Suites et séries

Exercice 1 : `ESCP 1991-G`

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x + 1}$$

1. *Variation de f*

a) Calculer la dérivée f' de f.

b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur $\mathbb{R}_+$.
Pour ce faire, on étudiera la variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = (1 - x)\ \mathrm{e}^x + 1$$

c) Prouver que : $f(\alpha) = \alpha - 1$.

d) Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure du graphe de cette fonction.

2. *Approximation de α*
Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$\varphi(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

a) Prouver que α est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

b) Montrer que $\alpha > 1$. En déduire que :

$$\alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}$$

c) Établir que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1 :

$$\varphi(x) \geqslant 1$$

et que

$$|\varphi(x) - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-1}\, |x - \alpha|$$

d) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $[1; +\infty[$ définie par la condition initiale $\alpha_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n)$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\alpha_n - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-(n+1)}$$

e) En déterminant au préalable le nombre d'itérations nécessaires, écrire en **Scilab** un programme permettant de trouver et d'**afficher** une valeur décimale approchée $\tilde{\alpha}$ de α telle que :

$$|\tilde{\alpha} - \alpha| \leqslant 10^{-6}$$

Exercice 2 : EML 2010

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe C^2, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1. ***a)*** Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de f.

c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

4. Tracer $\mathcal{C}$. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine et en chacun des points d'inflexion.

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 xf(x)dx$.
A cet effet, on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = 1 + x^2$.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

2. Établir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

3. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

4. ***a)*** Établir : $\forall x \in [0;1],\ f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \ \leqslant\ 2\ (u_n - u_{n+1})$.

c) Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n^2$ converge.

Exercice 3 : EDHEC 2010

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

2. ***a)*** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2$.

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).

c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leqslant x$.

d) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.

3. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $\left[2, \mathrm{e}^2\right]$.

4. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$.

c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}$.

d) Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

5. Écrire en **Scilab** une fonction `SuiteU` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie le terme $u_{\mathtt{n}}$.

6. ***a)*** Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{2^n}$.
Déterminer un entier N tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$.

b) Déduire de cet encadrement un programme **Scilab** permettant de déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près. *On pourra utiliser la fonction* `SuiteU`.

Exercice 4 : EDHEC 1998

La partie ***I*** permet d'établir des résultats utiles pour les parties ***II*** et ***III***.
Les parties ***II*** et ***III*** sont indépendantes entre elles.
On considère la fonction f définie pour tout réel x positif ou nul par $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

Partie I

1. ***a)*** Dresser le tableau de variations de f.

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant x$, l'égalité ayant lieu seulement pour $x = 0$.

2. ***a)*** Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$\mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$$

b) En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$, puis pour $n = 3$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$$

Partie II

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. ***a)*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]0,1]$.

b) Montrer, grâce à la question ***I.1)***, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - u_{n+1} \geqslant 0$.

c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

2. ***a)*** Simplifier, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1})$.

b) En déduire que la série de terme général $(u_n - u_{n+1})$ est convergente.

c) En utilisant la question ***I.2)***, montrer que $u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{{u_n}^2}{2}$ en $+\infty$.

d) Donner enfin la nature de la série de terme général ${u_n}^2$.

Partie III

1. On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\phi(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \phi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

On considère la fonction réelle g définie par $g(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \phi(t)\ dt$.

2. ***a)*** Vérifier que g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1 - \dfrac{x}{4} \leqslant g(x) \leqslant 1 - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{18}$.

c) En déduire que g est continue en 0, dérivable en 0 puis donner $g'(0)$.

3. ***a)*** Montrer que : $\forall x \in \,]1,+\infty]$, $\displaystyle\int_1^x \phi(t)\ dt \leqslant \ln(x)$.

b) En déduire que g a une limite finie en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.

4. ***a)*** Pour tout réel x strictement positif, calculer $g'(x)$ et l'écrire sous la forme $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

b) Montrer alors que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $xh'(x) = (x+1)\ \mathrm{e}^{-x} - 1$.

c) Étudier la fonction notée k définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $k(x) = (x+1)\ \mathrm{e}^{-x} - 1$.

d) Donner le signe de k, puis les variations de h et enfin celles de g.

e) Dresser le tableau de variations de g et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.