} = k])_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est le système complet d'événements associé à X_{n-1}.
D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X_n = 0]) & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k] \cap [X_n = 0]) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \times \mathbb{P}_{[X_{n-1}=k]}([X_n = 0]) \quad \textit{(car } \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \neq 0\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \times (1-p) \\ & = & (1-p) \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) \\ & = & (1-p) \end{array}$$

En effet, comme $([X_{n-1} = k])_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une système complet d'événements :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = k]) = 1$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p.}$$

□

3. a) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in \{1, 2, \ldots n+1\},\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\, \mathbb{P}([X_n = k-1])$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in [\![1, n+1]\!]$.

- Remarquons tout d'abord que :

$$[X_{n+1} = k] \ = \ [X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k]$$

  Le sens réciproque $(\supset)$ est évident.
  Le sens direct $(\subset)$ provient du fait que si le mobile se trouve en position k à l'instant $n+1$, il était forcément en position $k-1$ à l'instant précédent.

- On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) & = & \mathbb{P}([X_n = k-1] \cap [X_{n+1} = k]) \\ & = & \mathbb{P}([X_n = k-1]) \times \mathbb{P}_{[X_n=k-1]}([X_{n+1} = k]) \quad \textit{(par la formule des probabilités composées)} \\ & = & \mathbb{P}([X_n = k-1]) \times p \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![1, n+1]\!],\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p\, \mathbb{P}([X_n = k-1])}$$

□

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \{0, 1, 2 \ldots, n-1\}\ ,\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k\,(1-p)$.
En déduire également la valeur de $\mathbb{P}([X_n = n])$.
Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k\,(1-p)$.

  ▸ **Initialisation** :
  D'après la question ***2.b)*** : $\mathbb{P}([X_n = 0]) = 1 - p$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.

  ▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = p^k\,(1-p)$).
  Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Deux cas se présentent :

  × soit $k = 0$:
  D'une part : $\mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) = 1 - p$.
  D'autre part : $p^0\ (1-p) = 1 - p$.
  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est bien vérifiée dans ce cas.

  × soit $k \in [\![1, n]\!]$:
  D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) &= p\ \mathbb{P}([X_n = k-1]) \\ &= p \times p^{k-1}(1-p) && \textit{(d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à } k-1 \in [\![0, n-1]\!]\textit{)} \\ &= p^k(1-p) \end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vérifiée dans ce cas.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = p^k\,(1-p).}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat de la question précédente appliqué à $k = n+1 \in [\![1, n+1]\!]$:

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = n+1]) = p\ \mathbb{P}([X_n = n])$$

  On peut alors, par une récurrence immédiate, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X_n = n]) = p^n$$

  En effet, la propriété est vérifiée au rang 0 (question ***2.b)***).
  Et si elle est vérifiée au rang n alors, d'après l'égalité ci-dessus :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = n+1]) = p\ \mathbb{P}([X_n = n]) = p\ p^n = p^{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X_n = n]) = p^n}$$

- Ce résultat s'explique par le fait que le seul n-déplacement réalisant $[X_n = n]$ est celui dans lequel le mobile ne fait qu'avancer. Chaque avancée se produisant avec probabilité p, un tel n-déplacement se déroule avec probabilité p^n.

□

c) Vérifier que $\sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([X_n = k])\right) + \mathbb{P}([X_n = n]) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} p^k \ (1-p)\right) + p^n \\
&= (1-p) \ \left(\sum_{k=0}^{n-1} p^k\right) + p^n \\
&= \cancel{(1-p)} \ \frac{1-p^n}{\cancel{1-p}} + p^n & \textit{(car } p \neq 1\textit{)} \\
&= 1 - p^n + p^n \ = \ 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) = 1}$$

□

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.
On rappelle que `grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie au hasard un entier de $\{0, 1, 2\}$.
Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par X_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n = input(' Entrez un entier naturel n : ')
X = 0
for k = 1:n
    u = grand(1,1,'uin',0,2)
    if u == 2 then
        X = ...........
    else
        X = ...........
    end
end
disp(X)
```

Démonstration.

- D'après l'énoncé, le résultat affiché `X` est une valeur possible prise par X_n, obtenue par simulation.La variable `X` est initialisée à 0 (position de départ du mobile). Puis elle doit être mise à jour pour simuler un déplacement vers la droite (`X = X+1`) ou un retour à l'origine (`X = 0`).
- Si $p = \frac{1}{3}$, alors, à chaque instant n, le mobile se déplace vers la droite avec probabilité $\frac{1}{3}$ et revient en position 0 avec probabilité $\frac{2}{3}$.
- L'instruction `grand(1,1,'uin',0,2)` renvoie 0 avec probabilité $\frac{1}{3}$, 1 avec probabilité $\frac{1}{3}$ et 2 avec probabilité $\frac{1}{3}$. Ainsi, la probabilité d'obtenir soit 0 soit 1 est de $\frac{2}{3}$.

- L'ensemble des points précédents permet de compléter les lignes à trou :

```
6          X = X + 1
```

```
8          X = 0
```

□

5. *a)* Montrer que : $\forall n \geqslant 2,\quad \sum\limits_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \geqslant 2,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1} = \dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part : $\sum\limits_{k=1}^{2-1} k\ p^{k-1} = \sum\limits_{k=1}^{1} k\ p^{k-1} = 1\ p^0 = 1$.
- D'autre part : $\dfrac{(2-1)\,p^2 - 2\,p^{2-1} + 1}{(1-p)^2} = \dfrac{p^2 - 2p + 1}{(1-p)^2} = \dfrac{(1-p)^2}{(1-p)^2} = 1$.

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

▸ **Hérédité** : soit $n \geqslant 2$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ $\left(i.e.\ \sum\limits_{k=1}^{n} k\ p^{k-1} = \dfrac{n\ p^{n+1} - (n+1)\,p^n + 1}{(1-p)^2}\right)$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\ p^{k-1} &= \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1}\right) + n\ p^{n-1} \\
&= \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2} + n\ p^{n-1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1 + n\ (1-p)^2\ p^{n-1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1 + n\ (1-2p+p^2)\ p^{n-1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(n-1)\,p^n - \cancel{n\,p^{n-1}} + 1 + \left(\cancel{n\ p^{n-1}} - 2\,n\,p^n + n\,p^{n+1}\right)}{(1-p)^2} \\
&= \frac{(n-1-2n)\,p^n + 1 + n\,p^{n+1}}{(1-p)^2} \\
&= \frac{n\,p^{n+1} - (n+1)\,p^n + 1}{(1-p)^2}
\end{aligned}
$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \geqslant 2,\ \sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1} = \frac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^2}}$$

□

b) En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p\,(1-p^n)}{1-p}$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question ***2.a)***, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
  La v.a.r. X_n est donc finie. Ainsi, X_n admet une espérance.
- De plus, par définition :

$$\begin{array}{rll}
& \mathbb{E}(X_n) & \\
= & \displaystyle\sum_{k \in X_n(\Omega)} k\ \mathbb{P}([X_n = k]) & \\
= & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\ \mathbb{P}([X_n = k])\right) + 0 \times \mathbb{P}([X_n = 0]) + n \times \mathbb{P}([X_n = n]) & \\
= & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\ p^k\ (1-p)\right) + n\ p^n & \textit{(d'après les questions } \textbf{\textit{2.b), 3.b)}}\textit{)} \\
= & (1-p)\ p\ \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k\ p^{k-1}\right) + n\ p^n & \\
= & \cancel{(1-p)}\ p\ \dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1}{(1-p)^{\cancel{2}}} + n\ p^n & \textit{(d'après la question précédente)} \\
= & p\ \left(\dfrac{(n-1)\,p^n - n\,p^{n-1} + 1 + n\ (1-p)\ p^{n-1}}{1-p}\right) & \\
= & p\ \left(\dfrac{\cancel{np^n} - p^n - \cancel{n\,p^{n-1}} + 1 + \cancel{n\,p^{n-1}} - \cancel{np^n}}{1-p}\right) & \\
= & p\ \left(\dfrac{1-p^n}{1-p}\right) &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \dfrac{p\,(1-p^n)}{1-p}}$$

□

6. a) Montrer, en utilisant la question 3a), que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) = p\left(\mathbb{E}\left(X_n^2\right) + 2\mathbb{E}(X_n) + 1\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Comme $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$, $X_n^2(\Omega) = \{k^2 \mid k \in [\![0, n]\!]\} \subset [\![0, n^2]\!]$.
  La v.a.r. X_n^2 est une v.a.r. finie. Ainsi, X_n^2 admet une espérance.
  Par le même raisonnement, la v.a.r. X_n^2 admet une espérance.

- D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(X_{n+1}^2) \\
= \ & \sum_{k \in X_{n+1}(\Omega)} k^2 \ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) \\
= \ & \sum_{k=0}^{n+1} k^2 \ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) \\
= \ & \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \ \mathbb{P}([X_{n+1} = k]) && \textit{(car } 0^2 \ \mathbb{P}([X_{n+1} = 0] = 0\textit{)} \\
= \ & \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \ p \ \mathbb{P}([X_n = k-1]) \ = \ p \sum_{k=1}^{n+1} k^2 \ \mathbb{P}([X_n = k-1]) && \textit{(d'après la question } \textbf{3.a)}\textit{)} \\
= \ & p \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 \ \mathbb{P}([X_n = k]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & p \left(\sum_{k=0}^{n} k^2 \ \mathbb{P}([X_n = k]) + 2 \sum_{k=0}^{n} k \ \mathbb{P}([X_n = k]) + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}([X_n = k]) \right) \\
= \ & p \left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2 \ \mathbb{E}(X_n) + 1 \right) && \textit{(par théorème de transfert, par définition de l'espérance et par la question } \textbf{3.c)}\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = p \left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2 \ \mathbb{E}(X_n) + 1 \right)}$$

□

b) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1) \dfrac{p^{n+1}}{1-p}$.

Montrer que $u_{n+1} = p \ u_n + \dfrac{p\,(1+p)}{1-p}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Par définition de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) + (2(n+1)-1) \frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= \mathbb{E}\left(X_{n+1}^2\right) + (2n+1) \frac{p^{n+2}}{1-p} \\
&= p \left(\mathbb{E}(X_n^2) + 2 \ \mathbb{E}(X_n) + 1 \right) + (2n+1) \frac{p^{n+2}}{1-p} && \textit{(d'après la question précédente)}
\end{aligned}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
p \ u_n &= p \ \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + p \ \ (2n-1) \frac{p^{n+1}}{1-p} \\
&= p \ \mathbb{E}\left(X_n^2\right) + (2n-1) \frac{p^{n+2}}{1-p}
\end{aligned}$$

- On obtient, par soustraction des deux lignes :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - p u_n & = & \cancel{p\,\mathbb{E}(X_n^2)} - \cancel{p\,\mathbb{E}(X_n^2)} + 2p\,\mathbb{E}(X_n) + p + ((\cancel{2n}+1) - (\cancel{2n}-1)) \dfrac{p^{n+2}}{1-p} \\[2mm] & = & 2p\, \dfrac{p(1-p^n)}{1-p} + p + 2\, \dfrac{p^{n+2}}{1-p} \qquad \textit{(d'après la question \textbf{5.b)})} \\[2mm] & = & p\, \dfrac{2p(1-p^n)}{1-p} + p\, \dfrac{1-p}{1-p} + p\, \dfrac{2p^{n+1}}{1-p} \\[2mm] & = & p\, \dfrac{2p(1-p^n) + (1-p) + 2p^{n+1}}{1-p} \\[2mm] & = & p\, \dfrac{2p - \cancel{2p^{n+1}} + 1 - p + \cancel{2p^{n+1}}}{1-p} \\[2mm] & = & p\, \dfrac{1+p}{1-p} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = p\ u_n + p\ \dfrac{1+p}{1-p}}$$

□

c) En déduire l'expression de u_n, puis celle de $\mathbb{E}\left(X_n^2\right)$ en fonction de p et n.

Démonstration.
D'après la formule trouvée dans la question précédente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

- L'équation de point fixe associée à la suite (u_n) est :

$$x = p\,x + \frac{p(1+p)}{1-p}$$

  Elle admet pour unique solution : $\lambda = \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2}$.

- On écrit :

$$\begin{array}{rcccccl} u_{n+1} & = & p & \times & u_n & + & \dfrac{p(1+p)}{1-p} \quad (L_1) \\[2mm] \lambda & = & p & \times & \lambda & + & \dfrac{p(1+p)}{1-p} \quad (L_2) \end{array}$$

$$\text{et donc} \quad u_{n+1} - \lambda \ = \ p \ \times \ (u_n - \lambda) \qquad (L_1)-(L_2)$$

  Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.

- La suite (v_n) est géométrique de raison p.
  Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n \ = \ p^n \times v_0 \ = \ p^n \times (u_0 - \lambda)$$

  On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \ = \ v_n + \lambda \ = \ p^n \times (u_0 - \lambda) + \lambda$$

- Enfin : $u_0 = \mathbb{E}(X_0^2) + (2\times 0 - 1)\dfrac{p^1}{1-p} = \mathbb{E}(0^2) - \dfrac{p}{1-p} = -\dfrac{p}{1-p}$.

- Ainsi : $u_0 - \lambda = -\dfrac{p}{1-p} - \dfrac{p(1+p)}{(1-p)^2} = \dfrac{-p(1-p)-p(1+p)}{(1-p)^2} = -p\dfrac{1-\cancel{p}+1+\cancel{p}}{(1-p)^2} = \dfrac{-2p}{(1-p)^2}$.
- On en conclut :

$$\begin{aligned} u_n &= p^n\ \frac{-2p}{(1-p)^2} + \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,(1+p-2p^n) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{p}{(1-p)^2}\,(1+p-2p^n)}$$

- Il reste à déterminer $\mathbb{E}(X_n^2)$. Par définition de u_n :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^2) &= u_n - (2n-1)\ \frac{p^{n+1}}{1-p} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,(1+p-2p^n) - (2n-1)\ \frac{p^{n+1}}{1-p} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,(1+p-2p^n) - (2n-1)(1-p)\ p^n\ \frac{p}{(1-p)^2} \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,((1+p-2p^n) - (2n-1)(1-p)\ p^n) \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,((1+p-2p^n) - (2n-1)(1-p)\ p^n) \end{aligned}$$

- Enfin :

$$-(2n-1)(1-p) = (2n-1)(p-1) = 2np - 2n - p + 1 = (1-2n) + (2n-1)p$$

- On en conclut :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^2) &= \frac{p}{(1-p)^2}\,\big(1+p-2p^n+(1-2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\big) \\ &= \frac{p}{(1-p)^2}\,\big(1+p+(-1-2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n^2) = \frac{p}{(1-p)^2}\,\big(1+p-(1+2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\big)}$$

□

d) Montrer enfin que : $\mathbb{V}(X_n) = \dfrac{p}{(1-p)^2}\,\big(1-(2n+1)\,p^n\,(1-p)-p^{2n+1}\big)$.

Démonstration.

- On a déjà vu en question ***6.a)*** que la v.a.r. X_n admet un moment d'ordre 2. Ainsi X_n admet une variance.

- D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(X_n) &= \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E}(X_n))^2 \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-(1+2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\right) - \left(\frac{p(1-p^n)}{1-p}\right)^2 \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+p-(1+2n)p^n+(2n-1)p^{n+1}\right) - \frac{p}{(1-p)^2}\, p(1-p^n)^2 \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1+\cancel{p}-(1+2n)p^n+(2n-1)p^{n+1} - p(\cancel{1}-2p^n+p^{2n})\right) \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1-(1+2n)p^n+(2n+1)p^{n+1}-p^{2n+1}\right) \\
&= \frac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)p^n(1-p)-p^{2n+1}\right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)p^n(1-p)-p^{2n+1}\right)}$$

$\square$

7. Dans cette question, on prend $p = \dfrac{1}{3}$.

a) En s'inspirant du programme de la question *4.*, écrire en **Scilab** une fonction `TrajectoireX` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie un vecteur `T` contenant les `n` premières abscisses du mobile.

Démonstration.

```
function X = TrajectoireX(n)
    X = zeros(1,n)
    for k = 1:(n-1)
        u = grand(1,1,'uin',0,2)
        if u==2 then
            X(k+1) = X(k) + 1
        else
            X(k+1) = 0
        end
    end
endfunction
```

$\square$

b) On considère le programme **Scilab** suivant :

```
n = input('Entrez un entier n : ')
N = 1000
T = zeros(N,n)
for i = 1:N
    T(i,:) = TrajectoireX(n)
end
E = zeros(1,n)
V = zeros(1,n)
for k = 1:n
    E(k) = mean(T(:,1:k))
    V(k) = variance(T(:,1:k))
end
subplot(1,2,1), plot(E,'+')
subplot(1,2,2), plot(V,'or')
```

Que représentent les vecteurs `E` et `V` ?

Démonstration.

- Vecteur `E` :
  Le vecteur `E` est un vecteur à `n` coordonnées.
  Soit $k \in [\![1, \texttt{n}]\!]$. La coordonnée $\texttt{E}(k)$ est la moyenne empirique des `N` trajectoires du mobile, jusqu'à l'instant k.

  `E` représente donc une approximation de $\mathbb{E}(X_k)$.

- Vecteur `V` :
  Le vecteur `V` est un vecteur à `n` coordonnées.
  Soit $k \in [\![1, \texttt{n}]\!]$. La coordonnée $\texttt{V}(k)$ est la moyenne empirique des `N` trajectoires du mobile, jusqu'à l'instant k.

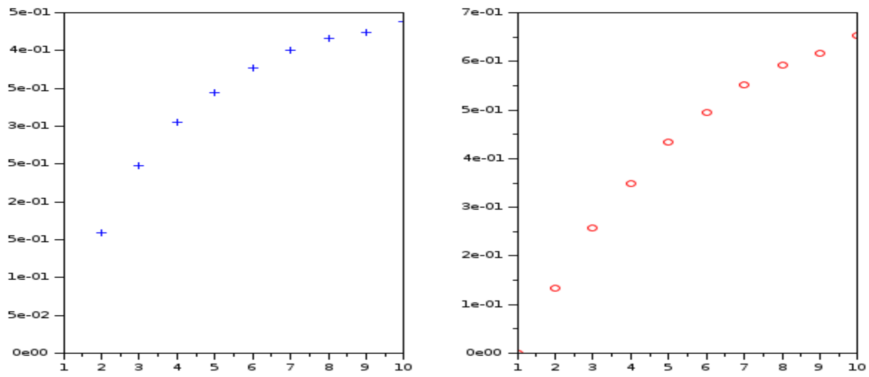
  `V` représente donc une approximation de $\mathbb{V}(X_k)$.

Remarque
Ce qui justifie le fait que la moyenne **empirique** des `N` trajectoires fournit bien une approximation de la moyenne **théorique** $\mathbb{E}(X_k)$, c'est la loi faible des grands nombres.

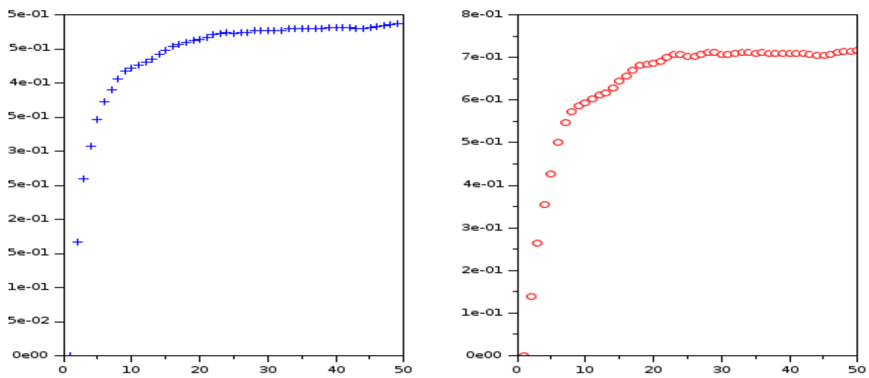
□

c) Le programme précédent nous permet d'obtenir les graphiques suivants pour différentes valeurs de `n` :

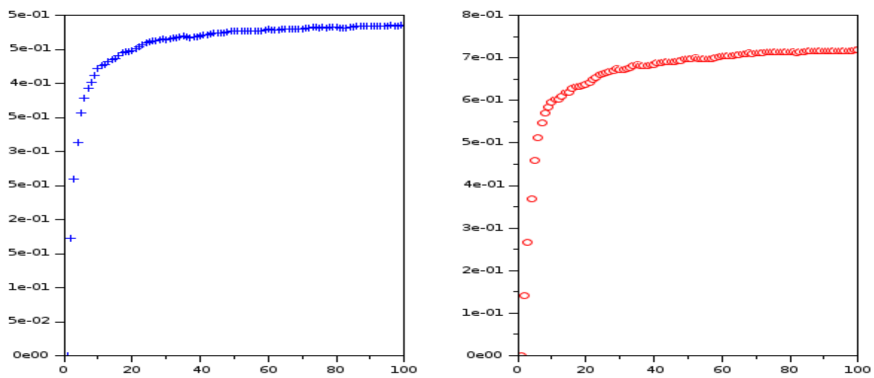
`n`$=10$



`n`$=50$



`n`$=100$



Expliquer ces graphiques à l'aide des questions ***5.*** et ***6.***.

Démonstration.

- D'après la loi faible des grands nombres, `E` est une approximation de $\mathbb{E}(X_n)$, donc les graphiques bleus ci-dessus montrent l'évolution de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n croît.
  Donc, on peut deviner sur ces graphiques $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.
- Comme $p = \dfrac{1}{3}$, d'après la question ***5.***, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{p(1-p^n)}{1-p} = \dfrac{p}{1-p} = \dfrac{1}{2}$

$$\boxed{\text{Les graphiques de gauche illustrent le résultat } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{2}.}$$

- D'après la loi faible des grands nombres, `V` est une approximation de $\mathbb{V}(X_n)$, donc les graphiques rouges ci-dessus montrent l'évolution de $\mathbb{V}(X_n)$ quand n croît.
  Donc, on peut deviner sur ces graphiques $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n)$.
- Comme $p = \dfrac{1}{3}$, d'après la question ***6.*** :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{p}{(1-p)^2}\left(1-(2n+1)p^n(1-p)-p^{2n+1}\right) = \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\text{Les graphiques de droite illustrent le résultat } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(X_n) = \frac{3}{4}.}$$

□

Exercice 3 : EDHEC 2009

Dans cet exercice, p désigne un réel de $]0,1[$ et on note $q = 1 - p$.
On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes deux la même loi géométrique de paramètre p.

1. On pose $Z = \inf(X, Y)$ et on admet que Z est une variable aléatoire, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On rappelle que, pour tout entier naturel k, on a l'égalité : $[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$.

a) Pour tout entier naturel k, calculer $\mathbb{P}([Z > k])$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- D'après l'énoncé :
$$[Z > k] = [X > k] \cap [Y > k]$$
Par application de $\mathbb{P}$, on obtient :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z > k]) & = & \mathbb{P}([X > k] \cap [Y > k]) & \\ & = & \mathbb{P}([X > k]) \times \mathbb{P}([Y > k]) & \textit{(car les v.a.r. } X \textit{ et } Y \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & (\mathbb{P}([X > k]))^2 & \textit{(car les v.a.r. } X \textit{ et } Y \textit{ ont même loi)} \\ & = & (1 - \mathbb{P}([X \leqslant k]))^2 & \end{array}$$
- Or, comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$:
$$[X \leqslant k] = \bigcup_{i=1}^{k} [X = i]$$
La famille $([X = i])_{i \in [\![1,k]\!]}$ est consitituée d'événements incompatibles. On obtient donc :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} [X = i]\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}([X = i]) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} p\ (1-p)^{i-1} & \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\ & = & p \sum\limits_{i=1}^{k} (1-p)^{i-1} \ = \ p \sum\limits_{i=0}^{k-1} (1-p)^{i} & \\ & = & p \dfrac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} \ = \ \cancel{p} \dfrac{1-(1-p)^k}{\cancel{p}} & \\ & = & 1 - (1-p)^k & \end{array}$$
- En remplaçant dans $\mathbb{P}([Z > k])$, on obtient :
$$\mathbb{P}([Z > k]) = \left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - (1-p)^k\right)\right)^2 = \left((1-p)^k\right)^2 \ = \ (1-p)^{2k}$$
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([Z > k]) = q^{2k}}$$

Remarque
On aurait pu directement décomposer l'événement $[X > k]$.
Cela aurait donné la démonstration suivante. Tout d'abord :

$$[X > k] = \bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X = i]$$

La famille $([X = i])_{i \geqslant k+1}$ est consitituée d'événements incompatibles. On obtient donc :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X > k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=k+1}^{+\infty} [X = i]\right) & \\
& = & \sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = i]) & \\
& = & \sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} p\ (1-p)^{i-1} & \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
& = & p \sum\limits_{i=k+1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} \ = \ p \sum\limits_{i=k}^{+\infty} (1-p)^{i} & \\
& = & p \times p^k \ \dfrac{1}{1-(1-p)} \ = \ \cancel{p} \dfrac{(1-p)^k}{\cancel{p}} & \\
& = & (1-p)^k &
\end{array}$$

Les manipulations sur les sommes infinies sont ici licites car ces sommes représentent des probabilités d'événements. Les séries associéees sont donc convergentes. □

b) Établir que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1, on a :

$$\mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k])$$

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$.

- Tout d'abord :
$$[Z \geqslant k] = [Z > k] \cup [Z = k]$$
De plus, comme Z est à valeurs entières : $[Z \geqslant k] = [Z > k-1]$. Ainsi :
$$[Z > k-1] = [Z > k] \cup [Z = k]$$
- Les événements $[Z > k]$ et $[Z = k]$ sont incompatibles. On a donc :
$$\mathbb{P}([Z > k-1]) = \mathbb{P}([Z > k] \cup [Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k]) + \mathbb{P}([Z = k])$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k])}$$

Remarque
L'égalité entre événements suivante :

$$[Z > k-1] = [Z > k] \cup [Z = k]$$

est valable pour toute variable à valeurs entières. Elle est extrêmement classique et utile dans les sujets. On s'efforcera donc de la retenir. □

c) En déduire que Z suit la loi géométrique de paramètre $(1-q^2)$.

Démonstration.

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car les v.a.r. X et Y suivent une loi géométrique.
  Comme $Z = \inf(X, Y)$, on a alors : $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}([Z=k]) & = & \mathbb{P}([Z>k-1]) - \mathbb{P}([Z>k]) & \textit{(question } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)} \\ & = & q^{2(k-1)} - q^{2k} & \textit{(question } \textbf{\textit{1.a)}}\textit{)} \\ & = & q^{2k-2} - q^{2k} \;=\; q^{2k-2}\left(1-q^2\right) & \\ & = & (q^2)^{k-1}(1-q^2) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } Z \text{ suit la loi géométrique de paramètre } (1-q^2).}$$

□

2. On définit la variable aléatoire T de la façon suivante :
Pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel pair, on pose $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2}$,
et, pour tout ω de Ω tel que $X(\omega)$ est un entier naturel impair, on pose $T(\omega) = \dfrac{1+X(\omega)}{2}$.
On admet que T est une variable aléatoire, elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Montrer que T prend des valeurs entières non nulles.

Démonstration.
Soit $\omega \in \Omega$. Alors $X(\omega) \in X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Deux cas se présentent alors :

- si $X(\omega)$ est un entier pair : alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $X(\omega) = 2k$.
  On note au passage que $k \neq 0$ car $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, donc $0 \notin X(\Omega)$.
  Alors $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)}{2} = \dfrac{2k}{2} = k$, donc $T(\omega)$ est un entier naturel non nul.
- si $X(\omega)$ est un entier impair : alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $X(\omega) = 2k+1$.
  Alors $T(\omega) = \dfrac{X(\omega)+1}{2} = \dfrac{2k+2}{2} = k+1$, donc $T(\omega)$ est un entier naturel non nul.

$$\boxed{T \text{ prend des valeurs entiers non nulles : } T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*.}$$

□

b) Réciproquement, justifier que tout entier naturel k non nul est élément de $T(\Omega)$ et en déduire que $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et que $2k \in \mathbb{N}^*$, alors il existe $\omega \in \Omega$ tel que : $X(\omega) = 2k$.
  Dans ce cas :
  $$T(\omega) = \frac{X(\omega)}{2} = \frac{2k}{2} = k$$
  Et ainsi, $k = T(\omega) \in T(\Omega)$.
  $$\boxed{\text{Tout entier naturel non nul est élément de } T(\Omega) \text{ ainsi : } \mathbb{N}^* \subset T(\Omega).}$$
- Or, d'après la question ***2.a)***, $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{On en conclut que : } T(\Omega) = \mathbb{N}^*.}$$

□

c) Exprimer l'événement $[T = k]$ en fonction de certains événements $[X = i]$ puis montrer que T suit la même loi que Z.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
L'événement $[T = k]$ est réalisé :

× si l'événement $[X = 2k]$ est réalisé.
En effet, pour tout $\omega \in [X = 2k]$, $X(\omega)$ est paire, et alors :

$$T(\omega) = \frac{X(\omega)}{2} = \frac{2k}{2} = k$$

× ou si l'événement $[X = 2k - 1]$ est réalisé.
En effet, pour tout $\omega \in [X = 2k - 1]$, $X(\omega)$ est impaire, et alors :

$$T(\omega) = \frac{X(\omega) + 1}{2} = \frac{2k - \cancel{1} + \cancel{1}}{2} = k$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ [T = k] = [X = 2k] \cup [X = 2k - 1]}$$

- On rappelle que : $T(\Omega) = \mathbb{N}^* = \mathbb{Z}(\Omega)$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Les événements $[X = 2k]$ et $[X = 2k - 1]$ sont incompatibles. On en déduit que :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([T = k]) & = & \mathbb{P}([X = 2k] \cup [X = 2k - 1]) & \\
& = & \mathbb{P}([X = 2k]) + \mathbb{P}([X = 2k - 1]) & \\
& = & q^{2k-1}\ p + q^{2k-2}\ p & \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
& = & q^{2k-2}\ (qp + p) \ = \ q^{2k-2}\ (q(1-q) + (1-q)) & \\
& = & (q^2)^{k-1}\ (1 - q^2) & \\
& = & \mathbb{P}([Z = k]) &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } T \text{ suit bien la même loi que } Z.}$$

□

3. On rappelle que la fonction `rand` renvoie de façon uniforme un réel aléatoire élément de $[0, 1[$.
Par ailleurs, la commande `modulo(x,2)` permet de tester si `x` est pair. Plus précisément :

× `x` est pair si et seulement si `modulo(x,2)` vaut 0,

× `x` est impair si et seulement si `modulo(x,2)` vaut 1.

Compléter le programme suivant pour que, d'une part, il simule les lancers d'une pièce donnant « pile » avec la probabilité p et calcule la valeur prise par la variable aléatoire X égale au rang du premier « pile » obtenu lors de ces lancers (X suit bien la loi géométrique de paramètre p) et pour que, d'autre part, il calcule et affiche la valeur prise par T, la variable aléatoire T ayant été définie dans la deuxième question.

```
1  x = 1
2  lancer = rand()
3  while lancer <= 1-p
4      x = ...........
5      lancer = rand()
6  end
7  if modulo(x,2) == 0 then
8      ............
9  else
10     ............
11 end
12 disp(t)
```

Démonstration.

- La variable `lancer` contient les appels successifs à la fonction `rand`.
  Or, la fonction `rand` permet de simuler une v.a.r. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$.
  Ainsi, à chaque tour de boucle, le test `lancer <= 1-p` est réussi avec une probabilité :

$$\mathbb{P}([0 \leqslant U \leqslant 1 - p]) = 1 - p$$

  Le succès de ce test correspond donc à l'échec d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.
  Inversement, l'échec de ce test correspond au succès d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

- À chaque tour de boucle, la variable `x` est incrémentée (de 1) lorsque le test est réussi.
  Autrement dit, à chaque échec d'une nouvelle épreuve de Bernoulli de paramètre p.
  On sort de la boucle lors du premier échec du test *i.e.* lors du premier succès de l'expérience. de l'épreuve de Bernoulli. Ainsi, la variable `x` contient, en sortie de boucle, le rang d'apparition du premier succès.

  $\boxed{\text{La variable } \texttt{x} \text{ permet de simuler la v.a.r. } X.}$

- On souhaite que `t` simule la v.a.r. T. Donc :
  × si `x` est pair, alors `t` doit recevoir `x/2`.
  × si `x` est impair, alors `t` doit recevoir `(1+x)/2`

  Il fallait donc modifier les lignes comme suit.

```
4      x = x + 1
```

```
7  if modulo(x,2) == 0 then
8      t = x/2
9  else
10     t = (1 + x)/2
```

Remarque

- On a traduit ici en **Scilab** une question qui était posée à l'époque en Turbo-Pascal, langage qui ne dispose pas d'une fonction de type `grand`.
- En réalité, on aurait pu remplacer les 6 premières lignes du programme par : `x = grand(1,1,geom,p)`, ce qui correspond aux attentes du programme actuel. □

Exercice 4 : ESSEC-II 2016

Le but du problème est d'étudier le renouvellement d'un des composants d'un système complexe (une machine, un réseau de distribution d'énergie etc...) formé d'un assemblage de différentes pièces susceptibles de tomber en panne. On s'intéresse donc à une de ces pièces susceptibles de se casser ou de tomber en panne et on se place dans la situation idéale où dès que la pièce est défectueuse, elle est immédiatement remplacée. Dans une première partie, on étudie quelques propriétés fondamentales des variables aléatoires discrètes. Puis, dans une deuxième partie, on étudie la probabilité de devoir changer la pièce un certain jour donné. Enfin, dans une troisième partie on cherche à estimer le temps de fonctionnement du système avec un certain nombre de pièces de rechange à disposition.
Dans tout le problème, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire réelle X définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X et $\mathbb{V}(X)$ sa variance.
La deuxième partie peut être traitée en admettant si besoin les résultats de la première partie.

Première partie

Dans cette première partie, on étudie les propriétés asymptotiques d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. a) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j])$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons tout d'abord :
$$[X > j] \ \cup \ [X = j] \ = \ [X \geqslant j]$$
Or, comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$: $[X > j-1] = [X \geqslant j]$.
- On obtient alors :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X > j-1]) &= \mathbb{P}([X > j] \ \cup \ [X = j]) \\ &= \mathbb{P}([X > j]) + \mathbb{P}([X = j]) \quad \textit{(car } [X > j] \textit{ et } [X = j] \textit{ sont incompatibles)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En réordonnant, on obtient : } \forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = j]) = \mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j]).}$$

Remarque

- Dans cette démonstration, on met en place une méthode classique de raisonnement :
  (i) on commence par une étape de décomposition de l'événement,
  (ii) puis on applique la fonction $\mathbb{P}$ de part et d'autre.
  Il faut prendre le réflexe de raisonner sur les événements avant d'appliquer la fonction $\mathbb{P}$.
- La formule énonce une différence entre de probabilités d'événements. Après réordonnement, on obtient une somme. Il faut donc penser à une décomposition d'événement à l'aide d'une union. Si on ne réordonne pas les différents membres de l'égalité, on peut aussi penser à une décomposition à l'aide d'une différence ensembliste. Pour cela on remarque que, comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:
$$[X > j-1] \setminus [X > j] = [X = j]$$
Ainsi :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = j]) &= \mathbb{P}([X > j-1] \ \setminus \ [X > j]) \\ &= \mathbb{P}([X > j-1]) \ - \ \mathbb{P}([X > j-1] \ \cap \ [X > j]) \\ &= \mathbb{P}([X > j-1]) \ - \ \mathbb{P}([X > j]) \qquad \textit{(car } [X > j] \subset [X > j-1]\textit{)} \end{aligned}$$
$\square$

b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\sum_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X=j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - p\,\mathbb{P}([X>p])$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente :

$$j\ \mathbb{P}([X=j]) = j\ \mathbb{P}([X>j-1]) - j\ \mathbb{P}([X>j])$$

- Ainsi, on obtient en sommant :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) \\
= \ & \sum_{j=1}^{p} \left(j\ \mathbb{P}([X>j-1]) - j\ \mathbb{P}([X>j])\right) \\
= \ & \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X>j-1]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X>j]) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & \sum_{j=0}^{p-1} (j+1)\ \mathbb{P}([X>j]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X>j]) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
= \ & \sum_{j=0}^{p-1} j\ \mathbb{P}([X>j]) + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X>j]) && \textit{(par linéarité)} \\
= \ & 0 \times \mathbb{P}([X>j]) + \cancel{\sum_{j=1}^{p-1} j\ \mathbb{P}([X>j])} + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - \left(\cancel{\sum_{j=1}^{p-1} j\ \mathbb{P}([X>j]} + p\ \mathbb{P}([X>p])\right) \\
= \ & \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - p\ \mathbb{P}([X>p])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) - p\ \mathbb{P}([X>p])}$$

Remarque
La démonstration consiste à démontrer un résultat de type somme télescopique.
On pouvait faire apparaître directement une telle somme en remarquant :

$$j\ \mathbb{P}([X=j]) = (j-1)\ \mathbb{P}([X>j-1]) - j\ \mathbb{P}([X>j]) + \mathbb{P}([X>j-1])$$

Ainsi, par sommation et linéarité :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) &= \sum_{j=1}^{p} \Big((j-1)\ \mathbb{P}([X>j-1]) - j\ \mathbb{P}([X>j])\Big) + \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}([X>j-1]) \\
&= \cancel{(1-1)\ \mathbb{P}([X>1-1])} - p\ \mathbb{P}([X>p]) + \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}([X>j-1]) \\
&= -p\ \mathbb{P}([X>p]) + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) \qquad \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

□

2. a) On suppose que X admet une espérance $\mathbb{E}(X) = \mu$.

i. Justifier la convergence de la série de terme général $k\,\mathbb{P}([X = k])$.

Démonstration.
La variable aléatoire X est à valeur dans $\mathbb{N}^*$.
Ainsi, elle admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} n\ \mathbb{P}([X = n])$ est absolument convergente. Or, d'après l'énoncé, X admet une espérance.

$$\boxed{\text{On en déduit que la série de terme général } k\,\mathbb{P}([X = k]) \text{ est absolument convergente et donc convergente.}}$$ □

ii. Montrer que :

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([X = k]) = 0$$

Démonstration.

- La série de terme général $k\,\mathbb{P}([X = k])$ étant convergente, on obtient, par « relation de Chasles » :
$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^{p} k\ \mathbb{P}([X = k]) + \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k])$$
Ainsi, en réordonnant :
$$\sum_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) - \sum_{k=1}^{p} k\ \mathbb{P}([X = k])$$

- Par passage à la limite dans cette égalité :

$$\begin{aligned} \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) &= \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) - \lim_{p\to+\infty} \sum_{k=1}^{p} k\ \mathbb{P}([X = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) - \sum_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X = k]) \ = \ 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}([X = k]) = 0}$$

Remarque
Cette question est l'illustration d'un résultat classique du chapitre sur les séries.
Considérons une série $\sum\ u_n$ convergente et notons S sa somme.
On définit alors son reste d'ordre n par : $R_n = S - S_n$. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty} R_n \ = \ \lim_{n\to+\infty} S - \lim_{n\to+\infty} S_n \ = \ S - S \ = \ 0$$

On retrouve le résultat précédent en remarquant : $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

□

iii. En déduire que :

$$\lim_{p\to+\infty} p\ \mathbb{P}([X>p]) = 0$$

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$[X>p] \ = \ \bigcup_{k=p+1}^{+\infty} [X=k]$$

  Ainsi :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X>p]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=p+1}^{+\infty} [X=k]\right) & \\ & = & \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) & \begin{array}{l}\textit{(car les événements } [X=k] \\ \textit{sont deux à deux incompatibles)}\end{array} \end{array}$$

- On en déduit :

$$0 \ \leqslant \ p\ \mathbb{P}([X>p]) \ = \ \sum_{k=p+1}^{+\infty} p\ \mathbb{P}([X=k]) \ \leqslant \ \sum_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X=k])$$

- Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{p\to+\infty} \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X=k])$, on en déduit, par le théorème d'encadrement que la suite $\left(\sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} p\ \mathbb{P}([X=k])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite nulle.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{p\to+\infty} p\ \mathbb{P}([X>p]) = 0.}$$

Remarque
Cette question illustre de nouveau la méthode évoquée en question ***1.a)***. Le résultat porte sur la quantité $p\mathbb{P}([X>p])$. Pour l'obtenir, on commence par décomposer de l'événement $[X>p]$ puis on appliquer la fonction $\mathbb{P}$.
□

iv. Montrer que la série de terme général $\mathbb{P}([X>j])$ converge.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***1.b)*** :

$$\sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j]) = \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j]) - p\ \mathbb{P}([X>p])$$

La suite $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X=j])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie d'après la question ***2.a)i.*** et il en est de même de la suite $\Big(p\ \mathbb{P}([X>p])\Big)_{p\in\mathbb{N}^*}$ d'après la question précédente.
Ainsi, la suite $\left(\sum\limits_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X>j])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \mathbb{P}([X>j]) \text{ converge.}}$$

□

v. Montrer que : $\mu = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.

Démonstration.
Par passage à la limite dans l'égalité précédente :

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = \lim_{p\to+\infty} \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j]) - \lim_{p\to+\infty} p\ \mathbb{P}([X > p]) \ = \ \mu - 0 \ = \ \mu$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mu = \lim_{p\to+\infty} \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j]).}$$

□

b) On suppose que $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$ converge.

i. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p\geqslant 1}$ définie par :

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j])$$

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

$$v_{p+1} - v_p \ = \ \sum_{j=0}^{p} \mathbb{P}([X > j]) - \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) \ = \ \mathbb{P}([X > p]) \ \geqslant \ 0$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_p)_{p\geqslant 1} \text{ est croissante.}}$$

□

ii. Comparer $\sum\limits_{j=1}^{p} j\,\mathbb{P}([X = j])$ et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$.

Démonstration.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***1.b)*** :

$$\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j]) \ = \ \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) - p\ \mathbb{P}([X > p]) \ \leqslant \ \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = v_p$$

- La série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ étant convergente, on obtient, par « relation de Chasles » :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j]) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) + \sum_{j=p}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$$

  En réordonnant, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{p-1} \mathbb{P}([X > j]) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j]) - \sum_{j=p}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j]) \ \leqslant \ \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j]) \ \leqslant \ \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])}$$

Remarque

- On a vu dans la question précédente que la suite $(v_p)_{p\geqslant 1}$ est croissante. On sait de plus qu'elle est convergente (c'est l'hypothèse faite en début de question ***2.a)***).
  L'esprit de l'énoncé semble donc être d'utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(v_n) \text{ croissante} \\ v_n \to \ell\end{array}\right\} \Rightarrow \ \forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant \ell}$$

- Ce résultat est immédiat si l'on connaît la notion de borne supérieure d'une suite : sous réserve d'existence, le plus petit des majorants de la suite. La démonstration du théorème de convergence monotone établit qu'une suite croissante majorée converge vers sa borne supérieure. Si l'on connaît cette démonstration, le résultat encadré ci-dessus est immédiat.
- Cependant, le programme officiel stipule que cette démonstration est hors programme, tout comme la notion de borne supérieure. Il est toutefois possible de démontrer ce résultat sans utiliser la notion de borne supérieure. Détaillons une démonstration possible.

  On suppose par l'absurde que :

  × la suite (u_n) croissante,

  × la suite (u_n) convergente vers ℓ,

  × et que `NON`$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell)$ est vérifiée.
    Autrement dit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell$.

La suite (u_n) étant croissante, on a :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant u_{n_0}$$

Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant u_{n_0}$.
En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors : $\ell \geqslant u_{n_0} > \ell$.
Ce qui est absurde ! □

iii. En déduire que X admet une espérance.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\ j\ \mathbb{P}([X = j])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- La suite $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{j=1}^{p+1} j\ \mathbb{P}([X = j]) - \sum_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j]) = (p+1)\ \mathbb{P}([X = p+1])\ \geqslant\ 0$$

- Elle est de plus majorée par $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > j])$ d'après la question précédente.

Ainsi, la suite $\left(\sum\limits_{j=1}^{p} j\ \mathbb{P}([X = j])\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X \text{ admet une espérance.}}$$

□

c) Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge.

Démonstration.

- En question ***2.a)***, on a démontré que si X admet une espérance, alors la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ est convergente (résultat de la question ***2.a)iv.***).
- En question ***2.b)***, on a démontré que si la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ est convergente alors X admet une espérance (résultat de la question ***2.a)iii.***).

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance si et seulement si la série de terme général } \mathbb{P}([X > j]) \text{ converge.}}$$

□

3. On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait :

$$\mathbb{P}([X > j]) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \qquad (*)$$

a) Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que la suite $\Big(\mathbb{P}([X = j])\Big)_{j\in\mathbb{N}^*}$ définie par $(*)$ vérifie :

(i) $\forall j \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X = j]) \geqslant 0$,

(ii) $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = j]) = 1$.

- Soit $j \in \mathbb{N}^*$. D'après la question ***1.a)*** :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = j]) &= \mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j]) \\ &= \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} \ \geqslant \ 0 \end{aligned}$$

  En effet, $j+1 \geqslant j$ et il suffit alors d'appliquer de part et d'autre la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$, décroissante sur $]0,+\infty[$.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît une somme télescopique :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}([X = j]) &= \sum_{j=1}^{p} \big(\mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j])\big) \\ &= \mathbb{P}([X > 0]) - \mathbb{P}([X > p]) \ = \ \frac{1}{1^\alpha} - \frac{1}{(p+1)^\alpha} \\ &= 1 - \frac{1}{(p+1)^\alpha} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

  En effet, $(p+1)^\alpha \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car $\alpha > 0$.

$$\boxed{\text{La relation } (*) \text{ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans } \mathbb{N}^*.}$$

□

b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.

Démonstration.

- D'après la question ***2.c)***, la v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge.
- $\times$ $\mathbb{P}([X > j]) = \dfrac{1}{(j+1)^\alpha} \underset{j\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{j^\alpha}$ $(\geqslant 0)$

  $\times$ La série $\sum\limits_{j\geqslant 1} \dfrac{1}{j^\alpha}$ est une série de Riemann d'exposant α.
  Elle est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

  Ainsi, d'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série de terme général $\mathbb{P}([X > j])$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance si et seulement si } \alpha > 1.}$$

□

c) Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X = j]) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)$$

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Comme on l'a vu en question ***3.a)*** :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X = j]) & = & \mathbb{P}([X > j-1]) - \mathbb{P}([X > j]) \\ & = & \dfrac{1}{j^\alpha} - \dfrac{1}{(j+1)^\alpha} \\ & = & \dfrac{1}{j^\alpha}\left(1 - \dfrac{j^\alpha}{(j+1)^\alpha}\right) \end{array}$$

Il suffit alors de remarquer :

$$\frac{j^\alpha}{(j+1)^\alpha} = \left(\frac{j}{j+1}\right)^\alpha = \left(\frac{\cancel{j}}{\cancel{j}}\ \frac{1}{1+\frac{1}{j}}\right)^\alpha = \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}$$

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X = j]) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right)}$$

□

d) i. Étudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0, 1]$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto (1+x)^{-\alpha}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ car c'est l'inverse de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, et qui ne s'annule pas sur $[0, 1]$. Ainsi, f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
- Soit $x \in [0, 1]$.

$$f'(x) \ = \ \alpha\ (1+x)^{-\alpha-1} - \alpha \ = \ \alpha\ \left(\frac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} - 1\right) \ = \ \alpha\ \frac{1-(1+x)^{\alpha+1}}{(1+x)^{\alpha+1}}$$

Comme $x \geqslant 0$:

$$1 + x \geqslant 1$$

$$\text{donc} \quad (1+x)^{\alpha+1} \geqslant 1 \qquad \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto x^\alpha\textit{)}$$

Ainsi $(1+x)^{\alpha+1} > 0$ et $1 - (1+x)^{\alpha+1} \leqslant 0$.
On en déduit que : $f'(x) \leqslant 0$ avec égalité seulement si $x = 0$.

- On en déduit le tableau de variation suivant.

x	0 $\qquad\qquad$ 1
Signe de $f'(x)$	$-$
Variations de f	0 $\searrow$ $1-\alpha-\frac{1}{2^\alpha}$

□

ii. Montrer que pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([X=j]) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}$$

Démonstration.

- D'après la question qui précède, la fonction f est décroissante sur $[0,1]$. Ainsi :

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) \ \leqslant\ f(0) = 0$$

- On en déduit :

$$\forall x \in [0,1],\quad \underset{\displaystyle 1-\frac{1}{(1+x)^\alpha}}{\underset{\shortparallel}{1-(1+x)^{-\alpha}}} \quad \leqslant \quad \alpha\ x$$

- Soit $j \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la formule à $x = \dfrac{1}{j} \in [0,1]$, on obtient :

$$1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha} \ \leqslant\ \alpha\ \frac{1}{j}$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{j^\alpha}\left(1-\frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right) \ \leqslant\ \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}} \qquad \textit{(car } \tfrac{1}{j^\alpha} \geqslant 0\textit{)}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall j \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([X=j]) \leqslant \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}.}$$

□

e) Montrer, en utilisant le résultat de ***3.c)***, que :

$$\lim_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}\,\mathbb{P}([X=j]) = \alpha$$

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto (1+x)^{-\alpha}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
Elle admet donc un développement limité au voisinage de 0.
Ainsi, il existe une fonction ε définie dans un voisinage de 0, telle que, au voisinage de 0 :

$$(1+x)^{-\alpha} \ =\ 1-\alpha\ x + x\ \varepsilon(x)$$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

- Comme $\frac{1}{j} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut appliquer l'égalité précédente à $x = \frac{1}{j}$ pour j dans un voisinage de $+\infty$. On obtient :

$$\begin{array}{lrcl}
 & \left(1+\dfrac{1}{j}\right)^{-\alpha} & = & 1-\alpha\,\dfrac{1}{j}+\dfrac{1}{j}\,\varepsilon\left(\dfrac{1}{j}\right) \\
\text{ainsi} & 1-\left(1+\dfrac{1}{j}\right)^{-\alpha} & = & \alpha\,\dfrac{1}{j}-\dfrac{1}{j}\,\varepsilon\left(\dfrac{1}{j}\right) \\
\text{puis} & \dfrac{1}{j^{\alpha}}\left(1-\left(1+\dfrac{1}{j}\right)^{-\alpha}\right) & = & \dfrac{1}{j^{\alpha}}\left(\alpha\,\dfrac{1}{j}-\dfrac{1}{j}\,\varepsilon\left(\dfrac{1}{j}\right)\right) \\
\text{enfin} & j^{\alpha+1}\,\mathbb{P}([X=j]) & = & \alpha-\varepsilon\left(\dfrac{1}{j}\right)
\end{array}$$

(par multiplication de part et d'autre par $j^{\alpha+1}$)

- Enfin, par théorème de composition de limites :

$$\lim_{j\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{j}\right) = \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \lim_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}\,\mathbb{P}([X=j]) = \alpha.}$$

Remarque

- À l'aide de l'inégalité de la question précédente, on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*,\ j^{\alpha+1}\,\mathbb{P}([X=j]) \leqslant \alpha$$

Il est donc assez naturel d'envisager un raisonnement par encadrement. Il faudrait pour cela tenter d'obtenir le même type d'inégalité à gauche. L'énoncé écarte cette possibilité : le concepteur renvoie à la question ***3.c)*** et non pas à la question ***3.d)***.

- Cette question est une nouvelle fois aux limites du programme officiel. Il stipule en effet que « Les seuls développements exigibles concernent les fonctions $x \mapsto e^x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^{\alpha}$ au voisinage de 0, et à l'ordre 1 ou 2 uniquement. Aucune connaissance (somme, produit, composition ...) concernant les techniques de calcul des développements limités n'est exigible. »
On préfère dans la démonstration revenir à la définition de base de la notion de développement limité à l'aide d'une fonction ε. Ceci permet de s'affranchir des manipulations des $\underset{x\to 0}{o}(\ldots)$ et $\underset{j\to+\infty}{o}(\ldots)$ et de s'assurer que la démonstration utilise bien seulement les attendus du programme. □

f) Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance si et seulement si la série $\sum j^2\,\mathbb{P}([X=j])$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- D'après la question précédente : $\lim\limits_{j\to+\infty} j^{\alpha+1}\,\mathbb{P}([X=j]) = \alpha \neq 0$. On en déduit :

$$\begin{array}{lrcl}
 & j^{\alpha+1}\,\mathbb{P}([X=j]) & \underset{j\to+\infty}{\sim} & \alpha \\
\text{donc} & j^{2}\,\mathbb{P}([X=j]) & \underset{j\to+\infty}{\sim} & \alpha\,j^{1-\alpha} = \alpha\,\dfrac{1}{j^{\alpha-1}}
\end{array}$$

(par multiplication par $j^{1-\alpha} \neq 0$)

- × $j^2\ \mathbb{P}([X=j]) = \alpha\ \dfrac{1}{j^{\alpha-1}}\ (\geqslant 0)$

  × La série $\sum\limits_{j\geqslant 1} \dfrac{1}{j^{\alpha-1}}$ est une série de Riemann d'exposant $\alpha - 1$.
  Elle est donc convergente si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ *i.e.* si $\alpha > 2$.

  Ainsi, par le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\ j^2\ \mathbb{P}([X=j])$ est convergente si et seulement si $\alpha > 2$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X \text{ admet une variance si et seulement si } \alpha > 2.}$$

□

Deuxième partie : Étude de la probabilité de panne un jour donné.

Dans cette deuxième partie, on suppose donnée une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\geqslant 1}$ mutuellement indépendantes et de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
Pour tout entier i non nul, X_i représente la durée de vie en jours du $i^{\text{ème}}$ composant en fonctionnement. Soit k un entier naturel non nul. On note $T_k = X_1 + ... + X_k$. T_k représente donc le jour où le $k^{\text{ème}}$ composant tombe en panne. On fixe un entier naturel n non nul représentant un jour donné et on considère l'événement A_n : « le composant en place le jour n tombe en panne » c'est-à-dire A_n : « il existe k entier naturel non nul tel que $T_k = n$ », et on se propose d'étudier $\mathbb{P}(A_n)$.

4. Pour tout entier naturel non nul j, on note $p_j = \mathbb{P}([X_1 = j])$ et $u_j = \mathbb{P}(A_j)$. On suppose que pour tout entier naturel non nul j, on a $p_j \neq 0$. On pose de plus par convention $u_0 = 1$.

a) Montrer que : $u_1 = p_1$.

Démonstration.

- L'événement $[X_1 = 1]$ est réalisé si le premier composant en place tombe en panne le jour 1.
  L'événement A_1 est réalisé si le composant en place le jour 1 tombe en panne lors de ce jour.
- Les variables X_i sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Ceci signifie en particulier que chaque composant à une durée de vie d'au moins un jour. Ainsi, le seul composant en place le jour 1 est le premier composant. On en déduit :

$$[X_1 = 1] \ = \ A_1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } p_1 = \mathbb{P}([X_1 = 1]) = \mathbb{P}(A_1) = u_1.}$$

Remarque

- Encore une fois, le raisonnement a lieu initialement sur les événements.
  On n'applique la fonction $\mathbb{P}$ que dans un deuxième temps.
- Il est fortement conseillé de prendre le temps de lire scrupuleusement l'énoncé. La méthode de remplacement des composants est énoncée seulement en début de problème. Il faut donc se reporter au paragraphe introductif lors de la résolution de cette deuxième partie. Par ailleurs, l'information concernant la durée de vie de chaque composant n'est pas explicitement mentionné : c'est un résultat à extraire de la définition des v.a.r. X_i.

□

b) i. Montrer que : $A_2 = [X_1 = 2] \ \cup \ ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$.

Démonstration.
Par définition, l'événement A_2 est réalisé si le composant en place le jour 2 tombe en panne lors de ce jour. Il reste alors à déterminer quel composant est en place lors du deuxième jour. Deux cas se présentent :

× soit le premier composant est tombé en panne après un jour.
Dans ce cas, c'est le deuxième composant qui était en place lors du deuxième jour.
S'il tombe en panne en jour 2 c'est qu'il est resté opérationnel un jour.

Dans ce cas, l'événement $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ est réalisé.

× soit le premier composant est resté en vie strictement plus d'un jour.
Dans ce cas, c'est ce composant qui est en place lors du deuxième jour.
S'il tombe en panne en jour 2 c'est qu'il est resté opérationnel deux jours.

Dans ce cas, l'événement $[X_1 = 2]$ est réalisé.

$$\boxed{\text{On en conclut : } A_2 = [X_1 = 2] \ \cup \ ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]).}$$

Remarque

- Par définition, un événement est un ensemble. Démontrer l'égalité de deux ensembles c'est démontrer que tout élément du premier ensemble est dans le second et inversement. Ou encore qu'un élément est dans le premier ensemble si et seulement si il est aussi dans le second.
- En terme d'événement, cela signifie que le premier événement est réalisé (il existe ω rélisant cet événement *i.e.* il existe ω appartenant à cet événement) si et seulement si le second événement est réalisé (l'élément ω précédent est aussi élément de cet événement). □

ii. En déduire u_2 en fonction de p_1 et p_2.

Démonstration.

- Les événements $[X_1 = 2]$ et $[X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$ sont incompatibles. En effet :

$$[X_1 = 2] \cap ([X_1 = 1] \ \cap \ [X_2 = 1]) \ = \ ([X_1 = 2] \ \cap \ [X_1 = 1]) \cap [X_2 = 1] = \varnothing \cap [X_2 = 1] = \varnothing$$

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(A_2) & = & \mathbb{P}([X_1 = 2] \cup ([X_1 = 1] \ \cap \ [X_2 = 1])) & \\
& = & \mathbb{P}([X_1 = 2]) + \mathbb{P}([X_1 = 1] \ \cap \ [X_2 = 1]) & \textit{(par incompatibilité des événements considérés)} \\
& = & \mathbb{P}([X_1 = 2]) + \mathbb{P}([X_1 = 1]) \ \times \ \mathbb{P}([X_2 = 1]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \mathbb{P}([X_1 = 2]) + \mathbb{P}([X_1 = 1]) \ \times \ \mathbb{P}([X_1 = 1]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi)} \\
& = & p_2 + p_1^2 &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } u_2 = p_2 + p_1^2.}$$

□

c) Pour tout entier naturel i, on pose $\tilde{X}_i = X_{i+1}$.

i. Montrer que les variables $\tilde{X}_i$ sont mutuellement indépendantes, indépendantes de X_1 et de même loi que X_1.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, la suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables mutuellement indépendantes. Il en est donc de même de la suite $(X_i)_{i\geqslant 2}$, qui n'est autre que la suite $(\tilde{X}_i)_{i\geqslant 1}$.

  $$\boxed{\text{Les variables } \tilde{X}_i \text{ sont mutuellement indépendantes.}}$$

- $$\boxed{\text{Par ailleurs, par le lemme des coalitions, toute variable } \tilde{X}_i \text{ (pour } i \geqslant 1) \text{ est indépendante de la variable } X_1.}$$

- Enfin, la suite $(X_i)_{i\geqslant 1}$ est une suite de variables possédant toutes la même loi, celle de X_1. Il en est donc de même de la suite $(X_i)_{i\geqslant 2}$, qui n'est autre que la suite $(\tilde{X}_i)_{i\geqslant 1}$.

  $$\boxed{\text{Les variables } \tilde{X}_i \text{ ont même loi que } X_1.}$$

Remarque
Il semble que l'énoncé comporte une petite coquille. Il aurait fallu écrire « tout entier naturel **non nul** i ». Cela pose un problème pour cette question : en effet, la variable $\tilde{X}_0 = X_1$ n'est pas indépendante de X_1.

□

ii. Soit k un entier naturel non nul strictement inférieur à n. Montrer que :

$$A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j\geqslant 1} \left[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\right]$$

Démonstration.

- D'après l'énoncé, A_n est l'événement « il existe k entier naturel non nul tel que $T_k = n$ ». Ainsi :

$$\begin{aligned} A_n &= \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} [T_j = n] \\ &= \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} [X_1 + \ldots + X_j = n] \\ &= [X_1 = n] \ \cup \ \bigcup_{j\geqslant 2} [X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n] \end{aligned}$$

- On en déduit, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned} & [X_1 = k] \ \cap \ A_n \\ = \ & [X_1 = k] \ \cap \ \left([X_1 = n] \ \cup \ \bigcup_{j\geqslant 2} [X_1 + \ldots + X_j = n]\right) \\ = \ & [X_1 = k] \cap [X_1 = n] \ \cup \ \bigcup_{j\geqslant 2} \Big([X_1 = k] \ \cap \ [X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n]\Big) \qquad \textit{(par distributivité de } \cap \textit{ par rapport à } \cup) \\ = \ & \varnothing \ \cup \ \bigcup_{j\geqslant 2} \Big([X_1 = k] \ \cap \ [k + X_2 + \ldots + X_j = n]\Big) \end{aligned}$$

  En effet, comme $k < n$, la v.a.r. X_1 ne peut pas être à la fois égale à k et à n.

- Enfin :

$$\begin{array}{cll} & \displaystyle\bigcup_{j\geqslant 2} \Big([X_1 = k] \ \cap \ [k + X_2 + \ldots + X_j = n] \Big) & \\ = & [X_1 = k] \ \cap \ \displaystyle\bigcup_{j\geqslant 2} \Big([X_2 + \ldots + X_j = n-k] \Big) & \textit{(par distributivité de } \cap \textit{ par rapport à } \cup\textit{)} \\ = & [X_1 = k] \ \cap \ \displaystyle\bigcup_{j\geqslant 1} \Big([X_2 + \ldots + X_{j+1} = n-k] \Big) & \textit{(par décalage d'indice)} \\ = & [X_1 = k] \ \cap \ \displaystyle\bigcup_{j\geqslant 1} \Big(\Big[\tilde{X}_1 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big] \Big) & \textit{(par décalage d'indice)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall k \in [\![1, n-1]\!], \ \ A_n \cap [X_1 = k] = [X_1 = k] \ \cap \ \bigcup_{j\geqslant 1} \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]}$$

Remarque

- Dans la démonstration, on a fait apparaître l'événement A_n sous la forme :

$$A_n = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} [T_j = n]$$

En réalité, on aurait pu écrire : $A_n = \bigcup\limits_{j=1}^{n} [T_j = n]$.
On constate en effet que T_j prend ses valeurs dans $[\![j, +\infty[\![$ (le jour où $j^{\text{ème}}$ composant tombe en panne est forcément plus grand que le nombre j de composants) puisque chacune des variables X_i vaut 1 au minimum. Ainsi, pour tout $j \geqslant n+1$, $[T_j = n] = \varnothing$.

- On travaille donc en réalité sur une réunion finie. Ce point de détail est signalé ici pour la bonne compréhension des objets sur lesquels on travaille. Toutefois, il n'a pas à être mentionné dans une copie : ne pas préciser la borne haute de la réunion permet de simplifier les écritures suivantes.

$\square$

iii. En déduire que pour tout entier naturel k non nul strictement inférieur à n :

$$\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k})$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

- D'après l'énoncé, $p_k = \mathbb{P}([X_1 = k]) \neq 0$. Ainsi, $\mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n)$ est bien défini et :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) & = & \dfrac{\mathbb{P}([X_1 = k] \ \cap \ A_n)}{\mathbb{P}([X_1 = k])} \\ & = & \dfrac{\mathbb{P}\Big([X_1 = k] \ \cap \ \bigcup\limits_{j\geqslant 1} \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big] \Big)}{\mathbb{P}([X_1 = k])} \\ & = & \dfrac{\mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{j\geqslant 1} [X_1 = k] \ \cap \ \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big] \Big)}{\mathbb{P}([X_1 = k])} \end{array}$$

La dernière égalité est obtenue par distributivité de $\cap$ sur $\cup$.

- On s'intéresse tout d'abord au numérateur.

$$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{j\geqslant 1} [X_1 = k] \ \cap \ \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \\ = & \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 = k] \ \cap \ \Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \qquad \textit{(par réunion d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\ = & \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}\Big(\Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \qquad \textit{(par indépendance)} \end{array}$$

En effet, par le lemme des coalitions, pour tout $j \geqslant 1$, les v.a.r. X_1 et $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j$ sont indépendantes. On en déduit que les événements $[X_1 = k]$ et $\Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]$ sont indépendants.

- Puis :

$$\begin{array}{cl} & \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}\Big(\Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \\ = & \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big(\Big[\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j = n-k\Big]\Big) \\ = & \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n-k]\Big) \end{array}$$

En effet, les v.a.r. $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \ldots + \tilde{X}_j$ et $X_1 + X_2 + \ldots + X_j$ ont même loi puisque ce sont des sommes d'un même nombre de v.a.r. indépendantes ayant toutes la même loi.

- Enfin :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) & = & \dfrac{\cancel{\mathbb{P}([X_1 = k])} \ \times \ \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n-k]\Big)}{\cancel{\mathbb{P}([X_1 = k])}} \\ & = & \sum\limits_{j\geqslant 1} \mathbb{P}\Big([X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n-k]\Big) \\ & = & \mathbb{P}\Big(\bigcup\limits_{j\geqslant 1} [X_1 + X_2 + \ldots + X_j = n-k]\Big) \qquad \textit{(par réunion d'événements 2 à 2 incompatibles)} \\ & = & \mathbb{P}(A_{n-k}) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) = \mathbb{P}(A_{n-k}).}$$

□

d) Montrer que :

$$u_n = u_{n-1}\, p_1 + \ldots + u_0\, p_n$$

Démonstration.

- La famille $\big([X_1 = k]\big)_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A_n) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) + \mathbb{P}([X_1 = n] \cap A_n) + \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) \end{array}$$

- Or, pour tout $k \geqslant n+1$, on a : $[X_1 = k] \cap A_n = \varnothing$.
  En effet si les événements $[X_1 = k]$ et A_n sont réalisés alors le premier composant :
  × tombe en panne le jour $k \geqslant n+1$ (car $[X_1 = k]$ est réalisé).
  × est le composant en place le jour n. Et il tombe donc en panne le jour n (car A_n est réalisé).
  Ces deux événements sont donc bien incompatibles.

  $$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \geqslant n+1 : \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0.}$$

- D'autre part : $[X_1 = n] \subset A_n$.
  En effet, si $[X_1 = n]$ est réalisé alors le premier composant a une durée de vie de n jours. Il est donc en place le jour n et tombe alors en panne ce jour. Ce qui signifie que A_n est réalisé.

  $$\boxed{\text{Comme } [X_1 = n] \subset A_n \text{ alors } [X_1 = n] \cap A_n = [X_1 = n].}$$

- On déduit de ce qui précède :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}(A_n) & = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap A_n) + \mathbb{P}([X_1 = n]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}_{[X_1=k]}(A_n) + \mathbb{P}([X_1 = n]) & \textit{(valide car pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([X_1 = k]) \neq 0) \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}(A_{n-k}) + \mathbb{P}([X_1 = n]) & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n-1} p_k \ u_{n-k} + p_n \ = \ u_{n-1} \ p_1 + \ldots + u_1 \ p_{n-1} + p_n &
\end{array}$$

  On rappelle que $u_0 = \mathbb{P}(A_0) = 1$ par convention.

  $$\boxed{\text{On en conclut : } u_n = u_{n-1} \ p_1 + \ldots + u_1 \ p_{n-1} + u_0 \ p_n.}$$

Remarque
La propriété démontrée dans la question précédente a été démontrée pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. On ne peut donc l'utiliser que pour un entier $k \in [\![1, n-1]\!]$. C'est une évidence qu'il convient toutefois de rappeler car elle est trop régulièrement ignorée par les candidats. Lorsque l'on souhaite utiliser un résultat précédent, il faut scrupuleusement vérifier que l'on est dans les conditions d'application de ce résultat. □

e) En **Scilab**, soit $P = [p_1, p_2, ..., p_n]$ le vecteur ligne tel que $P(j) = p_j$ pour j dans $[\![1, n]\!]$.
Écrire un programme en **Scilab** qui calcule u_n à partir de P.

Démonstration.

- La suite (u_n) est une suite récurrente dont le $n^{\text{ème}}$ terme dépend de tous les précédents. Pour calculer le terme d'indice n, il faut avoir accès aux termes d'indice $0, \ldots, n-1$ de la suite.
  Il est donc nécessaire de créer un vecteur `U` permettant de stocker, au fur et à mesure du calcul, toutes ces valeurs.
- Pour caculer chaque cœfficient de `U`, on se sert de la formule démontrée dans la question précédente :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \ u_k \ = \ \sum\limits_{j=1}^{k} u_{k-j} \ p_j \end{array} \right.$$

  On commence par stocker dans `U` l'élément u_0. L'élément u_k (stocké en $k+1^{\text{ème}}$ case de `U`) est déterminé par un calcul de somme (on met à jour une variable auxiliaire `S`).

- Il faut faire attention aux indices : l'élément u_0 d'indice 0 est stocké en position 1 du vecteur U et ce décalage est présent pour toutes les valeurs stockées dans U.
- Enfin, il faut noter que le programme prend en paramètre le vecteur P et que c'est ce vecteur qui doit fournir l'entier n, indice de l'élément u_n recherché. Cet entier n n'est autre que la longeur du vecteur P.
- On obtient le programme suivant.

```
function res = calcSuiteU(P)
    [m, n] = size(P) // ou n = length(P)
    U = zeros(1, n+1) // on crée un vecteur conctenant n+1 zéros
    U(1) = 1 // la première case contient la valeur de u-0
    for k = 1:n
        S = 0 // variable auxiliaire
        for j = 1:k
            S = S + U(k+1-j) ⋆ P(j)
        end
        U(k+1) = S
    end
    res = U(n+1) // on renvoie u-n
endfunction
```

Remarque

- Afin de répondre à cette question, on peut aussi observer que :

$$u_{k-1}\,p_1 + \ldots + u_0\,p_k = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_{k-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_k \\ p_{k-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix}$$

- On se sert alors des fonctionnalités **Scilab** sur les matrices afin de répondre à cette question. La matrice $\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_{k-1} \end{pmatrix}$ est obtenue à l'aide de l'appel : U(1:i).
  La matrice $\begin{pmatrix} p_k \\ p_{k-1} \\ \vdots \\ p_1 \end{pmatrix}$ est obtenue par l'instruction : (P(i:-1:1))'.
  (on rappelle que l'apostrophe permet d'obtenir la transposée d'une matrice)
- On obtient le programme suivant.

```
function res = calcSuiteU(P)
    [m, n] = size(P) // ou n = length(P)
    U = zeros(1, n+1) // on crée un vecteur conctenant n+1 zéros
    U(1) = 1 // la première case contient la valeur de u-0
    for i = 1:n
        U(i+1) = U(1:i) ⋆ (P(i:-1:1))'
    end
    res = U(n+1)
endfunction
```

□

5. Soit λ un réel appartenant à $]0,1[$.

Dans cette question, on suppose que X_1 suit la loi géométrique de paramètre λ.
Pour tout entier naturel j non nul, on a donc $\mathbb{P}([X_1 = j]) = \lambda(1-\lambda)^{j-1}$.

a) Calculer $\mathbb{P}([X_1 > k])$ pour tout entier naturel k non nul.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- On remarque tout d'abord que :

$$\mathbb{P}([X_1 > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}\Big(\overline{[X_1 > k]}\Big) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$$

- Par ailleurs, comme $X_1(\Omega) = [\![0, +\infty[\![$, alors : $[X_1 \leqslant k] \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]$.
- On en déduit que :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} [X_1 = i]\right) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left([X_1 = i]\right) & \textit{(par incompatibilité)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda \ (1-\lambda)^{i-1} & \\
& = & \lambda \sum\limits_{i=0}^{k-1} (1-\lambda)^{i} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \lambda \ \dfrac{1-(1-\lambda)^k}{1-(1-\lambda)} & \textit{(avec } 1-\lambda \neq 1\textit{)} \\
& = & 1-(1-\lambda)^k &
\end{array}$$

Enfin : $\mathbb{P}([X_1 > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) \ = \ 1 - (1-(1-\lambda)^k) \ = \ (1-\lambda)^k$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([X_1 > k]) \ = \ (1-\lambda)^k}$$

□

b) Calculer $\mathbb{P}_{[X_1 > k]}([X_1 = k+1])$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}_{[X_1>k]}([X_1 > k+1]) & = & \dfrac{\mathbb{P}([X_1 > k] \ \cap \ [X_1 > k+1])}{\mathbb{P}([X_1 > k])} & \textit{(par définition avec } \mathbb{P}([X_1 > k]) \neq 0\textit{)} \\
& = & \dfrac{\mathbb{P}([X_1 > k+1])}{\mathbb{P}([X_1 > k])} & \textit{(car } [X_1 > k+1] \subseteq [X_1 > k]\textit{)} \\
& = & \dfrac{(1-\lambda)^{k+1}}{(1-\lambda)^k} = (1-\lambda)^1 & \textit{(d'après la question précédente)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in \mathbb{N}^* : \mathbb{P}_{[X_1>k]}([X_1 > k+1]) = (1-\lambda) = \mathbb{P}([X_1 > 1]).}$$

Remarque

- Cette question est un cas particulier de la propriété classique qui énonce :
$$\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}_{[X_1 > k]}([X_1 > k + \ell]) = \mathbb{P}([X_1 > \ell])$$
On dit alors que la loi géométrique est à perte de mémoire (la propriété $X_1 > k$ est oubliée, seul le délai est retenu) ou encore que la loi géométrique est **sans mémoire**.
- Dans cet exercice, X_1 compte la durée de fonctionnement d'un composant avant une panne. Cette propriété signifie que la durée de vie restante du composant est indépendante de la durée de vie écoulée de ce composant (période durant laquelle il a fonctionné sans tomber en panne). Autrement dit, il n'y a pas de vieillissement ou encore d'usure du composant électronique considéré. C'est un cas assez fréquent en réalité : on peut considérer que les diodes, transistors, résistances, condensateurs sont sans usure puisque leur usure ne débute que bien après la fin de vie de l'objet dans lequel ils sont installés.
- C'est pourquoi la durée de vie d'un composant est souvent modélisée par une v.a.r. qui suit loi géométrique (seule loi discrète à perte de mémoire) ou par une v.a.r. qui suit une loi exponentielle (seule loi de v.a.r. à densité à perte de mémoire). □

c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul :
$$\mathbb{P}(A_n) = \lambda$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence forte que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\mathbb{P}(A_n) = \lambda$.

▸ **Initialisation** :
D'après la question ***4.a)*** : $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}([X_1 = 1]) = \lambda \ (1-\lambda)^0 = \lambda$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(1)$, …, $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\mathbb{P}(A_{n+1}) = \lambda$). Alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n \ p_1 + \ldots + u_0 \ p_{n+1} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.d)}}\textit{)} \\
&= u_n \ p_1 + \ldots + u_1 \ p_n + u_0 \ p_{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} u_{n+1-k} \ p_k + p_{n+1} && \textit{(car } u_0 = 1 \textit{ par convention)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_{n+1-k}) \ \mathbb{P}([X_1 = k]) + \mathbb{P}([X_1 = n+1]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \lambda \times \lambda \ (1-\lambda)^{k-1} + \lambda \ (1-\lambda)^{n+1} && \textit{(par hypothèses de récurrence et définition de la loi géométrique)} \\
&= \frac{\lambda^2}{1-\lambda} \sum_{k=1}^{n} (1-\lambda)^k + \lambda \ (1-\lambda)^n \\
&= \frac{\lambda^2}{1-\lambda} \ \frac{(1-\lambda)^1 - (1-\lambda)^{n+1}}{1-(1-\lambda)} + \lambda \ (1-\lambda)^n && \textit{(car } 1-\lambda \neq 1\textit{)} \\
&= \frac{\lambda^2}{\lambda \ (1-\lambda)} \ \big((1-\lambda)^1 - (1-\lambda)^{n+1}\big) + \lambda \ (1-\lambda)^n \\
&= \lambda \ \big(1 - (1-\lambda)^n\big) + \lambda \ (1-\lambda)^n \ = \ \lambda - \cancel{\lambda \ (1-\lambda)^n} + \cancel{\lambda \ (1-\lambda)^n}
\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathcal{P}(n).}$$

Remarque
Il était aussi possible d'opérer de manière directe. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{array}{rcll} u_n & = & u_{n-1}\, p_1 + \ldots + u_0\, p_n & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.d)}}\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} u_{n-k}\, p_k & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} u_{n-k}\, \mathbb{P}([X_1 = k]) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} u_{n-k}\, \lambda\, (1-\lambda)^{k-1} & \\ & = & u_{n-1}\, \lambda + \sum\limits_{k=2}^{n} u_{n-k}\, \lambda\, (1-\lambda)^{k-1} & \\ & = & u_{n-1}\, \lambda + \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_{n-1-k}\, \lambda\, (1-\lambda)^{k} & \textit{(par décalage d'indice)} \\ & = & \lambda\, u_{n-1} + (1-\lambda) \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_{n-1-k}\, \lambda\, (1-\lambda)^{k-1} & \\ & = & \lambda\, u_{n-1} + (1-\lambda) \sum\limits_{k=1}^{n-1} u_{n-1-k}\, p_k & \\ & = & \lambda\, u_{n-1} + (1-\lambda)\, u_{n-1} \ = \ u_{n-1} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{4.d)}}\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, la suite (u_n) est constante.
Comme de plus $\mathbb{P}(A_1) = \lambda$, on en conclut : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \lambda$. □

6. On suppose dans cette question que p_1 vérifie $0 < p_1 < 1$ et que $p_2 = 1 - p_1$.
Pour simplifier, on posera $p = p_1 = 1 - p_2$.

a) Que vaut p_i pour i supérieur ou égal à 3 ?

Démonstration.

- La famille $\big([X_1 = k]\big)_{k \in \mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'événements. On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k]) = 1$$

  Or :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k = p_1 + p_2 + \sum_{k=3}^{+\infty} p_k = 1 + \sum_{k=3}^{+\infty} p_k$$

- On en déduit que : $\sum\limits_{k=3}^{+\infty} p_k = 0$. Or, pour tout $k \geqslant 3$, $p_k \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{On en conclut que, pour tout } k \geqslant 3,\ p_k = 0.}$$

□

b) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$$

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question ***4.d)*** :

$$\begin{array}{rcll} u_n & = & \sum\limits_{k=1}^{n} u_{n-k}\ p_k & \\ & = & u_{n-1}\ p_1 + u_{n-2}\ p_2 + \sum\limits_{k=3}^{n} u_{n-k}\ p_k & \textit{(découpage valide car } n \geqslant 2\textit{)} \\ & = & u_{n-1}\ p_1 + u_{n-2}\ p_2 & \textit{(car : } \forall k \geqslant 3,\ p_k = 0\textit{)} \\ & = & u_{n-1}\ p + u_{n-2}\ (1-p) & \end{array}$$

- Il suffit alors de remarquer :

$$M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\ u_{n-1} + (1-p)\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}}$$

Remarque

- La « relation de Chasles » stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

(la deuxième somme est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 1$ et $p = 2$.
L'argument $n \geqslant 2$ est donc nécessaire pour découper la somme. □

c) i. Diagonaliser la matrice M.

Démonstration.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Rappelons :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } M \ \Leftrightarrow\ M - \lambda I_3 \text{ n'est pas inversible}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcll} \det(M - \lambda\ I_2) & = & \det\left(\begin{pmatrix} p-\lambda & 1-p \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) & \\ & = & -\lambda\ (p-\lambda) - (1-p) & \\ & = & \lambda^2 - p\ \lambda - (1-p) & \\ & = & (\lambda - 1)\ (\lambda + (1-p)) & \textit{(car 1 est racine évidente)} \end{array}$$

Ainsi : $\det(M - \lambda\ I_2) = 0 \ \Leftrightarrow\ \lambda = 1$ `OU` $\lambda = -(1-p)$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{-(1-p), 1\}}$$

- La matrice M est carrée d'ordre 2 et admet deux valeurs propres distinctes (car $p \neq 0$) 1 et $-(1-p)$. Elle est donc diagonalisable.
- Déterminons alors $E_1(M)$. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} U \in E_1(M) & \iff & (M - I_2)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} (p-1)\ x & + & (1-p)\ y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_1 \leftarrow \frac{1}{p-1} L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 0 \\ x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_1(M) & = & \{U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid (M - I_2)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid x = y\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

- Déterminons alors $E_{-(1-p)}(M)$. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} U \in E_{-(1-p)}(M) & \iff & (M + (1-p)\ I_2)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & (1-p)\ y & = & 0 \\ x & + & (1-p)\ y & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_{-(1-p)}(M) & = & \{U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid (M + (1-p)\ I_2)\ U = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid x = -(1-p)\ y\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} -(1-p)\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{y \cdot \begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{array}$$

$$\boxed{E_{-(1-p)}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

- En conclusion, la matrice M est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix}$.
  Autrement dit, il existe $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$M = PDP^{-1}$$

- La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est obtenue comme concaténation d'une famille libre de vecteurs propres de $E_1(M)$ et d'une famille libre de vecteurs propres de $E_{-(1-p)}(M)$.
  Enfin, d'après la formule d'inversion des matrices carrées d'ordre 2 :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

ii. Montrer que :

$$M^{n-1} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.
Avec les notations de la question précédente : $M = PDP^{-1}$.
Ainsi, par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$. D'où :

$$\begin{aligned} M^{n-1} &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & (p-1)^n \\ 1 & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1-(p-1)^n & 1-p+(p-1)^n \\ 1-(p-1)^{n-1} & 1-p+(p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-p} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(p-1)^n & (p-1)^n \\ -(p-1)^{n-1} & (p-1)^{n-1} \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2-p} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + (p-1)^{n-1} \begin{pmatrix} -(p-1) & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } M^{n-1} = \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

d) i. Exprimer u_n en fonction de p et de n.

Démonstration.

- D'après la question ***6.b)***, pour tout $n \geqslant 2$: $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix}$.
- On obtient ainsi, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = M^2 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ u_{n-3} \end{pmatrix} = \ldots = M^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix}$$

  (on le démontre rigoureusement par une récurrence immédiate)
- D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2-p} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p} \begin{pmatrix} -p^2+2p-1 \\ -p+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Et ainsi :

$$u_n \;=\; \frac{1}{2-p}\;\big(1-(p-1)^{n-1}(p-1)^2\big) \;=\; \frac{1}{2-p}\;\big(1-(p-1)^{n+1}\big)$$

$$\boxed{u_n \;=\; \frac{1}{2-p}\;\big(1-(p-1)^{n+1}\big)}$$

□

ii. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $0 < p < 1$. On en déduit : $-1 < p-1 < 0$. Ainsi : $|p-1| < 1$.
- On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} (p-1)^{n+1} = 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente, de limite } \frac{1}{2-p}.}$$

□

II. Couples de v.a.r. discrètes

Exercice 5 : EML 1998

Une urne contient des boules vertes et des boules blanches, indiscernables au toucher.
La proportion de boules vertes est p, $0 < p < 1$; la proportion de boules blanches est $1 - p$.
On effectue une suite de tirages successifs d'une boule avec remise (toute boule tirée de l'urne y est remise avant de procéder au tirage suivant).

1. On note N_V la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule verte, et N_B la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir la première boule blanche.

a) Quelles sont les lois des variables aléatoires N_V et N_B ?

Démonstration.

- L'expérience aléatoire consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli (dont le succès est d'obtenir une boule verte) indépendantes et de même paramètre p.
- La v.a.r. N_V est le rang d'apparition du premier succès de l'expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, } N_V \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$$

- Dans le cas de la v.a.r. N_B, le succès de chaque épreuve de Bernoulli est l'obtention d'une boule blanche. Il se produit avec probabilité $1 - p$.
- La v.a.r. N_B est le rang d'apparition du premier succès de l'expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, } N_B \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)}$$

□

b) Les variables aléatoires N_V et N_B sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- La première boule verte ne peut apparaître au même rang que la première boule verte puisqu'on ne tire qu'une boule lors de chaque tirage. Ainsi :

$$[N_V = 1] \ \cap \ [N_B = 1] = \varnothing$$

On en déduit que : $\mathbb{P}([N_V = 1] \ \cap \ [N_B = 1]) = 0$.

- Or : $\mathbb{P}([N_V = 1]) = p(1-p)^0 = p \neq 0$ et $\mathbb{P}([N_B = 1]) = (1-p)(1-(1-p))^0 = 1 - p \neq 0$.

On en déduit que :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}([N_V = 1] \ \cap \ [N_B = 1]) & \neq & \mathbb{P}([N_V = 1]) \times \mathbb{P}([N_B = 1]) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & \neq & p(1-p) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } N_V \text{ et } N_B \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□

On définit le couple de variables aléatoires (X, Y) à valeurs dans $(\mathbb{N}^*)^2$ de la façon suivante.
Pour tout $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $[X = i] \cap [Y = j]$ est l'événement :

« les i premières boules tirées sont blanches, les j suivantes sont vertes et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est blanche

ou

les i premières boules tirées sont vertes, les j suivantes sont blanches et la $(i+j+1)^{\text{ème}}$ est verte. »

Par exemple, pour la suite de tirages $BBBVVBVBB\cdots$ (où V est mis pour vert et B pour blanc), on a $X = 3$ et $Y = 2$.

2. a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Démonstration.
Dans la suite du problème, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements :
× V_k : « on a obtenu une boule verte lors du $k^{\text{ème}}$ tirage »,
× B_k : « on a obtenu une boule blanche lors du $k^{\text{ème}}$ tirage ».

- Soit $i \in \mathbb{N}^*$.
Notons Z (resp. T) la v.a.r. donnant le rang d'apparition de la première boule blanche (resp. verte) à l'issue des $i+1$ premiers tirages.
Ainsi, $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :
$$\left\{ \begin{array}{l} [Z = 1] = B_{i+2} \\ \forall j \geqslant 2,\ [Z = j] = V_{i+2} \cap \ldots \cap V_{i+j} \cap B_{i+j+1} \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} [T = 1] = V_{i+2} \\ \forall j \geqslant 2,\ [T = j] = B_{i+2} \cap \ldots \cap B_{i+j} \cap V_{i+j+1} \end{array} \right.$$

- On remarque alors que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{array}{rcl} [X = i] \cap [Y = j] & = & (B_1 \cap \ldots \cap B_i \cap V_{i+1} \cap V_{i+2} \cap \ldots \cap V_{i+j} \cap B_{i+j+1}) \\ & \cup & (V_1 \cap \ldots \cap V_i \cap B_{i+1} \cap B_{i+2} \cap \ldots \cap B_{i+j} \cap V_{i+j+1}) \\ & = & ([N_V = i+1] \cap [Z = j]) \ \cup\ ([N_B = i+1] \cap [T = j]) \end{array}$$

- On en déduit que :
$$\begin{array}{rll} & [X = i] & \\ = & [X = i] \ \cap\ \Omega \ = \ [X = i] \ \cap\ \Big(\bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} [Y = j] \Big) & \textit{(car } ([Y = j])_{j \in \mathbb{N}^*} \textit{ est un sce)} \\ = & \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} \Big([X = i] \ \cap\ [Y = j] \Big) & \textit{(par distributivité de } \cap \textit{ sur } \cup\textit{)} \\ = & \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} \Big(([N_V = i+1] \cap [Z = j]) \ \cup\ ([N_B = i+1] \cap [T = j]) \Big) & \textit{(d'après le point précédent)} \\ = & \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} ([N_V = i+1] \cap [Z = j]) \ \cup\ \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} ([N_B = i+1] \cap [T = j]) & \\ = & \Big([N_V = i+1] \cap \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} [Z = j] \Big) \ \cup\ \Big([N_B = i+1] \cap \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}^*} [T = j] \Big) & \textit{(par distributivité de } \cap \textit{ sur } \cup\textit{)} \\ = & \Big([N_V = i+1] \cap \Omega \Big) \ \cup\ \Big([N_B = i+1] \cap \Omega \Big) & \textit{(car } ([Z = j])_{j \in \mathbb{N}^*} \textit{ et } ([T = j])_{j \in \mathbb{N}^*} \textit{ sont des sce)} \\ = & [N_V = i+1] \ \cup\ [N_B = i+1] & \end{array}$$

- Finalement :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X=i]) & = & \mathbb{P}([N_V = i+1] \ \cup \ [N_B = i+1]) & \\ & = & \mathbb{P}([N_V = i+1]) \ + \ \mathbb{P}([N_B = i+1]) & \textit{(car } [N_V = i+1] \textit{ et } [N_B = i+1] \textit{ sont incompatibles)} \\ & = & p \ (1-p)^i \ + \ (1-p) \ p^i & \textit{(car } N_V \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \textit{ et } N_B \hookrightarrow \mathcal{G}(1-p)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } i \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([X=i]) = p \ (1-p)^i \ + \ (1-p) \ p^i.}$$

Remarque

- Nous avons mis en place une démonstration longue pour démontrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$[X=i] \ = \ [N_V = i+1] \ \cup \ [N_B = i+1]$$

A priori, l'esprit de l'énoncé était plutôt d'affirmer cette égalité d'événements. Pour avoir l'intuition de cette égalité, il suffit d'analyser que lorsque i est fixé et j varie de 1 à $+\infty$, les parties $B_1 \cap \ldots \cap B_i \cap V_{i+1}$ et $V_1 \cap \ldots \cap V_i \cap B_{i+1}$ sont fixes.

- Les v.a.r. Z et T ont été définies après avoir fixé l'entier $i \in \mathbb{N}^*$. En toute rigueur, on aurait dû noter $Z^{(i)}$ et $T^{(i)}$ ces variables aléatoire. On a fait ici le choix de ne pas alourdir les notations pour que la démonstration reste lisible. □

b) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \dfrac{p}{1-p} + \dfrac{1-p}{p}$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance ssi la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i \ \mathbb{P}([X=i])$ est absolument convergente.

  Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.

- Notons $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{i=1}^{N} i \ \mathbb{P}([X=i]) & = & \sum\limits_{i=1}^{N} i \ (p \ (1-p)^i \ + \ (1-p) \ p^i) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{N} i \ p \ (1-p)^i \ + \ \sum\limits_{i=1}^{N} i \ (1-p) \ p^i \\ & = & p \sum\limits_{i=1}^{N} i \ (1-p)^i \ + \ (1-p) \sum\limits_{i=1}^{N} i \ p^i \\ & = & p \ (1-p) \sum\limits_{i=1}^{N} i \ (1-p)^{i-1} \ + \ p \ (1-p) \sum\limits_{i=1}^{N} i \ p^{i-1} \end{array}$$

On reconnaît les sommes partielles de séries géométriques dérivées premières convergentes car de raison respective $(1-p) \in \ ]-1,1[$ et $p \in \ ]-1,1[$.

- Ainsi, la série $\sum_{i \geqslant 1} i \ \mathbb{P}([X = i])$ est convergente.
  La v.a.r. X admet donc une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i \ \mathbb{P}([X = i]) \\
&= p\ (1-p) \sum_{i=1}^{+\infty} i\ (1-p)^{i-1} \ + \ p\ (1-p) \sum_{i=1}^{+\infty} i\ p^{i-1} \\
&= p\ (1-p) \ \frac{1}{(1-(1-p))^2} \ + \ p\ (1-p) \ \frac{1}{(1-p)^2} \\
&= \cancel{p}\ (1-p) \ \frac{1}{p^{\cancel{2}}} \ + \ p\ \cancel{(1-p)} \ \frac{1}{(1-p)^{\cancel{2}}} \\
&= \frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p}}$$

□

c) Montrer que $\mathbb{E}(X)$ est minimale lorsque $p = \frac{1}{2}$, et calculer cette valeur minimale.

Démonstration.

- Considérons la fonction $f : x \mapsto \frac{1-x}{x} + \frac{x}{1-x}$ sur $]0, 1[$.
  La fonction f est dérivable sur $]0, 1[$ comme somme des fonctions :
  × $x \mapsto \frac{1-x}{x}$ dérivable sur $]0, 1[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]0, 1[$ (car polynomiales) et dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, 1[$.
  × $x \mapsto \frac{x}{1-x}$ dérivable sur $]0, 1[$ pour les mêmes raisons.
- Soit $x \in]0, 1[$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-x-(1-x)}{x^2} + \frac{(1-x) - x\ (-1)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{-(1-x)^2 + x^2}{x^2\ (1-x)^2} \\
&= \frac{-(1-2x+\cancel{x^2}) - \cancel{x^2}}{x^2\ (1-x)^2} \\
&= \frac{2x-1}{x^2\ (1-x)^2}
\end{aligned}$$

  Comme $x^2\ (1-x)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $2x - 1$. Enfin :

$$\begin{aligned}
2x - 1 \leqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x \leqslant 1 \\
&\Leftrightarrow \quad x \leqslant \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- On en déduit le tableau de variation de f :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
Variations de f	‖ $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

Détaillons les différents éléments de ce tableau :

× $\dfrac{1-x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ et $\dfrac{x}{1-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

D'où : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

× $f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ 2 = 2$.

× $\dfrac{1-x}{x} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{x}{1-x} \underset{x\to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

- La fonction f est décroissante sur $]0, \frac{1}{2}[$ puis croissante sur $[\frac{1}{2}, 1[$.
Elle admet donc un minimum en $x = \frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{E}(X) = f(p) \text{ est minimale lorsque } p = \tfrac{1}{2}, \text{ de minimum } f(\tfrac{1}{2}) = 2.}$$

□

3. Montrer, pour tout (i,j) de $(\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbb{P}\left([X=i]\cap[Y=j]\right) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1}p^j$$

Démonstration.

- Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{array}{rcl} [X=i]\cap[Y=j] & = & (B_1\cap\ldots\cap B_i\cap V_{i+1}\cap\ldots\cap V_{i+j}\cap B_{i+j+1}) \\ & \cup & (V_1\cap\ldots\cap V_i\cap B_{i+1}\cap\ldots\cap B_{i+j}\cap V_{i+j+1}) \\ & = & \left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} B_k\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} V_{i+k}\right)\cap B_{i+j+1} \\ & \cup & \left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} V_k\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} B_{i+k}\right)\cap V_{i+j+1} \end{array}$$

Ainsi, $[X=i]\cap[Y=j]$ est la réunion de deux événements incompatibles. En effet :

$$\begin{array}{rl} & \left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} B_k\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} V_{i+k}\right)\cap B_{i+j+1}\ \cap\ \left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} V_k\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} B_{i+k}\right)\cap V_{i+j+1} \\ = & \left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} B_k\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} V_{i+k}\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{i} V_k\right)\cap\left(\bigcap\limits_{k=1}^{j} B_{i+k}\right)\cap\underbrace{\left(B_{i+j+1}\cap V_{i+j+1}\right)}_{\varnothing} = \varnothing \end{array}$$

- On en déduit que :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) \\
= \ & \mathbb{P}\left(\left(\left(\bigcap_{k=1}^{i} B_k \right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{j} V_{i+k} \right) \cap B_{i+j+1} \right) \ \cup \ \left(\left(\bigcap_{k=1}^{i} V_k \right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{j} B_{i+k} \right) \cap V_{i+j+1} \right) \right) \\
= \ & \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{i} B_k \right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{j} V_{i+k} \right) \cap B_{i+j+1} \right) \ + \ \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{i} V_k \right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{j} B_{i+k} \right) \cap V_{i+j+1} \right) & \textit{(par additivité)} \\
= \ & \prod_{k=1}^{i} \mathbb{P}(B_k) \times \left(\prod_{k=1}^{i} \mathbb{P}(V_{i+k}) \right) \times \mathbb{P}(B_{i+j+1}) + \prod_{k=1}^{i} \mathbb{P}(V_k) \times \left(\prod_{k=1}^{i} \mathbb{P}(B_{i+k}) \right) \times \mathbb{P}(V_{i+j+1}) & \textit{(par indépendance des lancers)} \\
= \ & \prod_{k=1}^{i} (1-p) \times \left(\prod_{k=1}^{i} p \right) \times (1-p) \ + \ \prod_{k=1}^{i} p \times \left(\prod_{k=1}^{i} (1-p) \right) \times p \\
= \ & (1-p)^i \times p^j \times (1-p) \ + \ p^i \times (1-p)^j \times p \\
= \ & (1-p)^{i+1} \times p^j \ + \ p^{i+1} \times (1-p)^j
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \ \mathbb{P}\left([X=i] \cap [Y=j]\right) = p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1} p^j}$$

□

4. a) En déduire la loi de la variable aléatoire Y.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.
La famille $([X=i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=j]) \ &= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([X=i] \cap [Y=j]\right) \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \left(p^{i+1}(1-p)^j + (1-p)^{i+1} p^j\right) \\
&= \ (1-p)^j \sum_{i=1}^{+\infty} p^{i+1} + p^j \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i+1} & (*) \\
&= \ p^2 \ (1-p)^j \sum_{i=1}^{+\infty} p^{i-1} + (1-p)^2 \ p^j \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{i-1} \\
&= \ p^2 \ (1-p)^j \sum_{i=0}^{+\infty} p^{i} + (1-p)^2 \ p^j \sum_{i=0}^{+\infty} (1-p)^{i} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \ p^2 \ (1-p)^j \ \frac{1}{1-p} + (1-p)^2 \ p^j \ \frac{1}{1-(1-p)} \\
&= \ p^2 \ (1-p)^{j-1} + (1-p)^2 \ p^{j-1}
\end{aligned}$$

(∗) ce passage est justifié par le fait que les séries $\sum p^i$ et $\sum (1-p)^i$ sont convergentes en tant que séries géométriques de raison respective $p \in \,]0,1[$ et $1-p \in \,]0,1[$.

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall j \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Y=j]) = p^2 \ (1-p)^{j-1} + (1-p)^2 \ p^{j-1}}$$

□

b) Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance que l'on calculera.

Démonstration.

- La v.a.r. Y admet une espérance ssi la série $\sum\limits_{j\geqslant 1} j\ \mathbb{P}([Y=j])$ est absolument convergente.
  Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Notons $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} j\ \mathbb{P}([Y=j]) &= \sum_{j=1}^{N} \left(j\ p^2\ (1-p)^{j-1} + j\ (1-p)^2\ p^{j-1}\right) \\ &= p^2 \sum_{j=1}^{N} j\ (1-p)^{j-1} + (1-p)^2 \sum_{j=1}^{N} j\ p^{j-1}\end{aligned}$$

  On reconnaît les sommes partielles de séries géométriques dérivées premières convergentes car de raison respective $(1-p) \in\ ]-1,1[$ et $p \in\ ]-1,1[$.
- Ainsi, la série $\sum\limits_{j\geqslant 1} j\ \mathbb{P}([Y=j])$ est convergente.
  La v.a.r. Y admet donc une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum_{j=1}^{+\infty} j\ \mathbb{P}([Y=j]) \\ &= p^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j\ (1-p)^{j-1} + (1-p)^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j\ p^{j-1} \\ &= p^2\ \frac{1}{(1-(1-p))^2}\ +\ (1-p)^2\ \frac{1}{(1-p)^2} \\ &= 1+1 = 2\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y) = 2}$$

□

5. a) Établir que, si $p \neq \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.
(On pourra envisager $\mathbb{P}\left([X=1] \cap [Y=1]\right)$)

Démonstration.
Supposons que $p \neq \frac{1}{2}$.

- D'après la question ***3.*** :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) &= p^2\ (1-p) + p\ (1-p)^2 \\ &= p\ (1-p)\ (\cancel{p} + (1-\cancel{p})) \\ &= p\ (1-p)\end{aligned}$$

- Par ailleurs d'après la question ***2.a)*** :

$$\mathbb{P}([X=1]) = p\ (1-p) + p\ (1-p) = 2\ p\ (1-p)$$

  et d'après la question ***4.a)*** :

$$\mathbb{P}([Y=1]) = p^2 + (1-p)^2$$

- Raisonnons par équivalence.

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) \ = \ \mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}([Y=1]) \\ \Leftrightarrow & p\ (1-p) \ = \ 2\ p\ (1-p)\times(p^2+(1-p)^2) \\ \Leftrightarrow & 1 \ = \ 2\ \dfrac{p\ (1-p)}{p\ (1-p)}\ (p^2+(1-p)^2) \qquad\qquad (\textit{car } p(1-p)\neq 0) \\ \Leftrightarrow & 2\ (p^2+(1-p)^2)-1=0 \\ \Leftrightarrow & 2\ (2p^2-2p+1)-1=0 \\ \Leftrightarrow & 4p^2-4p+1=0 \\ \Leftrightarrow & (2p-1)^2=0 \\ \Leftrightarrow & p=\dfrac{1}{2} \end{array}$$

Or comme $p\neq\frac{1}{2}$, la dernière égalité n'est pas vérifiée. Il en est de même de la première :

$$\mathbb{P}([X=1]\cap[Y=1]) \ \neq \ \mathbb{P}([X=1])\times\mathbb{P}([Y=1])$$

$$\boxed{\text{Si } p\neq\frac{1}{2},\ X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□

b) Démontrer que, si $p=\frac{1}{2}$, les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Démonstration.
On suppose que $p=\frac{1}{2}$. Ainsi, $1-p=\frac{1}{2}$.
Soit $(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2$.

- D'après la question ***3.*** :

$$\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j}+\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{j} \ = \ 2\ \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j+1} \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}$$

- Par ailleurs d'après la question ***2.a)*** :

$$\mathbb{P}([X=i]) \ = \ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} \ = \ 2\ \frac{1}{2}\ \left(\frac{1}{2}\right)^{i} \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{i}$$

et d'après la question ***4.a)*** :

$$\mathbb{P}([Y=j]) \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} \ = \ 2\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{j}$$

- Finalement :

$$\mathbb{P}([X=i]\cap[Y=j]) \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j} \ = \ \left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{j} \ = \ \mathbb{P}([X=i])\times\mathbb{P}([Y=j])$$

$$\boxed{\text{Si } p=\frac{1}{2},\ X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$$

□

Remarque
L'énoncé rate l'occasion de poser une question intéressante : « déterminer $\mathbb{E}(XY)$ dans ce cas ». On sait que X et Y sont indépendantes, et que ces deux v.a.r. admettent une espérance. On en déduit que XY admet une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(XY) \ = \ \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y) \ = \ 2 \times 2 \ = \ 4$$

(d'après les questions ***2.c)*** et ***4.b)***)

Exercice 6 : EDHEC 2011

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de n urnes, numérotées de 1 à n, contenant chacune n boules. On répète n épreuves, chacune consistant à choisir une urne au hasard et à en extraire une boule au hasard. On suppose que les choix des urnes sont indépendants les uns des autres.
Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note X_i la variable aléatoire prenant la valeur 1 si l'urne numérotée i contient toujours n boules au bout de ces n épreuves, et qui prend la valeur 0 sinon.

1. a) Pour tout i et tout k, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on note $U_{i,k}$ l'évènement « l'urne numéro i est choisie à la $k^{\text{ème}}$ épreuve ».
Écrire l'évènement $[X_i = 1]$ à l'aide de certains des évènements $U_{i,k}$, puis montrer que :

$$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, \ \mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- L'urne i contienne n boules à la fin de n tirages si et seulement si elle n'est choisie à aucun tirage. Ainsi l'événement $[X_i = 1]$ est réalisé si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'événement $U_{i,k}$ n'est pas réalisé.

$$\boxed{\text{On a donc : } [X_i = 1] = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}}.}$$

- Soient $k \in [\![1, n]\!]$.
À chaque tirage, on choisit une urne de manière équiprobable parmi les n urnes disponibles. Ainsi : $\mathbb{P}(U_{i,k}) = \dfrac{1}{n}$. On en déduit :

$$\mathbb{P}\left(\overline{U_{i,k}}\right) = 1 - \mathbb{P}(U_{i,k}) = 1 - \frac{1}{n}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_i = 1]) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{U_{i,k}}\right) && \textit{(car les choix des urnes sont indépendants)} \\ &= \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) && \textit{(d'après les calculs précédents)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!], \ \mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$$

□

b) Justifier également que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, on a :

$$\mathbb{P}\left([X_i = 1] \cap [X_j = 1]\right) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

Démonstration.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

- L'événement $[X_i = 1] \cap [X_j = 1]$ est réalisé si et seulement si auncune des deux urnes i et j n'est choisie lors des tirages, *i.e.* si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}}$ est réalisé. Ainsi :
$$[X_i = 1] \cap [X_j = 1] = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k}} \cap \overline{U_{j,k}} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}}$$
- Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Les événements $U_{i,k}$ et $U_{j,k}$ sont incompatibles (on ne peut pas choisir en même temps les urnes i et j sur un seul tirage). On en déduit :
$$\mathbb{P}(U_{i,k} \cup U_{j,k}) = \mathbb{P}(U_{i,k}) + \mathbb{P}(U_{j,k}) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}$$
Enfin :
$$\mathbb{P}\Big(\overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}}\Big) = 1 - \mathbb{P}(U_{i,k} \cup U_{j,k}) = 1 - \frac{2}{n}$$
- En combinant ces résultats, on obtient :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} \overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}}\right) & \\ & = & \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\Big(\overline{U_{i,k} \cup U_{j,k}}\Big) & \textit{(car les choix des urnes sont indépendants)} \\ & = & \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{2}{n}\right) & \textit{(d'après les calculs précédents)} \\ & = & \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n & \end{array}$$

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j,\ \mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}$$

□

c) Comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ et en déduire que, si i et j sont deux entiers distincts, éléments de $\{1, 2, ..., n\}$, alors les variables X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

Démonstration.

- Pour comparer $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$, on étudie le signe de leur différence.

$$1 - \frac{2}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = \cancel{1} - \cancel{\frac{2}{n}} - \left(\cancel{1} - \cancel{\frac{2}{n}} + \frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{n^2} < 0$$

$$\boxed{1 - \frac{2}{n} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$$

- Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
D'après la question ***1.b)***, on sait que :

$$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

D'après la question ***1.a)***, on sait que :

$$\mathbb{P}([X_i = 1])\ \mathbb{P}([X_j = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right)^n$$

- Or, d'après le point précédent : $1 - \dfrac{2}{n} < \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^2$.

Par stricte croissance de la fonction élévation à la puissance n sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n < \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right)^n$$

- On en déduit que :

$$\mathbb{P}([X_i = 1] \cap [X_j = 1]) \ \neq\ \mathbb{P}([X_i = 1])\ \mathbb{P}([X_j = 1])$$

$$\boxed{\text{Les v.a.r. } X_i \text{ et } X_j \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□

2. On pose $Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Déterminer l'espérance de Y_n, notée $\mathbb{E}(Y_n)$.

Démonstration.

- Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, X_i admet une espérance car c'est une v.a.r. finie ($X_i(\Omega) = \{0,1\}$).
La v.a.r. Y_n admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent.
- Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

Or, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\mathbb{E}(X_i) = \cancel{0 \times \mathbb{P}([X_i = 0])} + 1 \times \mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

- On obtient alors :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$$

□

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n)}{n}$ et donner un équivalent de $\mathbb{E}(Y_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} &= \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \\ &= \exp\left(\ln\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)\right) \\ &= \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

- De plus, on sait que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$, donc $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n}$. D'où :
  $$n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \cancel{n} \times \left(-\frac{1}{\cancel{n}}\right) = -1$$
  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right) = -1$.
  Enfin, comme la fonction exp est continue en -1, donc, par composition de **limites** :
  $$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-1}$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} = \mathrm{e}^{-1}.}$$

- On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n)}{n} = \mathrm{e}^{-1}$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbb{E}(Y_n)}{\mathrm{e}^{-1}\, n} = 1$.
  D'où : $\mathbb{E}(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-1}\, n$.
  $$\boxed{\text{Autrement dit : } \mathbb{E}(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{\mathrm{e}}.}$$

□

3. Pour tout i de $\{1, 2, ..., n\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre de boules manquantes dans l'urne numérotée i à la fin de ces n épreuves.

a) Donner sans calcul la loi de N_i ainsi que la valeur de $\mathbb{E}(N_i)$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- L'expérience consiste à effectuer n épreuves successives ayant deux issues :
  - × l'une est nommée succès (choisir l'urne i) et se produit avec probabilité $\frac{1}{n}$.
  - × l'autre est nommée échec (choisir une urne différente de i) et se produit avec probabilité $1 - \frac{1}{n}$.

  Ces n épreuves sont indépendantes d'après l'énoncé.
- La v.a.r. N_i compte le nombre de succès de cette expérience.
  Elle suit donc une loi binomiale de paramètre (n, p).
  $$\boxed{N_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(N_i) = n \times \frac{1}{n} = 1.}$$

□

b) Que vaut le produit $N_i X_i$?

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Deux cas se produisent.

- Si l'urne i contient encore n boules à la fin des n tirages, alors :
  - × $N_i = 0$ puisqu'il n'y a aucune boule manquante dans l'urne i.
  - × $X_i = 1$ par définition de X_i.

  On obtient dans ce cas : $N_i X_i = 0$.
- Si l'urne i ne contient pas n boules à la fin des tirages, alors :
  - × $N_i = k$ où k est le nombre de boules manquantes dans l'urne i.
  - × $X_i = 0$ car l'urne i ne contient pas n boules.

  Dans ce cas, on obtient encore : $N_i X_i = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } N_i X_i = 0.}$$

□

c) Les variables N_i et X_i sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- La v.a.r. $N_i X_i$ admet une espérance car c'est une v.a.r. finie (c'est en fait la v.a.r. constante égale à 0). De plus : $\mathbb{E}(N_i X_i) = 0$.
- D'après la question ***2.a)***, $\mathbb{E}(X_i) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

  D'après la question ***3.a)***, $\mathbb{E}(N_i) = 1$.

$$\mathbb{E}(N_i)\ \mathbb{E}(X_i) = 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \neq 0 \ = \ \mathbb{E}(N_i X_i)$$

$$\boxed{\text{Comme } \mathbb{E}(N_i X_i) \neq \mathbb{E}(N_i)\ \mathbb{E}(X_i) \text{, les v.a.r. } N_i \text{ et } X_i \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Remarque
On pouvait aussi revenir à la définition de l'indépendance. Par exemple :

- D'après la question ***3.b)*** : $N_i X_i = 0$.
  On remarque alors que :
  $$[N_i = 1] \cap [X_i = 1] = [N_i X_i = 1]$$
  Ainsi :
  $$\mathbb{P}([N_i = 1] \cap [X_i = 1]) = \mathbb{P}([N_i X_i = 1]) = 0$$
- Or, d'après la question ***2.a)*** :
  $$\mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$
  et d'après la question ***3.a)*** :
  $$\mathbb{P}([N_i = 1]) = \binom{n}{1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \cancel{n} \frac{1}{\cancel{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$$
- Finalement :
  $$\mathbb{P}([N_i = 1])\ \mathbb{P}([X_i = 1]) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n-1} \neq 0 = \mathbb{P}([N_i = 1] \cap [X_i = 1])$$

□

4. On rappelle que `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie au hasard un entier de $[\![1,n]\!]$.
Compléter le programme informatique suivant pour qu'il simule l'expérience décrite au début de cet exercice et affiche les valeurs prises par X_1 et N_1 pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
1  n = input('Donnez un entier naturel n supérieur ou égal à 2')
2  n1 = 0
3  x1 = 1
4  for k = 1:n
5      hasard = grand(1,1,'uin',1,n)
6      if hasard == 1 then
7          x1 = .........
8          n1 = .........
9      end
10 end
11 disp(x1)
12 disp(n1)
```

Démonstration.

- Le programme consiste à simuler les v.a.r. N_1 et X_1. Ainsi, les variables `n1` et `x1` doivent contenir à la fin du programme une réalisation des v.a.r. N_1 et X_1.
- La boucle `for` du programme permet de simuler les n tirages successifs. À chaque tour de boucle, les variables `x1` et `n1` doivent être mises à jour. Détaillons ce point :
  - × en ligne 5, la variable `hasard` contient une valeur entière aléatoirement choisie entre 1 et n. Cette instruction permet de simuler le choix aléatoire du numéro de l'urne dans laquelle on tire une boule à chaque tirage.
  - × si l'urne choisie est la numéro 1 (ligne 6), alors :
    - l'urne 1 ne contient plus n boules. La variable `x1` doit donc être affectée à 0 (ligne 7).

      ```
      7          x1 = 0
      ```

    - il y a donc une boule manquante supplémentaire pour l'urne 1. La variable `n1` qui compte le nombre de boules manquantes dans l'urne 1 doit donc être incrémentée de 1 (ligne 8).

      ```
      8          n1 = n1 + 1
      ```

- Le programme se termine par l'affichage des variables `n1` et `x1` (lignes 11 et ligne 12).

□

Exercice 7 : HEC 2010

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q = 1-p$.
Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $\frac{1}{p}$).
On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.
On rappelle que $T + Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

1. a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

Démonstration.
Rappelons tout d'abord que $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_1 = k]) = p\ q^{k-1}$.

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1) = \frac{q}{p^2}}$$

$$\boxed{\text{Enfin, pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) = 1 - q^k.}$$

Remarque

- Notons que la valeur de $\mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$ (pour $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$) n'est pas un attendu du programme. Cependant, c'est une propriété très classique de la loi géométrique. Elle doit donc être connue et on se doit de savoir la redémontrer.
- Rappelons maintenant la démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
  Notons que : $[X_1 \leqslant k] \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} \ [X_1 = i]$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \ [X_1 = i]\right) & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left([X_1 = i]\right) & \textit{(les événements } [X_1 = i] \textit{ étant incompatibles)} \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{k} p\ q^{i-1} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
& = & p \sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i \ = \ p\ \dfrac{1-q^k}{1-q} & \textit{(car } q \neq 1\textit{)} \\
& = & 1 - q^k &
\end{array}$$

□

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 + X_2)$, $\mathbb{E}(X_1 - X_2)$, $\mathbb{V}(X_1 - X_2)$.

Démonstration.

- Les v.a.r. $X_1 + X_2$ et $X_1 - X_2$ admettent une espérance (resp. une variance) car sont des combinaisons linéaires de v.a.r. qui admettent une espérance (resp. une variance).
- Par linéarité de l'espérance :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(X_1 + X_2) & = & \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) \\
& = & \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p} \\
& = & \dfrac{2}{p}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(X_1 - X_2) & = & \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) \\
& = & \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p} \\
& = & 0
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \frac{2}{p} \ \text{ et } \ \mathbb{E}(X_1 - X_2) = 0}$$

- Les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes. Donc, par propriété de la variance :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{V}(X_1+X_2) & = & \mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(X_2) \\ & = & \dfrac{q}{p^2}+\dfrac{q}{p^2} \\ & = & 2\ \dfrac{q}{p^2} \end{array}$$

  D'après le lemme des coalitions, les v.a.r. X_1 et $-X_2$ sont indépendantes.
  Donc, par propriété de la variance :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{V}(X_1-X_2) & = & \mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(-X_2) \\ & = & \mathbb{V}(X_1)+(-1)^2\ \mathbb{V}(X_2) \\ & = & \mathbb{V}(X_1)+\mathbb{V}(X_2) \ = \ 2\ \dfrac{q}{p^2} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1+X_2)=2\ \dfrac{q}{p^2} \ \text{ et } \ \mathbb{V}(X_1-X_2)=2\ \dfrac{q}{p^2}.}$$

Remarque
Attention à l'erreur classique. Même si X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$\mathbb{V}(X_1-X_2) \neq \mathbb{V}(X_1)-\mathbb{V}(X_2)$$

□

c) Établir la relation : $\mathbb{P}([X_1=X_2])=\dfrac{p}{1+q}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $[X_1=X_2]=[X_1-X_2=0]$.
- La famille $([X_2=k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X_1-X_2=0]) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=k]\cap[X_1-X_2=0]) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=k]\cap[X_1-k=0]) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=k]\cap[X_1=k]) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=k])\ \mathbb{P}([X_1=k]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p\ q^{k-1}\ p\ q^{k-1} & \\ & = & p^2 \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} & \\ & = & p^2 \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (q^2)^{k} \ = \ p^2\ \dfrac{1}{1-q^2} & \textit{(car } q^2\in\,]0,1[\textit{)} \\ & = & p^{\cancel{2}}\ \dfrac{1}{\cancel{(1-q)}(1+q)} \ = \ \dfrac{p}{1+q} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X_1=X_2])=\dfrac{p}{1+q}}$$

□

2. a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2$.
En déduire $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{V}(Z)$ et $\mathbb{E}(T)$.

Démonstration.

- Comme $Z = \min(X_1, X_2)$ et que $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Remarquons tout d'abord que :

$$[Z > k] \;=\; [\min(X_1, X_2) > k] \;=\; [X_1 > k] \cap [X_2 > k]$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Z > k]) & = & \mathbb{P}([X_1 > k] \cap [X_2 > k]) & \\
& = & \mathbb{P}([X_1 > k]) \quad \times \quad \mathbb{P}([X_2 > k]) & \textit{(car X_1 et X_2 sont indépendantes)} \\
& = & (1 - \mathbb{P}([X_1 \leqslant k]) \quad \times \quad (1 - \mathbb{P}([X_2 \leqslant k]) & \\
& = & (\cancel{1} - (\cancel{1} - q^k)) \quad \times \quad (\cancel{1} - (\cancel{1} - q^k)) & \textit{(d'après la question \textbf{1.})} \\
& = & q^k \quad \times \quad q^k & \\
& = & \left(q^2\right)^k &
\end{array}$$

Enfin, comme Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([Z > 0]) = \mathbb{P}([Z \in \mathbb{N}^*]) = 1$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Z > k]) = \left(q^2\right)^k}$$

- Tout d'abord :

$$[Z \geqslant k] = [Z > k] \cup [Z = k]$$

De plus, comme Z est à valeurs entières : $[Z \geqslant k] = [Z > k-1]$. Ainsi :

$$[Z > k-1] = [Z = k] \cup [Z > k]$$

Les événements $[Z = k]$ et $[Z > k]$ étant incompatibles :

$$\mathbb{P}([Z > k-1]) = \mathbb{P}([Z = k]) + \mathbb{P}([Z > k])$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([Z = k]) = \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k]).}$$

- En combinant ces résultats, on obtient :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{P}([Z = k]) & = & \mathbb{P}([Z > k-1]) - \mathbb{P}([Z > k]) \\
& = & \left(q^2\right)^{k-1} - \left(q^2\right)^k \\
& = & \left(q^2\right)^{k-1} (1 - q^2) \\
& = & \Big(1 - (1 - q^2)\Big)^{k-1} (1 - q^2)
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1 - q^2\right).}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi } Z \text{ admet une espérance et une variance. De plus :} \\ \mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{1-q^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Z) = \dfrac{1-(1-q^2)}{(1-q^2)^2} = \dfrac{q^2}{(1-q^2)^2}.\end{array}}$$

- Enfin, comme $T + Z = \max(X_1, X_2) + \min(X_1, X_2) = X_1 + X_2$, alors :

$$T = X_1 + X_2 - Z$$

La v.a.r. T admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance.
De plus, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(T) & = & \mathbb{E}(X_1 + X_2 - Z) \\ & = & \mathbb{E}(X_1 + X_2) - \mathbb{E}(Z) \\ & = & \dfrac{2}{p} - \dfrac{1}{1-q^2} \\ & = & \dfrac{2}{1-q} - \dfrac{1}{(1-q)(1+q)} \\ & = & \dfrac{2\ (1+q) - 1}{1-q^2} \ = \ \dfrac{1+2q}{1-q^2} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \dfrac{1+2q}{1-q^2}}$$

□

b) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité : $[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]$.

En déduire la relation suivante : $\mathbb{P}([T = k]) = 2\ \mathbb{P}([X_1 = k]) - \mathbb{P}([Z = k])$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{array}{rl} & \omega \text{ réalise } [Z = k] \ \cup \ [T = k] \\ \Leftrightarrow & Z(\omega) = k \ \texttt{OU} \ T(\omega) = k \\ \Leftrightarrow & \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \end{array}$$

Procédons par disjonstion de cas :

× si $\max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_1(\omega)$:

Dans ce cas, $\min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_2(\omega)$ et :

$$\begin{array}{rl} & \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \\ \Leftrightarrow & X_2(\omega) = k \ \texttt{OU} \ X_1(\omega) = k \end{array}$$

× si $\max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = X_2(\omega)$:

Dans ce cas :

$$\begin{array}{rl} & \max(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \ \texttt{OU} \ \min(X_1(\omega), X_2(\omega)) = k \\ \Leftrightarrow & X_1(\omega) = k \ \texttt{OU} \ X_2(\omega) = k \end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rl} & \omega \text{ réalise } [Z = k] \ \cup \ [T = k] \\ \Leftrightarrow & X_1(\omega) = k \ \texttt{OU} \ X_2(\omega) = k \\ \Leftrightarrow & \omega \text{ réalise } [X_1 = k] \ \cup \ [X_2 = k] \end{array}$$

$$\boxed{[Z = k] \cup [T = k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]}$$

- Or :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Z=k]\cup[T=k]) &= \mathbb{P}([Z=k])+\mathbb{P}([T=k])-\mathbb{P}([Z=k]\cap[T=k])\\ &= \mathbb{P}([Z=k])+\mathbb{P}([T=k])-\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])\end{aligned}$$
En effet, on peut démontrer en procédant comme en début de question que :
$$[Z=k]\cap[T=k] \ = \ [X_1=k]\cap[X_2=k]$$
- De même :
$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_1=k]\cup[X_2=k]) &= \mathbb{P}([X_1=k])+\mathbb{P}([X_2=k])-\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])\\ &= 2\ \mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])\end{aligned}$$
En effet : $\mathbb{P}([X_1=k])=\mathbb{P}([X_2=k])$ car X_1 et X_2 suivent la même loi.
- D'après ce qui précède :
$$\mathbb{P}([Z=k]\ \cup\ [T=k]) \ = \ \mathbb{P}([X_1=k]\ \cup\ [X_2=k])$$
d'où $\mathbb{P}([Z=k])+\mathbb{P}([T=k])-\cancel{\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])} \ = \ 2\ \mathbb{P}([X_1=k])-\cancel{\mathbb{P}([X_1=k]\cap[X_2=k])}$

et $\quad \mathbb{P}([T=k]) \ = \ 2\ \mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([Z=k])$
$$\boxed{\mathbb{P}([T=k]) \ = \ 2\ \mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([Z=k])}$$

Remarque

- Dans l'énoncé, il est demander de « justifier l'égalité » et non de la démontrer. Cette nuance signifie généralement que des points seront attribués même pour une explication avec les mains.
- Il est pratique pour conclure que de dire que les événements $[T=k]$ et $[Z=k]$ (resp. $[X_1=k]$ et $[X_2=k]$) sont incompatibles. Mais on ne peut en aucun cas affirmer une telle chose !
Il peut exister $\omega\in\Omega$ tel que $\max(X_1(\omega),X_2(\omega))=k$ et $\min(X_1(\omega),X_2(\omega))=k$.
Cela se produit pour tout $\omega\in\Omega$ tel que : $X_1(\omega)=X_2(\omega)=k$. □

c) Établir la formule : $\mathbb{V}(T)=\dfrac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X_1(\Omega)=X_2(\Omega)=\mathbb{N}^*$ alors : $T(\Omega)=\big(\max(X_1,X_2)\big)(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$.
- La v.a.r. T admet une variance ssi elle admet un moment d'ordre 2. Autrement dit, la v.a.r. T admet une variance ssi la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k^2\ \mathbb{P}([T=k])$ est absolument convergente.
Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N\in\mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} k^2\ \mathbb{P}([T=k]) &= \sum_{k=1}^{N} k^2\ \big(2\ \mathbb{P}([X_1=k])-\mathbb{P}([Z=k])\big)\\ &= 2\sum_{k=1}^{N} k^2\ \mathbb{P}([X_1=k])-\sum_{k=1}^{N} k^2\ \mathbb{P}([Z=k])\end{aligned}$$
Or X_1 et Z admettent un moment d'ordre 2 car admettent une variance.
De plus, comme $X_1(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $Z(\Omega)=\big(\min(X_1,X_2)\big)(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$ alors :
$$\mathbb{E}(X_1^2)=\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\ \mathbb{P}([X_1=k]) \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Z^2)=\sum_{k=1}^{+\infty} k^2\ \mathbb{P}([Z=k])$$

- On en déduit que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k^2\ \mathbb{P}([T=k])$ est convergente et par passage à la limite dans l'égalité précédente :

$$\begin{array}{rcll}
\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^2\ \mathbb{P}([T=k]) & = & 2\ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^2\ \mathbb{P}([X_1=k]) - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k^2\ \mathbb{P}([Z=k]) & \\
 & = & 2\ \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(Z^2) & \\
 & = & 2\ \big(\mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2\big) - \big(\mathbb{V}(Z) + (\mathbb{E}(Z))^2\big) & \textit{(par la formule de Kœnig-Huygens)} \\
 & = & 2\ \left(\dfrac{q}{p^2} + \left(\dfrac{1}{p}\right)^2\right) - \left(\dfrac{q^2}{(1-q^2)^2} + \left(\dfrac{1}{1-q^2}\right)^2\right) & \textit{(d'après les questions précédentes)} \\
 & = & 2\ \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{q^2+1}{(1-q^2)^2} &
\end{array}$$

$$\boxed{T \text{ admet un moment d'ordre 2 et } \mathbb{E}(T^2) = 2\ \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{q^2+1}{(1-q^2)^2}.}$$

- Par la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{V}(T) & = & \mathbb{E}(T^2) - \big(\mathbb{E}(T)\big)^2 \\
 & = & \left(2\ \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{q^2+1}{(1-q^2)^2}\right) - \left(\dfrac{1+2q}{1-q^2}\right)^2 \\
 & = & 2\ \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{q^2+1}{(1-q^2)^2} - \dfrac{1+4q+4q^2}{(1-q^2)^2} \\
 & = & 2\ \dfrac{q+1}{p^2} - \dfrac{2+4q+5q^2}{(1-q^2)^2} \\
 & = & 2\ \dfrac{q+1}{(1-q)^2} - \dfrac{2+4q+5q^2}{\big((1-q)\ (1+q)\big)^2} \\
 & = & 2\ \dfrac{(q+1)(1+q)^2}{(1-q)^2\ (1+q)^2} - \dfrac{2+4q+5q^2}{\big((1-q)\ (1+q)\big)^2} \\
 & = & \dfrac{1}{(1-q)^2\ (1+q)^2}\ \big(2\ (1+q)^3 - (2+4q+5q^2)\big) \\
 & = & \dfrac{1}{(1-q)^2\ (1+q)^2}\ \big(2\ (1+3q+3q^2+q^3) - (2+4q+5q^2)\big) \\
 & = & \dfrac{1}{(1-q)^2\ (1+q)^2}\ \big(2q+q^2+2q^3\big) \ = \ \dfrac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q)^2\ (1+q)^2}
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(T) = \dfrac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q)^2\ (1+q)^2}}$$

Remarque

- Il faut prendre le réflexe de connaître la formule de Kœnig-Huygens dans les deux sens. L'écriture :
$$\mathbb{V}(X_1) \ = \ \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2$$
fournit l'égalité :
$$\mathbb{E}(X_1^2) \ = \ \mathbb{V}(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2$$
qui est utilisée dans la démonstration.
- On pouvait aussi calculer $\mathbb{V}(T)$ en s'aidant de l'égalité :
$$T + Z \ = \ X_1 + X_2$$
Comme $T = X_1 + X_2 - Z$ alors T admet un moment d'ordre 2 comme somme de v.a.r. qui admettent un moment d'ordre 2. De la même manière, $T + Z$ admet un moment d'ordre 2. On a alors :
$$\mathbb{V}(T+Z) \ = \ \mathbb{V}(X_1 + X_2) \ = \ \frac{2\ q}{p^2}$$
D'autre part :
$$\mathbb{V}(T+Z) \ = \ \mathbb{V}(T) + \mathbb{V}(Z) + 2\ \mathrm{Cov}(T, Z)$$
On en déduit donc que :
$$\begin{aligned} \mathbb{V}(T) \ &= \ \frac{2\ q}{p^2} - \mathbb{V}(Z) - 2\ \mathrm{Cov}(T,Z) \\ &= \ \frac{2\ q}{p^2} - \frac{q^2}{(1-q^2)^2} - 2\ \mathrm{Cov}(T,Z) \end{aligned}$$
Par la formule de Kœnig-Huygens :
$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(T,Z) \ &= \ \mathbb{E}(TZ) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) \\ &= \ \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) && \textit{(car } TZ = X_1X_2 \textit{ (*))} \\ &= \ \mathbb{E}(X_1)\ \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(T)\ \mathbb{E}(Z) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \ \frac{1}{p}\ \frac{1}{p} - \frac{1+2q}{1-q^2}\ \frac{1}{1-q^2} \\ &= \ \frac{1}{p^2} - \frac{1+2q}{(1-q^2)^2} \end{aligned}$$
((*) $TZ = \max(X_1, X_2)\ \min(X_1, X_2) = X_1\ X_2$)
En combinant tous ces résultats, on obtient :
$$\begin{aligned} \mathbb{V}(T) \ &= \ \frac{2\ q}{p^2} - \frac{q^2}{(1-q^2)^2} - 2\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1+2q}{(1-q^2)^2}\right) \\ &= \ \frac{2\ (q-1)}{p^2} + \frac{-q^2+4q+2}{(1-q^2)^2} \\ &= \ \frac{2\ (q-1)}{(1-q)^2} + \frac{-q^2+4q+2}{(1-q^2)^2} \\ &= \ \frac{1}{(1-q^2)^2}\left(2\ (q-1)(1+q)^2 - q^2 + 4q + 2\right) \\ &= \ \frac{1}{(1-q^2)^2}\ \left(2q + q^2 + 2q^3\right) \ = \ \frac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q^2)^2} \end{aligned}$$

□

3. a) Préciser $(T-Z)(\Omega)$. Exprimer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'évènement $[Z=j] \cap [Z=T]$ en fonction des évènements $[X_1=j]$ et $[X_2=j]$.
En déduire pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\mathbb{P}([Z=j] \cap [Z=T])$.

Démonstration.

- Rappelons que : $T-Z = |X_1 - X_2|$.
Tout d'abord, comme $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors :
$$\begin{array}{rcl} (X_1 - X_2)(\Omega) & = & \{X_1(\omega) - X_2(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & \subset & \{i-j \mid (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2\} \ = \ \mathbb{Z} \end{array}$$
Ainsi, $(|X_1 - X_2|)(\Omega) \subset \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+ = \mathbb{N}$.
$$\boxed{(T-Z)(\Omega) \subset \mathbb{N}}$$
- Soit $j \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{array}{rcl} [Z=j] \ \cap \ [Z=T] & = & [\min(X_1,X_2)=j] \ \cap \ [\min(X_1,X_2) = \max(X_1,X_2)] \\ & = & [\min(X_1,X_2)=j] \ \cap \ [\max(X_1,X_2)=j] \\ & = & [X_1=j] \ \cap \ [X_2=j] \end{array}$$
$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*, [Z=j] \ \cap \ [Z=T] = [X_1=j] \ \cap \ [X_2=j]}$$
- Ainsi :
$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [Z=T]) & = & \mathbb{P}([X_1=j] \ \cap \ [X_2=j]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1=j]) \ \times \ \mathbb{P}([X_2=j]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & p\ q^{j-1} \times p\ q^{j-1} \ = \ p^2\ q^{2j-2} & \end{array}$$
$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [Z=T]) = p^2\ q^{2j-2}}$$

□

b) Montrer que pour tout couple (j,l) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a : $\mathbb{P}([Z=j] \cap [T-Z=l]) = 2p^2q^{2j+l-2}$.

Démonstration.

- Soit $(j,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
$$\begin{array}{rcl} [Z=j] \ \cap \ [T-Z=l] & = & [Z=j] \ \cap \ [T-j=l] \\ & = & [Z=j] \ \cap \ [T=j+l] \\ & = & [\min(X_1,X_2)=j] \ \cap \ [\max(X_1,X_2)=j+l] \\ & = & \big([X_1=j] \cap [X_2=j+l]\big) \ \cup \ \big([X_1=j+l] \cap [X_2=j]\big) \end{array}$$
Il s'agit d'une réunion de deux événements incompatibles. En effet :
$$\begin{array}{rl} & \big([X_1=j] \cap [X_2=j+l]\big) \ \cap \ \big([X_1=j+l] \cap [X_2=j]\big) \\ = & \big([X_1=j] \cap [X_1=j+l]\big) \cap \big([X_2=j] \cap [X_2=j+l]\big) \\ = & \varnothing \ \cap \ \varnothing \ = \ \varnothing \end{array}$$
En effet : $[X_1=j] \cap [X_1=j+l] = \varnothing$ car $j+l > j$ puisque $l \geqslant 1 > 0$.

- Ainsi :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T-Z=l]) \\
= \ & \mathbb{P}\big([X_1=j]\cap[X_2=j+l]\big) \ + \ \mathbb{P}\big([X_1=j+l]\cap[X_2=j]\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big([X_1=j]\big)\times\mathbb{P}([X_2=j+l]\big) \ + \ \mathbb{P}\big([X_1=j+l]\big)\times\mathbb{P}\big([X_2=j]\big) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépdendantes)} \\
= \ & p\ q^{j-1}\times p\ q^{j+l-1} \ + \ p\ q^{j+l-1}\times p\ q^{j-1} \\
= \ & p^2\ q^{2j+l-2}+p^2\ q^{2j+l-2} \ = \ 2\ p^2\ q^{2j+l-2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (j,l)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ \mathbb{P}([Z=j] \ \cap \ [T-Z=l]) = 2\ p^2\ q^{2j+l-2}}$$

□

c) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}([X_1-X_2=k]) = \dfrac{pq^{|k|}}{1+q}$.
(on distinguera trois cas : $k=0$, $k>0$ et $k<0$)

Démonstration.
Soit $k\in\mathbb{Z}$. On procède par disjonction de cas.

- Si $k=0$:

$$\mathbb{P}([X_1-X_2=k]) = \mathbb{P}([X_1-X_2=0]) = \mathbb{P}([X_1=X_2]) = \frac{p}{1+q} = \frac{pq^0}{1+q}$$

- Si $k>0$:
  La famille $([X_2=i])_{i\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1-X_2=k]) \ &= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=i] \ \cap \ [X_1-X_2=k]) \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=i] \ \cap \ [X_1-i=k]) \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=i] \ \cap \ [X_1=i+k]) \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2=i]) \ \times \ \mathbb{P}([X_1=i+k]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \ \sum_{i=1}^{+\infty} p\ q^{i-1} \ \times \ p\ q^{i+k-1} \\
&= \ p^2\ q^k \sum_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} \ = \ p^2\ q^k \sum_{i=1}^{+\infty} \big(q^2\big)^{i-1} \\
&= \ p^2\ q^k \sum_{i=0}^{+\infty} \big(q^2\big)^{i} && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \ p^2\ q^k\ \frac{1}{1-q^2} \ = \ p^{\cancel{2}}\ q^k\ \frac{1}{\cancel{(1-q)}\ (1+q)} && \textit{(car } q^2\in\,]-1,1[\textit{)} \\
&= \ \frac{p\ q^k}{1+q} \ = \ \frac{p\ q^{|k|}}{1+q}
\end{aligned}$$

- Si $k < 0$:

  On procède de la même manière que dans le point précédent. On obtient :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) & = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \mathbb{P}([X_1 = i+k]) & \\
& = & \sum\limits_{\substack{i=1 \\ \text{tel que } i+k \in \mathbb{N}^*}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \mathbb{P}([X_1 = i+k]) & \\
& + & \sum\limits_{\substack{i=1 \\ \text{tel que } i+k \notin \mathbb{N}^*}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \cancel{\mathbb{P}([X_1 = i+k])} & \textit{([}X_1 = i+k] = \varnothing \textit{ car } i+k \notin \mathbb{N}^*\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{i=-k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = i]) \times \mathbb{P}([X_1 = i+k]) & \left(\textit{car} \quad \begin{array}{rl} & i+k \geqslant 1 \\ \Leftrightarrow & i \geqslant -k+1 \end{array} \right) \\
& = & \sum\limits_{i=-k+1}^{+\infty} p\ q^{i-1} \times p\ q^{i+k-1} & \\
& = & \sum\limits_{i=1}^{+\infty} p\ q^{i-k-1} \times p\ q^{i-1} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & p^2\ q^{-k} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} q^{2i-2} & \\
& = & \dfrac{p^2\ q^{-k}}{1+q} \ = \ \dfrac{p\ q^{|k|}}{1+q} & \textit{(en procédant comme au point précédent)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) = \dfrac{p\ q^{|k|}}{1+q}}$$

□

d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1 - X_2|$.

Démonstration.

- Rappelons que : $T - Z = |X_1 - X_2|$.

$$\boxed{(|X_1 - X_2|)(\Omega) \subset \mathbb{N}}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Remarquons tout d'abord que :

$$[\ |X_1 - X_2| = k] \ = \ [X_1 - X_2 = k] \ \cup \ [X_1 - X_2 = -k]$$

  Deux cas se présentent :

  × si $k \neq 0$: alors les événements $[X_1 - X_2 = k]$ et $[X_1 - X_2 = -k]$ sont incompatibles. Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = k]) & = & \mathbb{P}([X_1 - X_2 = k]) + \mathbb{P}([X_1 - X_2 = -k]) & \\
& = & \dfrac{p\ q^k}{1+q} + \dfrac{p\ q^k}{1+q} \ = \ 2\ \dfrac{p\ q^k}{1+q} & \textit{(car } |k| = k\textit{)}
\end{array}$$

  × si $k = 0$:

$$\mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = 0]) \ = \ \mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) \ = \ \dfrac{p}{1+q}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = k]) = 2\ \dfrac{p\ q^k}{1+q} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = 0]) = \dfrac{p}{1+q}}$$

□

e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T-Z$ sont indépendantes.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer :

$$\forall j \in Z(\Omega),\ \forall l \in (T-Z)(\Omega),\ \mathbb{P}([Z=j] \cap [T-Z=l]) \ = \ \mathbb{P}([Z=j]) \times \mathbb{P}([T-Z=l])$$

avec $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $(T-Z)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

- Soit $(j,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}([Z=j]) \times \mathbb{P}([T-Z=l]) & \\ = & \left(q^2\right)^{j-1} (1-q^2) \times 2\ \dfrac{p\ q^l}{1+q} & \textit{(d'après les questions précédentes)} \\ = & q^{2j-2}\ (1-q)\ \cancel{(1+q)} \times 2\ \dfrac{p\ q^l}{\cancel{1+q}} & \\ = & q^{2j-2}\ p \times 2p\ q^l \ = \ 2\ p^2\ q^{2j+l-2} & \\ = & \mathbb{P}([Z=j]\ \cap\ [T-Z=l]) & \textit{(d'après la 3.c))} \end{array}$$

- Il reste à étudier le cas où $j \in \mathbb{N}^*$ et $l = 0$.

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}([Z=j]) \times \mathbb{P}([T-Z=0]) & \\ = & \left(q^2\right)^{j-1} (1-q^2) \times \dfrac{p}{1+q} & \textit{(d'après les questions précédentes)} \\ = & q^{2j-2}\ (1-q)\ \cancel{(1+q)} \times \dfrac{p}{\cancel{1+q}} & \\ = & q^{2j-2}\ p \times p \ = \ p^2\ q^{2j-2} & \\ = & \mathbb{P}([Z=j]\ \cap\ [T-Z=l]) & \textit{(d'après la 3.a))} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Les variables } Z \text{ et } T-Z \text{ sont indépendantes.}}$$

□

4. a) À l'aide du résultat de la question ***3.e)***, calculer $\mathrm{Cov}(Z,T)$.
Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

Démonstration.

- D'après la question ***3.e)***, les variables Z et $T-Z$ sont indépendantes. On en déduit que :

$$\mathrm{Cov}(Z, T-Z) = 0$$

Or, par linéarité gauche de l'opérateur Cov :

$$\underbrace{\mathrm{Cov}(Z, T-Z)}_{0} \ = \ \mathrm{Cov}(Z,T) \ - \ \underbrace{\mathrm{Cov}(Z,Z)}_{\mathbb{V}(Z)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathrm{Cov}(Z,T) \ = \ \mathbb{V}(Z) \ = \ \dfrac{q^2}{(1-q^2)^2}}$$

- Comme $q \neq 0$, $\mathrm{Cov}(Z,T) \neq 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, les v.a.r. } Z \text{ et } T \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

□

b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.

Démonstration.
Par définition :

$$\begin{array}{rcl}\rho(Z,T) & = & \dfrac{\mathrm{Cov}(Z,T)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \\ & = & \dfrac{\mathbb{V}(Z)}{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \ = \ \dfrac{\cancel{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}\ \sqrt{\mathbb{V}(Z)}}{\cancel{\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}\ \sqrt{\mathbb{V}(T)}} \\ & = & \sqrt{\dfrac{\frac{q^2}{(1-q^2)^2}}{\frac{q\ (2+q+2q^2)}{(1-q^2)^2}}} \ = \ \sqrt{\dfrac{q^2}{\cancel{(1-q^2)^2}}\ \dfrac{\cancel{(1-q^2)^2}}{q\ (2+q+2q^2)}} \\ & = & \sqrt{\dfrac{q}{2+q+2q^2}}\end{array}$$

$$\boxed{\rho(Z,T) = \sqrt{\dfrac{q}{2+q+2q^2}}}$$

□

c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z,T).

Démonstration.

- On rappelle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$ et $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On procède par disjonction de cas :
  - × si $i < j$: alors $[Z = j] \ \cap \ [T = i] = \varnothing$.
    En effet, $Z = \min(X_1, X_2) \ \leqslant \ \max(X_1, X_2) = T$.

$$\boxed{\text{Si } i < j,\ \mathbb{P}([Z = j] \ \cap \ [T = i]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0}$$

  - × si $i = j$: alors $[Z = j] \ \cap \ [T = j] = [X_1 = j] \ \cap \ [X_2 = j]$.

$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}([Z = j] \ \cap \ [T = j]) & = & \mathbb{P}([X_1 = j] \ \cap \ [X_2 = j]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1 = j]) \times \mathbb{P}([X_2 = j]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & p\ q^{j-1} \times p\ q^{j-1} \ = \ p^2\ q^{2j-2} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z = j] \ \cap \ [T = j]) \ = \ p^2\ q^{2j-2}}$$

  - × si $i > j$: alors $[Z = j] \ \cap \ [T = i] = ([X_1 = j] \cap [X_2 = i]) \ \cup \ ([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$.

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}([Z = j] \ \cap \ [T = i]) & \\ = & \mathbb{P}\big(\ ([X_1 = j] \cap [X_2 = i]) \ \cup \ ([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) \ \big) & \\ = & \mathbb{P}([X_1 = j] \cap [X_2 = i]) \ + \ \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) & \textit{(car } [X_1 = j] \cap [X_2 = i] \textit{ et } [X_1 = i] \cap [X_2 = j] \textit{ sont incompatibles)} \\ = & \mathbb{P}([X_1 = j]) \times \mathbb{P}([X_2 = i]) + \mathbb{P}([X_1 = i]) \times \mathbb{P}([X_2 = j]) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ = & p\ q^{j-1} \times p\ q^{i-1} + p\ q^{i-1} \times p\ q^{j-1} \ = \ 2\ p^2\ q^{i+j-2} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Si } i > j,\ \mathbb{P}([Z = j] \ \cap \ [T = i]) \ = \ 2\ p^2\ q^{i+j-2}.}$$

□

d) Déterminer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.

Démonstration.
Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

- Rappelons que $T(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

$$\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) \;=\; \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i])}{\mathbb{P}([Z = j])} \;=\; \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i])}{\left(q^2\right)^{j-1}\,(1 - q^2)}$$

La loi du couple (Z, T) étant donnée par cas, on procède par disjonction de cas :

× si $i < j$: alors $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

$$\boxed{\text{Si } i < j,\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) = 0.}$$

× si $i = j$: alors $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j]) = p^2\, q^{2j-2}$.

$$\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = j]) = \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j])}{\left(q^2\right)^{j-1}\,(1 - q^2)} = \frac{p^2\, \cancel{q^{2j-2}}}{\cancel{\left(q^2\right)^{j-1}}\,(1 - q^2)} = \frac{p^{\cancel{2}}}{\cancel{(1 - q)}\,(1 + q)} = \frac{p}{1 + q}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = j]) = \frac{p}{1 + q}}$$

× si $i > j$: alors $\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = i]) = 2\, p^2 q^{i+j-2}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) &= \frac{\mathbb{P}([Z = j] \cap [T = j])}{\left(q^2\right)^{j-1}\,(1 - q^2)} \\
&= \frac{2\, p^2\, q^{i+j-2}}{\left(q^2\right)^{j-1}\,(1 - q^2)} \\
&= \frac{2\, p^2 \cancel{q^{j-2}}\, q^i}{q^j\, \cancel{q^{j-2}}\,(1 - q^2)} \\
&= \frac{2\, p^{\cancel{2}}\, q^i}{q^j\, \cancel{(1 - q)}\,(1 + q)} \\
&= \frac{2\, p\, q^i}{q^j (1 + q)} = \frac{2\, p\, q^{i-j}}{1 + q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } i > j,\ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) = \frac{2\, p\, q^{i-j}}{1 + q}.}$$

□

e) Soit j un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z = j]$.
Calculer $\mathbb{E}(D_j)$.

Démonstration.

- La v.a.r. D_j admet une espérance ssi la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i])$ est absolument convergente.
  Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{ll}
& \sum\limits_{i=1}^{N} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) \\
= & \sum\limits_{i=1}^{j-1} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) \ + \ \sum\limits_{i=j}^{j} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) \ + \ \sum\limits_{i=j+1}^{N} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) \quad \textit{(par relation de Chasles en supposant } N > j\textit{)} \\
= & 0 \ + \ \dfrac{p}{1+q} \ + \ \sum\limits_{i=j+1}^{N} i \ \dfrac{2 \ p \ q^{i-j}}{1+q} \quad \textit{(d'après la question précédente)}
\end{array}$$

- Étudions en particulier la somme de droite :

$$\begin{array}{rcll}
\sum\limits_{i=j+1}^{N} i \ \dfrac{2 \ p \ q^{i-j}}{1+q} & = & \dfrac{2 \ p}{1+q} \sum\limits_{i=j+1}^{N} i \ q^{i-j} & \\
& = & \dfrac{2 \ p}{1+q} \sum\limits_{i=1}^{N-j} i \ q^{(i+j)-j} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \dfrac{2 \ p}{1+q} \sum\limits_{i=1}^{N-j} i \ q^{i} & \\
& = & \dfrac{2 \ p \ q}{1+q} \sum\limits_{i=1}^{N-j} i \ q^{i-1} &
\end{array}$$

  On reconnaît la somme partielle (d'ordre $N - j$) d'une série géométrique dérivée première convergente car de raison $q \in \ ]-1, 1[$.
- Ainsi, la série $\sum\limits_{i \geqslant 1} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i])$ est convergente et par passage à la limite dans l'égalité précédente on obtient :

$$\begin{array}{rcl}
\sum\limits_{i=1}^{+\infty} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i]) & = & \dfrac{p}{1+q} + \dfrac{2 \ p \ q}{1+q} \sum\limits_{i=1}^{+\infty} i \ q^{i-1} \\
& = & \dfrac{p}{1+q} + \dfrac{2 \ \cancel{p} \ q}{1+q} \ \dfrac{1}{(1-q)^{\cancel{2}}} \\
& = & \dfrac{1}{(1+q)(1-q)} \left(p \ (1-q) + 2 \ q\right) \\
& = & \dfrac{1}{1-q^2} \left((1-q)^2 + 2 \ q\right) \ = \ \dfrac{1+q^2}{1-q^2}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{La variable } D_j \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(D_j) = \dfrac{1+q^2}{1-q^2}}$$

Remarque

- Dans cette question, on détermine $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} i \ \mathbb{P}_{[Z=j]}([T = i])$.
  Cette écriture est très proche de l'écriture de $\mathbb{E}(T)$: on a simplement remplacé ici l'application probabilité $\mathbb{P}$ par l'application probabilité $\mathbb{P}_{[Z=j]}$.
  Autrement dit, on détermine l'espérance de T sachant que l'événement $[Z = j]$ est réalisé.
- Cet objet est relativement classique en mathématiques (au programme de la ECS). Il s'agit de l'espérance conditionnelle de la variable T relativement à l'événement $[Z = j]$. Elle se note :

$$\mathbb{E}(T \mid [Z = j])$$

  (cette notation n'est pas très heureuse au vu de la notation utilisée pour noter les probabilités conditionnelles)
- On peut noter que ces calculs d'espérances conditionnelles permettent de déterminer l'espérance. Sous réserve d'existence des objets considérés :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Z = j]) \ \mathbb{E}(T \mid [Z = j])$$

  Il faut considérer cette égalité comme une formule des probabilités totales (qui est à la base de ce résultat) adaptée à la notion d'espérance.

□

Exercice 8 : EML 2013

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une urne $\mathcal{U}$ contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher.
On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne $\mathcal{U}$.

Partie I

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Donner la loi de X_i. Rappeler l'espérance et la variance de X_i.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession de k épreuves de Bernoulli (dont le succès est l'obtention de la boule numérotée i) indépendantes et de même paramètre $\frac{1}{n}$ (on choisit une boule dans l'urne $\mathcal{U}$ de manière équiprobable parmi les n boules disponibles).
- La variable X_i donne le nombre de succès obtenus lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{1}{n}\right).}$$

On en déduit que X_i admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{Plus précisément : } \mathbb{E}(X_i) = k \times \frac{1}{n} = \frac{k}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_i) = k \times \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right).}$$ □

2. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

- On commence par noter que :
$$[X_i = k] \cap [X_j = k] = \varnothing$$
En effet, en k tirages, on ne peut pas obtenir à la fois k fois la boule numéro i et k fois la boule numéro j. On obtient donc :
$$\mathbb{P}([X_i = k] \cap [X_j = k]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
- D'autre part, d'après la question ***1.***, on sait que :
$$\mathbb{P}([X_i = k]) = \mathbb{P}([X_j = k]) = \binom{k}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-k} = 1 \times \frac{1}{n^k} \times 1 = \frac{1}{n^k}$$
Donc :
$$\mathbb{P}([X_i = k])\,\mathbb{P}([X_j = k]) = \frac{1}{n^k} \times \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n^{2k}} \neq 0$$

On obtient finalement que :
$$\mathbb{P}([X_i = k] \cap [X_j = k]) \neq \mathbb{P}([X_i = k])\,\mathbb{P}([X_j = k])$$

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Remarque

- On cherche ici à démontrer que les v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ ne sont pas mutuellement indépendantes. Si elles l'étaient, alors toute paire de variables X_i, X_j (avec $i \neq j$) serait indépendante (l'indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux).
- Ainsi, en démontrant que les v.a.r. $X_1, \dots, X_n$ ne sont pas deux à deux indépendantes, on démontre qu'elles ne sont pas mutuellement indépendantes.

□

3. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la répétition de k épreuves de Bernoulli (dont le succès est l'obtention de la boule numérotée i ou de la boule j) indépendantes et de même paramètre $\frac{2}{n}$ (le succès se réalise si l'on tire la boule i ou la boule j et on peut tirer n boules différentes en tout).
- La variable X_i+X_j est la v.a.r. qui donne le nombre de succès obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X_i + X_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{2}{n}\right)}$$

On en déduit que $X_i + X_j$ admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{Plus précisément : } \mathbb{V}(X_i + X_j) = k \times \frac{2}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{2k}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right).}$$ □

b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j).

Démonstration.
D'après la formule de la variance d'une somme de variables aléatoires, on obtient :

$$\mathbb{V}(X_i + X_j) = \mathbb{V}(X_i) + 2\ \mathrm{Cov}(X_i, X_j) + \mathbb{V}(X_j)$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= \frac{1}{2}\left(\mathbb{V}(X_i + X_j) - \mathbb{V}(X_i) - \mathbb{V}(X_j)\right) \\
&= \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}\,k}{n}\left(1 - \frac{2}{n}\right) - \cancel{2}\,\frac{k}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \quad \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.}} \textit{ et } \textbf{\textit{3.a)}}\textit{)} \\
&= \frac{k}{n}\left(\cancel{1} - \frac{2}{n} - \left(\cancel{1} - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{k}{n} \times \left(-\frac{1}{n}\right) \ = \ -\frac{k}{n^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -\frac{k}{n^2}}$$ □

Pour tout entier k supérieur ou égal à 1, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages et on note $\mathbb{E}(Z_k)$ l'espérance de Z_k.

Partie II

4. Déterminer la loi de la variable Z_1 et la loi de la variable Z_2.
En déduire $\mathbb{E}(Z_1)$ et $\mathbb{E}(Z_2)$.

Démonstration.

- Si $k = 1$, alors on effectue un unique tirage. Donc on ne peut obtenir qu'un seul numéro (celui de la boule choisie à cet unique tirage). Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1(\Omega) = \{1\} \\ \mathbb{P}([Z_1 = 1]) = 1 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Z_1 \text{ suit la loi certaine égale à 1, et } \mathbb{E}(Z_1) = 1.}$$

- Déterminons maintenant la loi de la variable Z_2.
  - On sait déjà que : $Z_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
    En effet, en $k = 2$ tirages, on peut :
    × soit obtenir deux fois la même boule, on observe alors 1 seul numéro.
    × soit obtenir deux boules différentes, on observe alors 2 numéros distincts.
  - D'après le premier item du point précédent :

$$[Z_2 = 1] = \bigcup_{i=1}^{n} \ [X_i = 2]$$

Ainsi, l'événement $[Z_2 = 1]$ s'écrit comme une réunion d'événements incompatibles.
On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z_2 = 1]) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = 2]) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{2}{2} \left(\dfrac{1}{n}\right)^2 \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2-2} & \textit{(d'après 1.)} \\ & = & \cancel{n} \, \dfrac{1}{n^{\cancel{2}}} \ = \ \dfrac{1}{n} & \end{array}$$

  - La famille $([Z_2 = 1], [Z_2 = 2])$ est un système complet d'événements, donc :

$$\mathbb{P}([Z_2 = 1]) + \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 - \mathbb{P}([Z_2 = 1]) = 1 - \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} Z_2(\Omega) = \{1, 2\} \\ \mathbb{P}([Z_2 = 1]) = \dfrac{1}{n} \quad \text{ et } \quad \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = 1 - \dfrac{1}{n} \end{array} \right.}$$

  - Z_2 est une v.a.r. finie, elle admet donc une espérance.

$$\mathbb{E}(Z_2) = 1 \times \mathbb{P}([Z_2 = 1]) + 2 \times \mathbb{P}([Z_2 = 2]) = \frac{1}{n} + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_2) = 2 - \frac{1}{n}}$$

□

5. Soit k un entier supérieur ou égal à 1.

a) Déterminer $\mathbb{P}([Z_k = 1])$ et déterminer $\mathbb{P}([Z_k = k])$.

Démonstration.

- L'événement $[Z_k = 1]$ est réalisé si on a obtenu un seul numéro lors de k tirages. Cela signifie que l'on a tiré la même boule lors des k tirages. Ainsi :

$$[Z_k = 1] = \bigcup_{i=1}^{n} [X_i = k]$$

L'événement $[Z_k = 1]$ étant une réunion d'événements incompatibles, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Z_k = 1]) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = k]) \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \binom{k}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-k} \qquad \textit{(d'après } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\ & = & n \, \frac{1}{n^k} \; = \; \frac{1}{n^{k-1}} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \frac{1}{n^{k-1}}}$$

- Remarquons tout d'abord que si $k > n$ alors $[Z_k = k] = \varnothing$.
  En effet, on ne peut obtenir strictement plus de n boules différentes lors de k tirages successifs dans une urne contenant n boules.

$$\boxed{\text{Si } k > n \text{ alors } \mathbb{P}([Z_k = k]) = 0.}$$

- On considère maintenant le cas où $k \leqslant n$.
  L'univers Ω est muni de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. On procède alors par dénombrement.

  L'univers est l'ensemble des k-uplets d'éléments de $[\![1, n]\!]$. Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = n^k$.

  Un k-tirage qui réalise l'événement $[Z_k = k]$ est un k-tirage lors duquel on a obtenu k boules distinctes. Un tel k-tirage est entièrement déterminé par :

  × le choix de la première boule : n possibilités,

  × le choix de la deuxième boule : $n - 1$ possibilités,

  × $\cdots$

  × le choix de la $k^{\text{ème}}$ boule : $n - (k - 1)$ possibilités.

  Il y a donc en tout : $n \times (n-1) \times \cdots \times (n - (k-1)) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ tels k-tirages.

$$\boxed{\text{On en conclut que : } \mathbb{P}([Z_k = k]) = \frac{\text{Card}([Z_k = k])}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!} \, \frac{1}{n^k}.}$$

Remarque

- La première étape de la question consiste à écrire $[Z_k = 1]$ comme une réunion d'événements plus simples. On ne raisonne sur les probabilités qu'après avoir effectué cette étape primordiale de décomposition de l'événement.
- On pouvait mettre en place un dénombrement pour répondre à la première question. Détaillons cette rédaction.

  Un k-tirage qui réalise $[Z_k = 1]$ est un k-tirage lors duquel la même boule a toujours été tirée. Un tel k-tirage est entièrement déterminé par :

  × le numéro de la boule qui est toujours tirée : n possibilités.

  Ainsi, il y a n tels k-tirages.
  On en conclut que : $\mathbb{P}([Z_k = 1]) = \dfrac{\text{Card}([Z_k = k])}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{n}{n^k} = \dfrac{1}{n^{k-1}}$.
- On peut aussi faire la deuxième démonstration à l'aide des termes du chapitre dénombrement. L'événement $[Z_k = k]$ est réalisé par tous les k-tirages lors desquels on a obtenu k numéros distincts. Un tel k-tirage est un k-uplet d'éléments distincts de $[\![1, n]\!]$.
  Autrement dit, un tel k-tirage est un k-arrangement de $[\![1, n]\!]$.
  Ainsi, $\text{Card}([Z_k = k]) = A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

□

b) Montrer, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$: $\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \dfrac{\ell}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \dfrac{n - \ell + 1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])$.

Démonstration.

- On remarque que $Z_k(\Omega) \subset [\![1, n]\!]$.
  En effet, en k tirages, on peut obtenir :

  × au minimum 1 seule boule distincte (on obtient la même boule aux k tirages),

  × au maximum n boules distinctes (on a obtenu toutes les boules de l'urne).
  Ce cas ne peut se produire que lorsque $k \geqslant n$.
- La famille $\Big([Z_k = i]\Big)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell])$$

- Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$ et soit $i \in [\![1, n]\!]$. Étudions l'événement $[Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]$.
  Cet événement est réalisé si les événements $[Z_k = i]$ et $[Z_{k+1} = \ell]$ sont tous les deux réalisés. L'événement $[Z_k = i]$ est réalisé si on a obtenu i numéros distincts lors des i tirages. Lorsqu'on procède à 1 tirage supplémentaire, deux cas se présentent :

  × soit on tire un numéro de boule déjà obtenu lors des k premiers tirages.
  Dans ce cas, au cours de ces $k+1$ premiers tirages, on a obtenu i numéros distincts.
  L'événement $[Z_{k+1} = i]$ est alors réalisé.

  × soit on tire un numéro non obtenu lors des k premiers tirages.
  Dans ce cas, au cours de ces $k+1$ premiers tirages, on a obtenu i numéros distincts.
  L'événement $[Z_{k+1} = i + 1]$ est alors réalisé.

  Ainsi, l'événement $[Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]$ n'est réalisé que si $i = \ell$ ou $i + 1 = \ell$.

$$\boxed{\text{Pour tout } i \neq \ell \text{ et } i \neq \ell - 1,\ [Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell] = \varnothing.}$$

- Ainsi, pour tout $\ell \in [\![2, n]\!]$ (on écarte le cas $\ell = 2$ pour assurer que $\ell - 1 \geqslant 1$) :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]) & \\
& = & \sum\limits_{i=\ell-1}^{\ell} \mathbb{P}([Z_k = i] \cap [Z_{k+1} = \ell]) & \\
& = & \sum\limits_{i=\ell-1}^{\ell} \mathbb{P}([Z_k = i])\ \mathbb{P}_{[Z_k=i]}([Z_{k+1} = \ell]) & \textit{(avec } \mathbb{P}([Z_k = \ell-1]) \neq 0 \\
& & & \textit{et } \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \neq 0\textit{)} \\
& = & \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])\ \mathbb{P}_{[Z_k=\ell-1]}([Z_{k+1} = \ell]) + \mathbb{P}([Z_k = \ell])\ \mathbb{P}_{[Z_k=\ell]}([Z_{k+1} = \ell]) &
\end{array}$$

Il reste alors à déterminer chacune de ces deux probabilités conditionnelles.

- Si l'événement $[Z_k = \ell - 1]$ est réalisé, alors l'événement $[Z_{k+1} = \ell]$ est réalisé si on a pioché au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage un numéro distinct des $\ell - 1$ numéros déjà obtenus lors les k tirages précédents. Il y a $n - (\ell - 1)$ tels numéros. Chacune des n boules ayant la même probabilité d'être tirée, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{P}_{[Z_k=\ell-1]}([Z_{k+1} = \ell]) = \frac{n - \ell + 1}{n}}$$

- Si l'événement $[Z_k = \ell]$ est réalisé, alors l'événement $[Z_{k+1} = \ell]$ est réalisé si on a pioché au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage l'une des ℓ numéros déjà obtenus lors des k tirages précédents. Il y a ℓ tels numéros. Chacune des n boules ayant la même probabilité d'être tirée, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{P}_{[Z_k=\ell]}([Z_{k+1} = \ell]) = \frac{\ell}{n}}$$

- En combinant ces deux résultats, on obtient la fomule souhaitée.

$$\boxed{\text{Pour tout } \ell \in [\![2, n]\!],\ \mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) = \frac{\ell}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \frac{n - \ell + 1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell - 1])}$$

- Il reste alors à vérifier que la formule reste vraie si $\ell = 1$. D'après la question ***5.a)*** :

$$\mathbb{P}([Z_{k+1} = 1]) = \frac{1}{n^k} = \frac{1}{n}\ \frac{1}{n^{k-1}} = \frac{1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = 1])$$

Enfin, comme $[Z_k = 0] = \varnothing$, $\mathbb{P}([Z_k = 0]) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la formule est aussi vérifiée pour } \ell = 1.}$$

□

c) En déduire : $\mathbb{E}(Z_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n}\,\mathbb{E}(Z_k) + 1$.

Démonstration.

- D'après la question ***5.b)***, $Z_k(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$, et $Z_{k+1}(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$.
  Ainsi, Z_k et Z_{k+1} sont des v.a.r. finies. Elles admettent donc une espérance.
- Par définition de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(Z_{k+1}) \\
= {} & \sum_{\ell=1}^{n} \ell\ \mathbb{P}([Z_{k+1} = \ell]) \\
= {} & \sum_{\ell=1}^{n} \ell \left(\frac{\ell}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \frac{n-\ell+1}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell-1]) \right) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{5.b)}}\textit{)} \\
= {} & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell(n-\ell+1)}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell-1]) \\
= {} & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(\ell+1)(n-(\ell+\cancel{1})+\cancel{1})}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \\
= {} & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(\ell+1)(n-\ell)}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \\
= {} & \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{n\ell-\ell^2+n-\ell}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) && \textit{(car } [Z_k = 0] = \varnothing\textit{)} \\
= {} & \left(\sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\ell^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \frac{n^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = n]) \right) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{(n-1)\ell-\ell^2+n}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \\
= {} & \frac{n^2}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = n]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{\cancel{\ell^2}+(n-1)\ \ell-\cancel{\ell^2}+n}{n}\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \\
= {} & n\ \mathbb{P}([Z_k = n]) + \frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \\
= {} & \left((n-1)\ \mathbb{P}([Z_k = n]) + \frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \right) + \left(\mathbb{P}([Z_k = n]) + \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \right) \\
= {} & \frac{n-1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \ell\ \mathbb{P}([Z_k = \ell]) + \sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}([Z_k = \ell]) \ = \ \frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}(Z_k) + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \mathbb{E}(Z_{k+1}) = \frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}(Z_k) + 1}$$

□

6. ***a)*** Montrer que la suite $(v_k)_{k\geqslant 1}$ de terme général $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$ est une suite géométrique.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$. D'après la question ***5.c)***, on obtient :

$$v_{k+1} = \mathbb{E}(Z_{k+1}) - n = \frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}(Z_k) + 1 - n = \frac{n-1}{n}\ \mathbb{E}(Z_k) - (n-1) = \frac{n-1}{n}\ (\mathbb{E}(Z_k) - n) = \frac{n-1}{n}\ v_k$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_k)_{k\geqslant 1} \text{ est géométrique de raison } \frac{n-1}{n}.}$$

Remarque
Il faut faire bien attention aux notations ici. La suite est notée (v_k).
La raison $\dfrac{n-1}{n}$ est bien indépendante de k, indice de la suite. □

b) En déduire, pour tout entier k supérieur ou égal à 1 : $\mathbb{E}(Z_k) = n\left(1 - \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^k\right)$.

Démonstration.
Soit $k \geqslant 1$.

- D'après la question ***6.a)***, la suite (v_k) est géométrique de raison $\dfrac{n-1}{n}$, donc :
$$v_k = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} v_1$$
Or $v_1 = \mathbb{E}(Z_1) - n = 1 - n = -(n-1)$ d'après la question ***4.***, donc :
$$v_k = -(n-1)\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = -(n-1)\frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}} = -\frac{(n-1)^k}{n^{k-1}} = -n\,\frac{(n-1)^k}{n^k} = -n\left(\frac{n-1}{n}\right)^k$$
- Par définition, $v_k = \mathbb{E}(Z_k) - n$, donc :
$$\mathbb{E}(Z_k) = v_k + n = -n\left(\frac{n-1}{n}\right)^k + n = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)$$

$$\boxed{\forall k \geqslant 1,\ \mathbb{E}(Z_k) = n\left(1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right)}$$

□

Partie III

On suppose maintenant que $n = 4$; ainsi l'urne $\mathcal{U}$ contient 4 boules numérotées de 1 à 4.
Soit k un entier supérieur ou égal à 4. On se propose de déterminer la loi de Z_k.

7. Rappeler la valeur de $\mathbb{P}([Z_k = 1])$. Déterminer $\mathbb{P}([Z_k \geqslant 5])$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{5.a)}},\ \mathbb{P}([Z_k = 1]) = \frac{1}{4^{k-1}}.}$$

Par ailleurs, l'urne $\mathcal{U}$ ne contenant que 4 boules, on peut obtenir au maximum 4 numéros différentes en k tirages. Ainsi : $[Z_k \geqslant 5] = \varnothing$.

$$\boxed{\text{On en conclut que : } \mathbb{P}([Z_k \geqslant 5]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0}$$ □

8. Montrer : $\mathbb{P}([Z_k = 2]) = 6\,\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.

Démonstration.

- L'univers de cette expérience est l'ensemble des k-uplets de $[\![1,4]\!]$.
  Donc, en particulier, $\text{Card}(\Omega) = 4^k$.
- Un k-tirage qui réalise l'événement $[Z_k = 2]$ est entièrement déterminé par :
  - × le choix des 2 numéros distincts parmi les 4 de l'urne : $\dbinom{4}{2}$ possibilités,
  - × les positions possibles pour les boules portant le 1^{er} numéro (sur les 2) :
    - s'il n'y a qu'une unique boule portant le 1^{er} numéro sur les k tirages : $\dbinom{k}{1}$ possibilités,
    - s'il y a 2 boules portant le 1^{er} numéro sur les k tirages : $\dbinom{k}{2}$ possibilités,
    - $\cdots$
    - s'il y a ℓ boules portant le 1^{er} numéro sur les k tirages : $\dbinom{k}{\ell}$ possibilités,
    - $\cdots$
    - s'il y a $(k-1)$ boules portant le 1^{er} numéro sur les k tirages : $\dbinom{k}{k-1}$ possibilités.

  On obtient donc :

$$\begin{array}{rcl} \text{Card}([Z_k = 2]) & = & \dbinom{4}{2} \sum\limits_{\ell=1}^{k-1} \dbinom{k}{\ell} \\ & = & \dbinom{4}{2} \left(\left(\sum\limits_{\ell=0}^{k} \dbinom{k}{\ell} \right) - \dbinom{k}{k} - \dbinom{0}{k} \right) \\ & = & \dbinom{4}{2} \left(\left(\sum\limits_{\ell=0}^{k} \dbinom{k}{\ell} 1^\ell\, 1^{k-\ell} \right) - 2 \right) \end{array}$$

  Or, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} 1^\ell\, 1^{k-\ell} = 2^k$$

  On obtient alors :

$$\text{Card}([Z_k = 2]) = \binom{4}{2} (2^k - 2) = 6\,(2^k - 2)$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{P}([Z_k = 2]) = \dfrac{\text{Card}([Z_k = 2])}{\text{Card}(\Omega)} = \dfrac{6\,(2^k - 2)}{4^k}}$$

Remarque

- On pouvait alléger cette présentation : une fois les deux numéros choisis ($\binom{4}{2}$ possibilités), on peut affirmer qu'à chaque tirage, on a le choix entre l'une de ces deux boules. Ce qui conduit à penser qu'il y a $\binom{4}{2}\ 2^k$ k-tirages convenables.
- Attention : si l'on procède ainsi, on peut ne tirer que la boule portant le 1^{er} numéro (resp. l'autre numéro). Il y a donc $2\ k$ tirages à exclure. On retrouve bien les $\binom{4}{2}\ (2^k - 2)$ k-tirages convenables.

□

9. On note, pour tout i de $[\![1,4]\!]$, A_i l'événement :
« la boule numéro i n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages ».

a) Montrer : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Démonstration.
L'événement $[Z_k \leqslant 3]$ est réalisé si et seulement si au moins l'une des 4 boules n'a pas été obtenue au cours des k premiers tirages. Donc :

$$[Z_k \leqslant 3] = A_1 \ \cup \ A_2 \ \cup \ A_3 \ \cup \ A_4$$

- D'après la formule du crible :

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) \\ = & \mathbb{P}(A_1 \ \cup \ A_2 \ \cup \ A_3 \ \cup \ A_4) \\ = & \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) \\ - & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_4) \\ + & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ - & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \end{array}$$

- Les boules jouant un rôle similaire, la probabilité de ne pas en tirer une au cours de k tirages est la même, quelle que soit la boule considérée. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_4)$$

De même, la probabilité de ne pas en tirer deux au cours de k tirages est la même, quelle que soit les deux boules considérées. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_3 \cap A_4)$$

Et, par le même raisonnement :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

- On en déduit que :

$$\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) \ = \ 4\ \mathbb{P}(A_1) - 6\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

- Enfin, on remarque que : $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \varnothing$.
En effet, il n'est pas possible, lors des k tirages, de ne tirer aucune des boules de l'urne. Ainsi :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 0$$

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}$$

Remarque
Dans le programme, il est précisé que la formule du crible ne doit être connu que jusqu'à l'ordre 3. Il faudrait donc, si on suit le programme à la lettre, adopter la rédaction suivante.

- D'après la formule du crible appliquée à A_1 et $A_2 \cup A_3 \cup A_4$, on a :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) & = & \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) - \mathbb{P}(A_1 \ \cap \ (A_2 \cup A_3 \cup A_4) \\ & = & \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) - \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cup \ (A_1 \cap A_3) \ \cup \ (A_1 \cap A_4)) \end{array}$$

- D'après la formule du crible appliquée à A_2, A_3 et A_4, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(A_2 \cup A_3 \cup A_4) & = & \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(A_4) \\ & & -\ \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_4) - \mathbb{P}(A_3 \cap A_4) \\ & & +\ \mathbb{P}(A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ & = & 3\,\mathbb{P}(A_1) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \quad \textit{(car les boules sont indiscernables)} \end{array}$$

- D'après la formule du crible appliquée à $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_3$ et $A_1 \cap A_4$, on obtient :

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cup \ (A_1 \cap A_3) \ \cup \ (A_1 \cap A_4)) \\ = & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) \\ & -\ \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cap \ (A_1 \cap A_3)) - \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cap \ (A_1 \cap A_4)) \\ & -\ \mathbb{P}((A_1 \cap A_3) \ \cap \ (A_1 \cap A_4)) \\ & +\ \mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \ \cap \ (A_1 \cap A_3) \ \cap \ (A_1 \cap A_4)) \\ = & \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_4) \\ & -\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_4) \\ & -\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_3 \cap A_4) \\ & +\ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ = & 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \quad \textit{(car les boules sont indiscernables)} \\ = & 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \quad \textit{(car } A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \varnothing\textit{)} \end{array}$$

- Finalement on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) & = & \mathbb{P}(A_1) \\ & & +\ (3\,\mathbb{P}(A_1) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \\ & & -\ (3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - 3\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)) \\ & = & 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \end{array}$$

□

b) Calculer $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)$ et $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Démonstration.

- On remarque que :

$$A_1 = [X_1 = 0]$$

D'après la question ***1.*** :

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}([X_1 = 0]) = \binom{k}{0} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{k-0} = \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1) = \left(\frac{3}{4}\right)^k}$$

- On remarque que :

$$A_1 \cap A_2 = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0] = [X_1 + X_2 = 0]$$

D'après la question ***3.a)*** :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}([X_1 + X_2 = 0]) = \binom{k}{0} \left(\frac{2}{4}\right)^0 \left(1 - \frac{2}{4}\right)^{k-0} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^k}$$

- On remarque que :

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [X_4 = k]$$

En effet, ne piocher aucune des boules 1 à 3 au cours des k tirages, revient exactement à ne piocher que la boule numéro 4 au cours de ces k tirages.
D'après la question ***1.*** :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}([X_4 = k]) = \binom{k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{k-k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \left(\frac{1}{4}\right)^k}$$

□

c) En déduire : $\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3])$, puis $\mathbb{P}([Z_k = 3])$ et $\mathbb{P}([Z_k = 4])$.

Démonstration.

- On calcule :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) &= 4\,\mathbb{P}(A_1) - 6\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) + 4\,\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) && \textit{(d'après } \textbf{\textit{9.a)}}\textit{)} \\
&= 4 \left(\frac{3}{4}\right)^k - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^k + 4 \left(\frac{1}{4}\right)^k && \textit{(d'après } \textbf{\textit{9.b)}}\textit{)} \\
&= \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k}}$$

- On sait que :

$$[Z_k \leqslant 3] = [Z_k = 1] \cup [Z_k = 2] \cup [Z_k = 3]$$

Les événements $[Z_k = 1]$, $[Z_k = 2]$ et $[Z_k = 3]$ sont incompatibles. Donc :

$$\mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = \mathbb{P}([Z_k = 1]) + \mathbb{P}([Z_k = 2]) + \mathbb{P}([Z_k = 3])$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Z_k = 3]) &= \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) - \mathbb{P}([Z_k = 1]) - \mathbb{P}([Z_k = 2]) \\
&= \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k} - \frac{1}{4^{k-1}} - \frac{6\,(2^k - 2)}{4^k} && \textit{(d'après } \textbf{\textit{7.}} \textit{ et } \textbf{\textit{8.}}\textit{)} \\
&= \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + \cancel{4} - \cancel{4} - 6 \times 2^k + 12}{4^k} \\
&= \frac{4 \times 3^k - 12 \times 2^k + 12}{4^k}
\end{aligned}$$

- On remarque que :
$$[Z_k = 4] = \overline{[Z_k \leqslant 3]}$$
On obtient donc :
$$\mathbb{P}([Z_k = 4]) = 1 - \mathbb{P}([Z_k \leqslant 3]) = 1 - \frac{4 \times 3^k - 6 \times 2^k + 4}{4^k} = \frac{4^k - 4 \times 3^k + 6 \times 2^k - 4}{4^k}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Z_k = 3]) = \frac{4 \times 3^k - 12 \times 2^k + 12}{4^k} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([Z_k = 4]) = \frac{4^k - 4 \times 3^k + 6 \times 2^k - 4}{4^k}}$$ □

Exercice 9 : EML 2005

1. **Préliminaire :**

Soit $x \in]0,1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes, de même probabilité d'échec x, on définit deux suites de variables aléatoires $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ de la façon suivante :

× pour tout entier naturel n non nul, S_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le $n^{\text{ème}}$ succès ;

× T_1 est la variable aléatoire égale à S_1 et pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, T_n est la variable aléatoire égale au nombre d'épreuves supplémentaires nécessaires pour obtenir le $n^{\text{ème}}$ succès après le $(n-1)^{\text{ème}}$ succès.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$, $T_n = S_n - S_{n-1}$ et pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

a) Pour tout entier naturel n non nul, déterminer la loi de T_n et, sans calcul, donner l'espérance et la variance de T_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux cas se présentent.
Cas $n = 1$

- L'expérience aléatoire consiste en une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $1 - x$.
- La v.a.r. T_1 est le rang d'apparition du premier succès de l'expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, } T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1-x).}$$

Cas $n \geqslant 2$: dans ce cas, T_n est le rang d'apparition du $n^{\text{ème}}$ succès de l'expérience à la suite du $(n-1)^{\text{ème}}$ succès.

- Une fois le $n-1^{\text{ème}}$ succès obtenu, l'expérience aléatoire consiste de nouveau en une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $1 - x$.
- La v.a.r. T_n est alors le rang d'apparition du premier succès dans cette nouvelle expérience.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \geqslant 2,\ T_n \hookrightarrow \mathcal{G}(1-x).}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ T_n \text{ admet une espérance et une variance. Plus précisément :}\\ \mathbb{E}(T_n) = \dfrac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(T_n) = \dfrac{x}{(1-x)^2}.\end{array}}$$

Remarque
La v.a.r. T_n est définie par cas ($n = 1$ et $n \geqslant 2$).
On doit donc traiter ces deux définitions séparément même si, ici, le résultat est le même. □

b) Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, justifier l'indépendance des variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

Démonstration.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements :
× A_k : « obtenir un échec au $k^{\text{ème}}$ tirage ».
× B_k : « obtenir un succès au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

- Soit $(i_1, \ldots, i_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. Remarquons tout d'abord que :

$$\begin{array}{rl} & [T_1 = i_1] \cap \ldots \cap [T_n = i_n] \\ = & \left(\left(\bigcap\limits_{k=1}^{i_1 - 1} A_k \right) \cap B_{i_1} \right) \cap \left(\left(\bigcap\limits_{k=i_1+1}^{i_1+i_2-1} A_k \right) \cap B_{i_1+i_2} \right) \cap \ldots \cap \left(\left(\bigcap\limits_{k=i_1+\ldots+i_{n-1}-1}^{i_1+\ldots+i_n-1} A_k \right) \cap B_{i_1+\ldots+i_n} \right) \end{array}$$

- Les tirages étant indépendants, on obtient :

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}([T_1 = i_1] \cap \ldots \cap [T_n = i_n]) \\ = & \mathbb{P}\left(\left(\left(\bigcap\limits_{k=1}^{i_1 - 1} A_k \right) \cap B_{i_1} \right) \cap \left(\left(\bigcap\limits_{k=i_1+1}^{i_1+i_2-1} A_k \right) \cap B_{i_1+i_2} \right) \cap \ldots \cap \left(\left(\bigcap\limits_{k=i_1+\ldots+i_{n-1}-1}^{i_1+\ldots+i_n-1} A_k \right) \cap B_{i_1+\ldots+i_n} \right) \right) \\ = & \left(\prod\limits_{k=1}^{i_1-1} \mathbb{P}(A_k) \right) \times \mathbb{P}(B_{i_1}) \times \left(\prod\limits_{k=i_1+1}^{i_1+i_2-1} \mathbb{P}(A_k) \right) \times \mathbb{P}(B_{i_1+i_2}) \times \ldots \times \left(\prod\limits_{k=i_1+\ldots+i_{n-1}-1}^{i_1+\ldots+i_n-1} \mathbb{P}(A_k) \right) \times \mathbb{P}(B_{i_1+\ldots+i_n}) \\ = & \left(x^{i_1-1} \times (1-x) \right) \times \left(x^{i_2-1} \times (1-x) \right) \times \ldots \times \left(x^{i_n-1} \times (1-x) \right) \\ = & \mathbb{P}([T_1 = i_1]) \times \ldots \times \mathbb{P}([T_n = i_n]) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, les v.a.r. } T_1, \ldots, T_n \text{ sont indépendantes.}}$$

Remarque
Vu la manière dont est rédigée la question, on peut penser que le concepteur attendait comme réponse : « Le nombre de tirages nécessaires à l'apparition du $n^{\text{ème}}$ succès est indépendant du rang d'apparition du succès précédent. Ainsi les v.a.r. $T_1, \ldots, T_n$ sont indépendantes ». □

c) Pour tout entier naturel n non nul, montrer que l'espérance et la variance de S_n sont définies et montrer :

$$\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{1-x} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(S_n) = \frac{nx}{(1-x)^2}$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- S_n admet une espérance (resp. une variance) comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance (resp. une variance).
- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(S_n) & = & \mathbb{E}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} T_k \right) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(T_k) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1-x} & \textit{(d'après la question \textbf{1.a)})} \\ & = & \dfrac{n}{1-x} & \end{array}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(S_n) & = & \mathbb{V}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} T_k\right) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(T_k) & \textit{(par propriété de la variance, les v.a.r. } T_1, \ldots, T_n \textit{ étant indépendantes)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x}{(1-x)^2} & \textit{(d'après la question \textbf{1.a)})} \\
& = & \dfrac{nx}{(1-x)^2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(S_n) = \dfrac{n}{1-x} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(T_n) = \dfrac{nx}{(1-x)^2}.}$$

□

d) Soit n un entier naturel non nul. Déterminer la loi de S_n.
Que peut-on dire, sans calcul, de la valeur de $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = k])$?

Démonstration.

- Par définition, S_n est le rang d'apparition du $n^{\text{ème}}$ succès de l'expérience. Le $n^{\text{ème}}$ succès peut se produire au plus tôt lors du $n^{\text{ème}}$ tirage et à n'importe quel tirage suivant.

$$\boxed{\text{On en déduit que } S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![.}$$

- Soit $k \in [\![n, +\infty[\![$.
L'événement $[S_n = k]$ est réalisé si le $n^{\text{ème}}$ succès de l'expérience a lieu lors du $k^{\text{ème}}$ tirage. Autrement dit, cet événement est réalisé si le $k^{\text{ème}}$ tirage est un succès et qu'il y a eu $n-1$ succès lors des $k-1$ premiers tirages.
- Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ on introduit la v.a.r. U_j qui donne le nombre de succès lors des j premiers tirages. D'après ce qui précède :

$$[S_n = k] \ = \ [U_{k-1} = n-1] \ \cap \ B_k$$

Le résultat du $k^{\text{ème}}$ tirage étant indépendant des résultats précédents, les événements $[U_{k-1} = n-1]$ et B_k sont indépendants. Ainsi :

$$\mathbb{P}([S_n = k]) \ = \ \mathbb{P}([U_{k-1} = n-1]) \ \times \ \mathbb{P}(B_k)$$

- Or la v.a.r. U_{k-1} compte le nombre de succès obtenus lors d'une expérience consistant en une répétition de $k-1$ épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $1-x$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } U_{k-1} \hookrightarrow \mathcal{B}(k-1, 1-x).}$$

- On en déduit que :

$$\mathbb{P}([U_{k-1} = n-1]) = \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{n-1} \ x^{k-n}$$

Et comme $\mathbb{P}(B_k) = 1-x$, on peut conclure.

$$\boxed{S_n(\Omega) = [\![n, +\infty[\![\text{ et pour tout } k \in [\![n, +\infty[\![,\ \mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{k-1}{n-1} (1-x)^n \ x^{k-n}.}$$

- La famille $\Big([S_n = k]\Big)_{k \in [\![n, +\infty[\![}$ est un système complet d'événements.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = k]) = 1.}$$

□

e) En déduire, pour tout $x \in\,]0,1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

Démonstration.
D'après la question précédente : $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = k]) = 1$. Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([S_n = k]) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^n \ x^{k-n} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^n \ x^{k-n} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (1-x)^n \ x^{-n} \left(\sum_{j=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \ x^k \right) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \ x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} \ x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}}$$

□

2. Deux joueurs A et B procèdent chacun à une succession de lancers d'une même pièce. À chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est p (p fixé, $p \in\,]0,1[$), et celle d'obtenir face est $q = 1-p$.
Le joueur A commence et il s'arrête quand il obtient le premier pile. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par le joueur A.
Le joueur B effectue alors autant de lancers que le joueur A et on note Y la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenu par le joueur B.

a) Rappeler la loi de X et, pour tout $k \geqslant 1$, donner la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.

Démonstration.

- L'expérience consiste en une succession infinie d'épreuves de Bernoulli (dont le succès est d'obtenir pile et l'échec est d'obtenir face) indépendantes et de même paramètre p.
- La v.a.r. X est le rang d'apparition du premier succès.

$$\boxed{\text{Ainsi, } X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(p\right).}$$

Soit $k \geqslant 1$. On s'intéresse alors à la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$.

- Si $[X = k]$ est réalisé, le joueur B procède alors k lancers de pièces.
  - × Cette expéricence consiste en la répétition de k épreuves de Bernoulli (dont le succès est d'obtenir pile et l'échec est d'obtenir face) indépendantes et de même paramètre p.
  - × La v.a.r. Y compte le nombre de succès obtenus lors de cette expérience.

  Ainsi, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = k]$ est l aloi binomiale de paramètre (k, p).

$$\boxed{\text{Autrement dit, pour tout } i \in [\![0,k]\!] : \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = i]) = \binom{k}{i} p^i \ (1-p)^{k-i}}$$

□

b) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

Démonstration.

- On a vu dans la question précédente que si $[X = k]$ est réalisé alors Y peut prendre toutes les valeurs de $[\![0, k]\!]$.
- Or $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Autrement dit, X peut prendre toutes les valeurs $k \in \mathbb{N}^*$.

On en déduit que Y peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

$$\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}}$$

Remarque
On peut faire cette démonstration en revenant une nouvelle fois à l'expérience réalisée :

× pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, le joueur B peut obtenir i piles. Cela est notamment réalisé si le joueur A a obtenu le premier pile lors de son $i^{\text{ème}}$ lancer et si le joueur B n'a obtenu que des piles lors de ses lancers.

× le joueur B peut aussi obtenir 0 pile et ce quelque soit le nombre de tirages dont il dispose.

□

c) Montrer : $\mathbb{P}([Y = 0]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \dfrac{q}{1+q}$.

Démonstration.
La famille $\Big([X = k]\Big)_{k \in [\![1, +\infty[\![}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Y = 0]) & = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 0]) & \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y = 0]) & \textit{(valide car } \mathbb{P}([X = k]) \neq 0\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}\, p \times \binom{k}{0}\, p^0\, (1-p)^{k-0} & \textit{(d'après les questions précédentes)} \\
& = & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{2k-1}\, p \ = \ \sum\limits_{k=1}^{+\infty} p\, q^{2k-1} & \\
& = & p \sum\limits_{k=1}^{+\infty} q^{2k-1} \ = \ p \sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^{2(k+1)-1} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & p \sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^{2k+1} \ = \ pq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^k & \\
& = & pq\, \dfrac{1}{1-q^2} & \textit{(car } q^2 \in\ ]-1, 1[\textit{)} \\
& = & \cancel{p}\, q\, \dfrac{1}{\cancel{(1-q)}\, (1+q)} \ = \ \dfrac{q}{1+q} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y = 0]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} pq^{2k-1} = \dfrac{q}{1+q}}$$

□

d) Soit n un entier naturel non nul.

Montrer : $\mathbb{P}([Y=n]) = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} p^{n+1} q^{2k-n-1}$.

Puis, en utilisant ***1.e***, montrer que : $\mathbb{P}([Y=n]) = \dfrac{1}{(1+q)^2}\left(\dfrac{q}{1+q}\right)^{n-1}$.

Démonstration.

- La famille $\Big([X=k]\Big)_{k\in[\![1,+\infty[\![}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rll}
& \mathbb{P}([Y=n]) & \\
= & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]\cap[Y=n]) & \\
= & \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) & \textit{(valide car } \mathbb{P}([X=k])\neq 0\textit{)} \\
= & \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) + \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) & \textit{(par relation de Chasles)} \\
= & \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}([X=k]) \times \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n]) & \textit{(car pour tout } k<n,\ \mathbb{P}_{[X=k]}([Y=n])=0\textit{)} \\
= & \sum\limits_{k=n}^{+\infty} (1-p)^{k-1}\ p\ \binom{k}{n}\ p^n\ (1-p)^{k-n} & \\
= & \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n}\ p^{n+1}\ (1-p)^{2k-n-1} & \\
= & \dfrac{p^{n+1}}{(1-p)^{n+1}} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n}\ (1-p)^{2k} \ = \ \dfrac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n}\ \left(q^2\right)^k &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y=n]) \ = \ \dfrac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n}\ \left(q^2\right)^k}$$

- Or, par décalage d'indice :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \left(q^2\right)^k \ = \ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k-1}{n} \left(q^2\right)^{k-1} \ = \ \frac{1}{q^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k-1}{n} \left(q^2\right)^k$$

- D'après la question ***1.e)***, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\,]0,1[$:

$$\sum_{k=m}^{+\infty} \binom{k-1}{m-1} x^k \ = \ \frac{x^m}{(1-x)^m}$$

  En appliquant cette relation à $m=n+1\in\mathbb{N}^*$, et $x=q^2\in\,]0,1[$, on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k-1}{n} \left(q^2\right)^{k-1} \ = \ \frac{\left(q^2\right)^{n+1}}{(1-q^2)^{n+1}}$$

- En combinant tous les résultats obtenus :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y=n]) &= \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} \left(q^2\right)^k \\
&= \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \, \frac{1}{q^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \binom{k-1}{n} \left(q^2\right)^k \\
&= \frac{p^{n+1}}{q^{n+1}} \, \frac{1}{q^2} \, \frac{\left(q^2\right)^{n+1}}{(1-q^2)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{q^2} \left(\frac{q^2}{q}\right)^{n+1} p^{n+1} \, \frac{1}{(1-q)^{n+1}\,(1+q)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{q^2} \, q^{n+1} \, \cancel{p^{n+1}} \, \frac{1}{\cancel{p^{n+1}}\,(1+q)^{n+1}} \\
&= \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n+1}} = \frac{1}{(1+q^2)} \, \frac{q^{n-1}}{(1+q)^{n-1}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ \ \mathbb{P}([Y=n]) = \frac{1}{(1+q^2)} \left(\frac{q}{1+q}\right)^{n-1}.}$$

□