Suites et séries

Exercice 1 : `ESCP 1991-G`

L'objet de ce problème est la recherche du comportement asymptotique du maximum sur $[0,1]$ d'une suite de fonction.

Partie I : Étude du maximum d'une fonction

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$

1. *Variation de f*

a) Calculer la dérivée f' de f.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car c'est le quotient de :
  - × $x \mapsto x$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
  - × $x \mapsto e^x + 1$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$.
    (on a même : $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x + 1 > 0$)
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1) - x\ e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x - x\ e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f'(x) = \frac{(1-x)\ e^x + 1}{(e^x + 1)^2}}$$

□

b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur $\mathbb{R}_+$.
Pour ce faire, on étudiera la variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = (1-x)\ e^x + 1$$

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{(1-x)\ e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = 0 \ \Leftrightarrow\ (1-x)\ e^x + 1 = 0 \ \Leftrightarrow\ g(x) = 0$$

(la deuxième équivalence est vérifiée car $(1 + e^x)^2 > 0$)

- La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
$$g'(x) = -e^x + (1-x)\ e^x = -x\ e^x \leqslant 0 \quad (car\ x \geqslant 0)$$
- On en déduit le tableau de variations suivants :

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
Signe de $g'(x)$	0 $\qquad$ $-$
Variations de g	2 $\searrow$ $-\infty$

En effet :

× $\lim\limits_{x\to 0} (1-x)\ e^x + 1 = 0 = g(0) = e^0 + 1 = 2$

× comme $1 - x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$ alors $(1-x)\ e^x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x\ e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
Et ainsi : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

- La fonction g est :

× continue sur $[0, +\infty[$,

× strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

Ainsi, g réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $g([0, +\infty[)$. Or :
$$g([0, +\infty[) = \big]\lim_{x\to+\infty} g(x), g(0)\big] =]-\infty, 2]$$
Comme $0 \in]-\infty, 2]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [0, +\infty[$.

$\boxed{\text{On en déduit que } f'(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in \mathbb{R}_+.}$

□

c) Prouver que : $f(\alpha) = \alpha - 1$.

Démonstration.
On raisonne par équivalence.
$$\begin{aligned} & f(\alpha) = \alpha - 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\alpha}{e^\alpha + 1} = \alpha - 1 \\ \Leftrightarrow\ & \alpha = (\alpha - 1)\ (e^\alpha + 1) \\ \Leftrightarrow\ & \alpha = (\alpha - 1)\ e^\alpha + (\alpha - 1) \\ \Leftrightarrow\ & 0 = (\alpha - 1)\ e^\alpha - 1 \\ \Leftrightarrow\ & 0 = -g(\alpha) \\ \Leftrightarrow\ & g(\alpha) = 0 \end{aligned}$$
La dernière égalité étant vérifiée, il en est de même de la première.

$\boxed{f(\alpha) = \alpha - 1}$

□

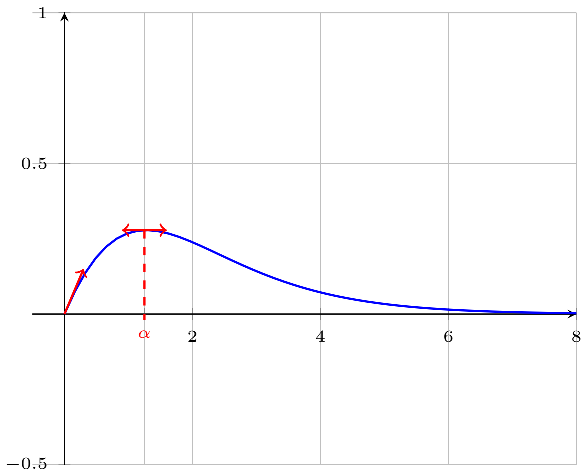
d) Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure du graphe de cette fonction.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

- Comme $(e^x + 1)^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $(1 - x)\ e^x + 1 = g(x)$.
  On peut alors déduire du tableau de variations de g celui de f :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g'(x)$	0	$-$		$-$	
Variations de g	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\alpha - 1$	$\searrow$	0

  En effet :
  $\times$ $f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{x}{e^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
- D'autre part, la courbe de f :
  $\times$ admet une tangente horizontale en α.
  $\times$ admet pour tangente la droite d'équation $y = f(0) + f'(0)\ (x - 0) = \dfrac{1}{2}\ x$.
- On en déduit l'allure suivante pour le graphe de f.



□

2. *Approximation de α*
Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$\varphi(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

a) Prouver que α est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \varphi(x) = x \ \Leftrightarrow \ x = 1 + \mathrm{e}^{-x} \quad & \Leftrightarrow \quad (1-x) + \mathrm{e}^{-x} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad ((1-x)\ \mathrm{e}^{x} + 1)\ \mathrm{e}^{-x} = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad (1-x)\ \mathrm{e}^{x} + 1 = 0 \qquad (\textit{car } \mathrm{e}^{-x} > 0) \\ & \Leftrightarrow \quad g(x) = 0 \end{aligned}$$

Or, par définition, α est l'unique solution, dans $\mathbb{R}_+$, de l'équation $g(x) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \alpha \text{ est l'unique solution de l'équation } \varphi(x) = x.}$$

□

b) Montrer que $\alpha > 1$. En déduire que :

$$\alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}$$

Démonstration.

- Tout d'abord :
  - × $g(\alpha) = 0$.
  - × $g(1) = (1-1)\ \mathrm{e}^1 + 1 = 1$.

  Ainsi : $g(\alpha) < g(1)$.
- Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $g^{-1} : [0, +\infty[\ \to \ ]-\infty, 2]$ est strictement décroissante. En appliquant g^{-1} de part et d'autre de l'égalité, on obtient :

$$\boxed{\alpha > 1}$$

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors : $\varphi'(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$.
  Ainsi, la fonction φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
  En appliquant φ de part et d'autre de l'inégalité précédente, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} \varphi(\alpha) & < & \varphi(1) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \alpha & & 1 + \mathrm{e}^{-1} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}.}$$

Remarque
On pouvait rédiger autrement. Détaillons cette solution.

D'après la question précédente : $\varphi(\alpha) = \alpha$. Ainsi : $\alpha = 1 + \mathrm{e}^{-\alpha}$. Et donc :

$$\alpha - 1 = \mathrm{e}^{-\alpha} < \mathrm{e}^{-1}$$

En effet, comme $\alpha > 1$, alors $-\alpha < -1$ et $\mathrm{e}^{-\alpha} < \mathrm{e}^{-1}$ par stricte croissance de la fonction exp.
D'où le résultat.

□

c) Établir que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1 :

$$\varphi(x) \geqslant 1$$

et que

$$|\varphi(x) - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-1}\,|x - \alpha|$$

Démonstration.
Soit $x \geqslant 1$.

- Tout d'abord :

$$\varphi(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x} > 1 \quad \text{car} \quad \mathrm{e}^{-x} > 0$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 1,\ \varphi(x) \geqslant 1}$$

- D'autre part :

$$|\varphi'(x)| = |-\mathrm{e}^{-x}| = \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$$

  En effet, comme $x \geqslant 1$, on a $-x \leqslant -1$ et $\mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-1}$ par application de la fonction exp strictement croissante.

- D'après ce qui précède :
  × φ est dérivable sur $[1, +\infty[$,
  × $\forall x \in [1, +\infty[$, $|\varphi'(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-1}$.

  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (u, v) \in [1, +\infty[^2,\ |\varphi(v) - \varphi(u)| \ \leqslant\ \mathrm{e}^{-1}\ |v - u|$$

  En appliquant cette inégalité à $v = x \in [1, +\infty[$ et $u = \alpha \in [1, +\infty[$ (d'après la question ***2.b)***), on obtient :

$$|\varphi(x) - \varphi(\alpha)| \ \leqslant\ \mathrm{e}^{-1}\ |x - \alpha|$$

  Enfin, d'après la question ***2.a)***, $\varphi(\alpha) = \alpha$.

$$\boxed{\forall x \geqslant 1,\ \ |\varphi(x) - \alpha| \ \leqslant\ \mathrm{e}^{-1}\ |x - \alpha|}$$

□

d) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $[1; +\infty[$ définie par la condition initiale $\alpha_0 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n)$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\alpha_n - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-(n+1)}$$

Démonstration.

- Par une récurrence immédiate, on peut démontrer la propriété affirmée par l'énoncé :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \geqslant 1$$

  En effet :
  × $\alpha_0 = 1 \geqslant 1$.
  × si $\alpha_n \geqslant 1$ alors, par la question ***2.c)***, $\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n) \geqslant 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité précédente à $x = \alpha_n \in [1, +\infty[$, on obtient que :

$$|\ \underset{\alpha_{n+1}}{\underset{\shortparallel}{\varphi(\alpha_n)}}\ - \alpha\ | \ \leqslant\ \mathrm{e}^{-1}\ |\alpha_n - \alpha|$$

- Démontrons alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $|\alpha_n - \alpha| \leqslant e^{-(n+1)}$.
  - ▶ **Initialisation** :
    Remarquons que : $|\alpha_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = \alpha - 1$ car $\alpha \geqslant 1$ d'après la question ***2.b)***.
    De plus, toujours d'après la question ***2.b)*** : $\alpha - 1 < e^{-1}$. On en déduit :
    $$|\alpha_0 - \alpha| \leqslant e^{-1}$$
    ce qui démontre $\mathcal{P}(0)$.
  - ▶ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $|\alpha_{n+1} - \alpha| \leqslant e^{-(n+2)}$).
    On remarque alors :
    $$\begin{array}{rcll} |\varphi(\alpha_n) - \alpha| & \leqslant & e^{-1}\ |\alpha_n - \alpha| & \textit{(d'après le point évoqué ci-dessus)} \\ & \leqslant & e^{-1}\ e^{-(n+1)} & \textit{(par hypothèse de récurrence } \mathcal{P}(n)\textit{)} \\ & = & e^{-1-(n+1)} \ = \ e^{-(n+2)} & \end{array}$$
    On en conclut que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ |\alpha_n - \alpha| \leqslant e^{-(n+1)}.}$$

□

e) En déterminant au préalable le nombre d'itérations nécessaires, écrire en **Scilab** un programme permettant de trouver et d'**afficher** une valeur décimale approchée $\tilde{\alpha}$ de α telle que :
$$|\tilde{\alpha} - \alpha| \leqslant 10^{-6}$$

Démonstration.

- Afin de calculer une valeur approchée de α à 10^{-6} près, il suffit de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que :
  $$e^{-(N+1)} \leqslant 10^{-6}$$
- En effet, d'après la question précédente, on aura alors :
  $$|\alpha_N - \alpha| \leqslant e^{-(N+1)} \leqslant 10^{-6}$$
  et ainsi $\tilde{\alpha} = \alpha_N$ convient.
- On remarque alors que :
  $$\begin{array}{rcll} e^{-(n+1)} \leqslant 10^{-6} & \Leftrightarrow & -(n+1) \leqslant \ln(10^{-6}) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & -(n+1) \leqslant -6\ \ln(10) & \\ & \Leftrightarrow & n+1 \geqslant 6\ \ln(10) & \\ & \Leftrightarrow & n \geqslant 6\ \ln(10) - 1 & \end{array}$$
  En choisissant $N = \lceil 6\ \ln(10) - 1 \rceil$ (ou tout entier supérieur), on obtient bien que α_N est une approximation de α à 10^{-6} près.

- Le programme **Scilab** suivant stocke les valeurs successives de α_n dans une variable `a`. Après N itérations, on obtient la valeur attendue α_N qui est alors affichée.

```
N = ceil(6 * log(10) - 1)
a = 1
for i = 1:N
    a = 1 + exp(-a)
end
disp(a)
```

□

Exercice 2 : EML 2010

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application de classe C^2, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x^2)$$

et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
On donne la valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Partie I : Étude de f et tracé de $\mathcal{C}$

1. a) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car est la composée $h \circ g$ des fonctions :
  - × $g : x \mapsto 1 + x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et telle que $g(\mathbb{R}) \subset \,]0, +\infty[$.
    (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$)
  - × $h : x \mapsto \ln(x)$, dérivable sur $]0, +\infty[$.
- On en déduit que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}\, 2x = \frac{(1+x^2) - 2x}{1+x^2} = \frac{1 - 2x + x^2}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{(1-x)^2}{1+x^2}}$$

□

b) En déduire le sens de variation de f.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Comme $1 + x^2 > 0$, la quantité $f'(x) = \dfrac{(1-x)^2}{1+x^2}$ est du signe de $(1-x)^2$.
  On en déduit le tableau de variations suivant pour f.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les différents éléments de ce tableau.
  - Déterminons tout d'abord $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Si $x > 0$:
$$\ln(1+x^2) = \ln\left(x^2 \ \left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right) = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = 2\ \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$
    On a alors :
$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x - \ln(1+x^2) \\ & = & x - 2\ \ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\ & = & x\ \left(1 - 2\ \dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}\right) \end{array}$$
    Or : $\dfrac{\ln(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
    Et : $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$ et $x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
    On en déduit que : $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$
  - Déterminons maintenant $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Remarquons que :
    - $x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$
    - comme $1+x^2 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors, par théorème de composition des limites : $-\ln(1+x^2) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
$$\boxed{\text{On en déduit que : } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.}$$

Remarque

- On utilise dans cette démonstration l'égalité : $\ln(x^2) = 2\ln(x)$. Insistons sur le fait que cette égalité n'est vérifiée que lorsqu'on peut l'écrire. Autrement dit, cette égalité est vérifiée seulement lorsque $x > 0$ (la quantité $\ln(x)$ est alors bien définie).
- Dans le cas où $x < 0$ on peut écrire :
$$\ln(x^2) = \ln((-x)(-x)) = \ln(-x) + \ln(-x) = 2\ln(-x)$$
□

c) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.

Démonstration.
Par le même raisonnement qu'en ***1.a)***, on démontre que la fonction f est deux fois dérivable (et même C^∞) sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{array}{rcl} f''(x) & = & \dfrac{2\ (1-x)(-1)(1+x^2) - (1-x)^2\ 2x}{(1+x^2)^2} \\ & = & -2\ (1-x)\ \dfrac{(1+x^2) + x\ (1-x)}{1+x^2} \\ & = & -2\ (1-x)\ \dfrac{1+\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{(1+x^2)^2} \ = \ -2\ (1-x)\ \dfrac{1+x}{(1+x^2)^2} \end{array}$$
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = 2\ (x-1)\ \frac{1+x}{(1+x^2)^2}}$$
□

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

Démonstration.
Cette question a été résolue en ***1.b)***.

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

Remarque

- En question ***1.b)***, il est demandé de donner les variations de f. Formellement, on ne demande donc pas le tableau de variations. On l'a fait car c'est le bon outil pour représenter graphiquement les choses. Dans ce cas, on doit exposer les calculs de limite en ***1.b)***.
- Il faut veiller à éviter de renvoyer le correcteur à une autre page / question pour la résolution d'une question. Il faut au contraire toujours faciliter la lecture pour le correcteur. En commençant par respecter scrupuleusement la numérotation des questions.
- L'ordre des questions de l'énoncé n'était peut-être pas heureux mais en lisant l'énoncé jusqu'au bout, on évite de répondre aux questions au mauvais endroit. On s'efforcera de respecter au maximum l'esprit de l'énoncé. □

3. Montrer que $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $(1+x^2)^2 > 0$, $f''(x)$ est du signe de $(x-1)(1+x)$.
C'est un polynôme de degré 2 dont le cœfficient du terme de plus haut degré est positif.
On en déduit que :

– $\forall x \in \,]-1,1[,\ f''(x) < 0$
  ($f''(x) < 0$ dans l'intervalle défini par les racines du polynôme)

– $\forall x \in \,]-\infty,-1[\, \cup \,]1,+\infty[,\ f''(x) > 0$

Ainsi, f'' s'annule en changeant de signe en -1 et en 1.

$\boxed{\text{La courbe représentative de } f \text{ admet deux points d'inflexion : } (-1,-1-\ln(2)) \text{ et } (1,1-\ln(2)).}$

Remarque
On pouvait aussi dresser le tableau de signe de $f''(x)$.

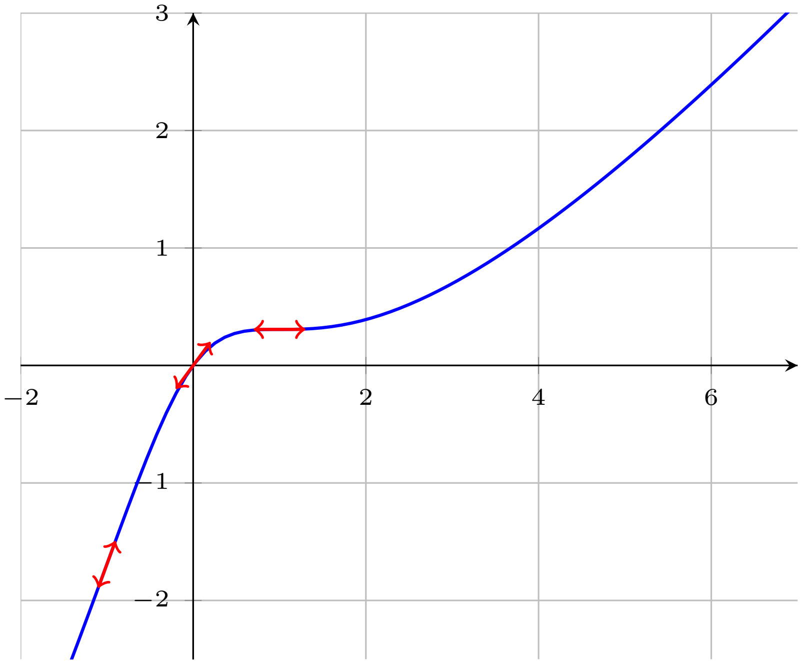
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

□

4. Tracer $\mathcal{C}$. On utilisera un repère orthonormé d'unité graphique 2 centimètres, et on précisera la tangente à $\mathcal{C}$ en l'origine et en chacun des points d'inflexion.

Démonstration.

- Déterminons l'équation des tangentes demandées.
  - Au point $(0, f(0))$, la courbe $\mathcal{C}$ admet pour tangente la droite d'équation :
$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = x$$
  - Au point $(-1, f(-1))$, la courbe $\mathcal{C}$ admet pour tangente la droite d'équation :
$$y = f(-1) + f'(-1)(x - (-1)) = (-1 - \ln(2)) + 2\ (x + 1) = 2x + (1 - \ln(2))$$
  - Au point $(1, f(1))$, la courbe $\mathcal{C}$ admet pour tangente la droite d'équation :
$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 - \ln(2)$$
  (comme $f'(1) = 0$, on obtient une tangente horizontale)
- En regroupant toutes les informations précédentes on obtient le graphe suivant.



□

5. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\ dx$.
A cet effet, on pourra utiliser le changement de variable défini par $t = 1 + x^2$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto x f(x)$ est continue sur $[0, 1]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x f(x) dx$ est donc bien définie.
Par linéarité de l'intégration, on a :
$$\int_0^1 x f(x)\ dx \ = \ \int_0^1 x\ \left(x - \ln(1 + x^2)\right)\ dx \ = \ \int_0^1 x^2\ dx - \int_0^1 x\ \ln(1 + x^2)\ dx$$

- Tout d'abord :

$$\int_0^1 x^2 \, dx \;=\; \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \;=\; \frac{1}{3} \left[x^3 \right]_0^1 \;=\; \frac{1}{3} \left(1^3 - 0^3\right) \;=\; \frac{1}{3}$$

- La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ est C^1 sur $[0, 1]$.
  On peut donc effectuer le changement de variable $\boxed{t = 1 + x^2}$.

  $t = 1 + x^2$
  (et donc $x^2 = t - 1$, et $x = \sqrt{t-1}$ car $\sqrt{x^2} = |x| = x$ puisque $x \in [0, 1]$)
  $\hookrightarrow dt = 2x \;\, dx$ et $dx = \dfrac{1}{2x} \, dt = \dfrac{1}{2\sqrt{t-1}} \, dt$
  - $x = 0 \;\Rightarrow\; t = 1 + 0^2 = 1$
  - $x = 1 \;\Rightarrow\; t = 1 + 1^2 = 2$

  (ainsi $t \in [1, 2]$ et donc $t - 1 \in [0, 1]$ ce qui permet de justifier l'écriture $\sqrt{t-1}$)

  On a donc :

$$\int_0^1 x \; \ln(1 + x^2) \, dx \;=\; \int_1^2 \cancel{\sqrt{t-1}} \; \ln(t) \, \frac{1}{2\,\cancel{\sqrt{t-1}}} \, dt \;=\; \frac{1}{2} \int_1^2 \ln(t) \; dt$$

  On procède alors par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & \ln(t) & \quad & u'(t) & = & \dfrac{1}{t} \\[2ex] v'(t) & = & 1 & & v(t) & = & t \end{array} \right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont C^1 sur $[1, 2]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln(t) \; dt \;&=\; \left[\, t \; \ln(t) \, \right]_1^2 - \int_1^2 \cancel{t} \, \frac{1}{\cancel{t}} \, dt \\ &=\; (2 \; \ln(2) - 1 \; \cancel{\ln(1)}) - 1 \\ &=\; 2 \; \ln(2) - 1 \end{aligned}$$

- Il reste à combiner tous ces résultats :

$$\int_0^1 x \; f(x) \, dx \;=\; \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(2 \ln(2) - 1\right) \;=\; \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \ln(2) \;=\; \frac{5}{6} - \ln(2)$$

$$\boxed{\int_0^1 x f(x) \, dx = \frac{5}{6} - \ln(2)}$$

□

Remarque

- On démontre, dans cette question, un résultat classique : la fonction $x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction ln.
- Ce résultat n'est pas officiellement au programme mais son utilisation directe ne serait certainement pas sanctionnée. Pour autant, il est important de savoir le démontrer rapidement : cela pourrait être explicitement demandé.

Partie II : Étude d'une suite et d'une série associées à f

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Remarquons tout d'abord que :

$$f(x) - x = -\ln(1 + x^2) \leqslant 0$$

En effet, $1 + x^2 \geqslant 1$ et donc, par croissance de la fonction ln, $\ln(1 + x^2) \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant x.}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On appplique l'inégalité précédente à $x = u_n \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est bien décroissante.}}$$

□

2. Établir que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite.

Démonstration.

- La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. On en déduit que :

$$f([0, +\infty[) \ = \ [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)[\ = \ [0, +\infty[$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 0,\ f(x) \geqslant 0}$$

- Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geqslant 0$.
  - **Initialisation** :
    Par définition : $u_0 = 1 \geqslant 0$.
    On en déduit $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \geqslant 0$).
    Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 0$.
    En appliquant l'inégalité au-dessus à $x = u_n \geqslant 0$, on obtient :

    $$u_{n+1} = f(u_n) \geqslant 0$$

    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

- La suite (u_n) est :
  × décroissante,
  × minorée par 0.

  Elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

- La fonction f étant continue en ℓ, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ {\scriptstyle n \to +\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n \to +\infty}\downarrow \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

Ainsi, ℓ est un point fixe de f.

- Déterminons alors l'ensemble des points fixes de f.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad & \Leftrightarrow \quad \cancel{x} - \ln\left(1 + x^2\right) = \cancel{x} \\ & \Leftrightarrow \quad \ln\left(1 + x^2\right) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \exp\left(\ln\left(1 + x^2\right)\right) = \exp(0) \\ & \Leftrightarrow \quad \cancel{1} + x^2 = \cancel{1} \\ & \Leftrightarrow \quad x^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad x = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0, \text{ seul point fixe de } f.}$$

□

3. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

Démonstration.

```
n = 0
u = 1
while u > 10^(-3)
    n = n + 1
    u = u - log(1 + u^2)
end
disp(n)
```

Remarque

- D'après la question précédente, on sait que la suite (u_n) converge vers 0. On en déduit qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \ |u_n - 0| \leqslant 10^{-3}$$

Toujours d'après la question précédente : $|u_n - 0| = |u_n| = u_n$ car $u_n \geqslant 0$.

- Ainsi, on est assuré de la terminaison de la boucle `while`. Le programme consiste en fait à rechercher le premier rang n_0 tel que l'inégalité $u_n \leqslant 10^{-3}$ est vérifiée.

□

4. ***a)*** Établir : $\forall x \in [0;1], \ f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.

Démonstration.
Soit $x \in [0, 1]$.

- Raisonnons par équivalence :

$$f(x) \leqslant x - \frac{1}{2}\, x^2 \ \Leftrightarrow \ \cancel{x} - \ln(1+x^2) \leqslant \cancel{x} - \frac{1}{2}\, x^2 \ \Leftrightarrow \ 2 \, \ln(1+x^2) \geqslant x^2 \ \Leftrightarrow \ 2 \, \ln(1+x^2) - x^2 \geqslant 0$$

- On considère alors la fonction $g : x \mapsto 2\ \ln(1+x^2) - x^2$.
  Cette fonction est dérivable sur $[0,1]$ (même sur $\mathbb{R}$) car $x \mapsto \ln(1+x^2)$ l'est.

$$g'(x) \ = \ 2\ \frac{1}{1+x^2}\ 2x - 2x \ = \ 2x\ \frac{2}{1+x^2} - 1 \ = \ 2x\ \frac{2-(1+x^2)}{1+x^2} \ = \ 2x\ \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

- Tout d'abord : $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$.
  Comme $x \in [0,1]$, $2x \geqslant 0$ et ainsi la quantité $g'(x)$ est du signe de $(1-x^2) = (1-x)(1+x)$ et est nulle si $x = 0$. On reconnaît l'expression d'un polynôme du second degré de racines évidentes -1 et 1 et dont le cœfficient du terme de plus haut degré est négatif. Ainsi :

$$\forall x \in [-1,1],\ g'(x) \geqslant 0$$

- La fonction g est donc croissante sur $[0,1]$. On en déduit que :

$$\forall x \in [0,1],\ g(x) \geqslant g(0) = 2\ \ln(1+0^2) - 0^2 = 0$$

Cette inégalité étant équivalente à celle qu'on souhaite montrer, on a bien : $\forall x \in [0,1],\ f(x) \leqslant x - \frac{1}{2}\ x^2$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^2 \ \leqslant\ 2\ (u_n - u_{n+1})$.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :

$$\begin{array}{ll} & f(x) \leqslant x - \frac{1}{2}\ x^2 \\ \text{donc} & \frac{1}{2}\ x^2 \leqslant x - f(x) \\ \text{ainsi} & x^2 \leqslant 2\ (x - f(x)) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ x^2 \leqslant 2\ (x - f(x))}$$

- On a démontré en question ***2.*** que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$.
  On sait de plus, d'après la question ***1.***, que la suite (u_n) est décroissante. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_0 = 1$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité précédente à $x = u_n \in [0,1]$, on obtient :

$$u_n^2 \leqslant 2\ (u_n - f(u_n))$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \leqslant 2\ (u_n - u_{n+1})$.

□

c) Démontrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n^2$ converge.

Démonstration.

- Démontrons tout d'abord que la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est convergente.
  Pour ce faire, on étudie la suite de ses sommes partielles (S_n) :

$$S_n \ = \ \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) \ = \ u_0 - u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} u_0 - 0 = 1$$

$$\boxed{\text{La série } \sum (u_n - u_{n+1}) \text{ est convergente (de somme 1).}}$$

- – D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ 0 \leqslant u_n^2 \leqslant 2 \ (u_n - u_{n+1})$$

  – Or la série $\sum (u_n - u_{n+1})$ est convergente (on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par un réel).

  – On en déduit, par le critère de comparaison des séries à termes positifs que la série $\sum u_n^2$ est elle aussi convergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n^2 \text{ est convergente.}}$$

□

Exerice 3 : EDHEC 2010

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
u_0 &= \prod_{k=0}^{0}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = 1 + \frac{1}{2^0} = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2 \\
u_1 &= \prod_{k=0}^{1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \left(1+\frac{1}{2^0}\right)\left(1+\frac{1}{2^1}\right) = 2\left(1+\frac{1}{2}\right) = \cancel{2}\frac{3}{\cancel{2}} = 3 \\
u_2 &= \prod_{k=0}^{2}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \left(1+\frac{1}{2^0}\right)\left(1+\frac{1}{2^1}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right) = 3\left(1+\frac{1}{4}\right) = 3\frac{5}{4} = \frac{15}{4}
\end{aligned}$$

$$\boxed{u_0 = 2,\ u_1 = 3 \text{ et } u_2 = \frac{15}{4}.}$$

□

2. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 2$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_n = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \left(1+\frac{1}{2^0}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = 2\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $1 + \frac{1}{2^k} \geqslant 1$. Donc : $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \geqslant 1$. Donc :

$$u_n = 2\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \geqslant 2 \times 1 = 2$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 2.}$$

Remarque
On pouvait aussi résoudre cette question grâce à une récurrence.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geqslant 2$.

- **Initialisation** :
  $u_0 = 2 \geqslant 2$.
  Donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \geqslant 2$).

  $$u_{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \times \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) = u_n \times \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

  Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant 2$, donc :

  $$u_{n+1} \geqslant 2\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \geqslant 2 \times 1 = 2$$

  D'om $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.

□

b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord que :
$$u_{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) u_n}$$
- Étudions les variations de la suite (u_n).
D'après la question ***2.a)***, $u_n \geqslant 2$. Donc, en particulier, $u_n \neq 0$.
On peut alors écrire :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cancel{u_n}}{\cancel{u_n}} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \geqslant 1$$
Enfin, comme $u_n > 0$:
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \ \Leftrightarrow \ u_{n+1} \geqslant u_n$$
$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

□

c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1 + x) \leqslant x$.

Démonstration.

- Notons $f : x \mapsto \ln(1 + x)$.
La fonction f est C^2 sur $]-1, +\infty[$ comme composée $h \circ g$ de :
  × $h : x \mapsto 1 + x$ C^2 sur $]-1, +\infty[$ comme fonction polynomiale, et telle que : $h(]-1, +\infty[) =]0, +\infty[$.
  × $g : y \mapsto \ln(y)$ C^2 sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x > -1$.
$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0$$
Ainsi, f est concave sur $]-1, +\infty[$.
- Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ de f est située, en tout point, sous ses tangentes.
En particulier, $\mathcal{C}_f$ est située sous sa tangente en 0, droite d'équation :
$$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = x$$
$$\boxed{\forall x > -1,\ \ln(x + 1) \leqslant x}$$

Remarque

- L'égalité de l'énoncé propose de comparer une quantité en x à un polynôme de degré 1. Il faut donc comprendre que l'on compare les positions de la courbe d'une fonction et d'une droite. Il est donc naturel de penser à une inégalité de convexité.
- Il était aussi possible de résoudre cette question en étudiant de la fonction $g : x \mapsto x - \ln(x+1)$. Il s'agit alors de dresser son tableau de variation et de montrer que : $\forall x > 1,\ g(x) \geqslant 0$.
Cette solution moins astucieuse et rapide a le mérite de toujours fonctionner.
Il faut donc s'assurer de savoir procéder ainsi.

□

d) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'bord que :

$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

- Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En appliquant l'inégalité de la question ***2.c)*** à $\dfrac{1}{2^k} > -1$, on obtient :

$$\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

- En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right) \leqslant 2$$

car $1 - \dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{La suite } (\ln(u_n)) \text{ est majorée par } 2.}$$

□

3. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in \left[2, \mathrm{e}^2\right]$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rll} & \ln(u_n) \leqslant 2 & \\ \text{donc} & u_n \leqslant \mathrm{e}^2 & \textit{(par croissance de la fonction } x \mapsto e^x\textit{)} \end{array}$$

- Ainsi, la suite (u_n) est :
  - × croissante d'après la question ***2.b)***,
  - × majorée par 2.

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell \leqslant \mathrm{e}^2.}$$

- D'après la question ***2.a)***, $u_n \geqslant 2$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$$

Par passage à la limite, on obtient : $2 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{e}^2$.

$$\boxed{\ell \in [2, \mathrm{e}^2]}$$

□

4. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a : $\ln(\ell) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- On sait que :
  - $\times$ la suite (u_n) est convergente de limite ℓ,
  - $\times$ la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $[2, e^2]$, donc en particulier est continue en $\ell \in [2, e^2]$.

  On en déduit que la suite $(\ln(u_n))$ est convergente et de limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(\ell)$$

- Cette limite s'écrit :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

$$\boxed{\text{En combinant ces résultats, on obtient : } \ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).}$$

□

b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) &= \ln(\ell) - \ln(u_n) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \\
&= \left(\cancel{\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\right) - \cancel{\sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)}$$

□

c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question ***2.c)***, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Pour tout $k \geqslant n+1$, $\dfrac{1}{2^k} \geqslant 0$, donc $\dfrac{1}{2^k} + 1 \geqslant 1$ et ainsi : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right) \geqslant 0$.
  On en déduit que :
  $$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \geqslant 0$$
  comme somme d'éléments positifs.
- Par ailleurs, on a démontré en ***2.d)*** que pour tout $k \geqslant n+1$: $\ln\left(1 + \dfrac{1}{2^k}\right) \leqslant \dfrac{1}{2^k} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.
  On en déduit que :
  $$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$
  Or :
  $$\begin{aligned}
  \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
  &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right) \\
  &= 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n
  \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n}.}$$

□

d) Déduire de la question précédente que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question précédente :

$$\begin{array}{llcccl}
 & 0 & \leqslant & \ln\left(\dfrac{\ell}{u_n}\right) & \leqslant & \dfrac{1}{2^n} \\
\text{donc} & 1 = \mathrm{e}^0 & \leqslant & \dfrac{\ell}{u_n} & \leqslant & \mathrm{e}^{\frac{1}{2^n}} \quad \textit{(car } x \mapsto e^x \textit{ est croissante)} \\
\text{et} & 1 & \geqslant & \dfrac{u_n}{\ell} & \geqslant & \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}} \quad \textit{(car } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\
\text{ainsi} & \ell & \geqslant & u_n & \geqslant & \ell\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}} \quad \textit{(car } \ell \geqslant 0\textit{)} \\
\text{d'où} & -\ell & \leqslant & -u_n & \leqslant & -\ell\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}} \\
\text{enfin} & 0 & \leqslant & \ell - u_n & \leqslant & \ell - \ell\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}} = \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right)}$$

□

e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \dfrac{\ell}{2^n}$.
Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Démonstration.

- Notons $f : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
  La fonction f est C^2 sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions C^2 sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  $$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$$
  Ainsi, f est concave sur $\mathbb{R}$.
- Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ de f est située, en tout point, sous ses tangentes.
  En particulier, $\mathcal{C}_f$ est située sous sa tangente en 0, droite d'équation :
  $$y = f(0) + f'(0)(x - 0) = x$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \mathrm{e}^{-x} \leqslant x.}$$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'inégalité précédente appliquée à $x = \dfrac{1}{2^n} \in \mathbb{R}$, on obtient :
  $$1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}} \leqslant \frac{1}{2^n}$$
  et ainsi, d'après la question précédente :
  $$\ell - u_n \leqslant \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right) \leqslant \ell\ \frac{1}{2^n}$$
  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n}}$$
- Finalement, on sait que :
  × $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \dfrac{\ell}{2^n}$,
  × la série $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est convergente car c'est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ avec $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$.
  Il en est de même de la série $\sum \dfrac{\ell}{2^n}$ *(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par $\ell \neq 0$).*

  D'après le critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum (\ell - u_n)$ converge.
  $$\boxed{\sum (\ell - u_n) \text{ est une série convergente.}}$$

□

5. Écrire en **Scilab** une fonction `SuiteU` prenant en paramètre un entier `n` et calculant en sortie le terme $u_{\mathtt{n}}$.

Démonstration.

```
function u = SuiteU(n)
    u = 2
    for k = 2:n
        u = u ⋆ (1 + 1/2 ^ k)
    end
endfunction
```

□

6. a) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ |\ell - u_n| \leqslant \dfrac{e^2}{2^n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Remarquons tout d'abord que d'après la question ***4.e)*** : $u_n - \ell \geqslant 0$.
  Ainsi : $|u_n - \ell| = u_n - \ell$.
- D'après la question ***3.***, $\ell \leqslant e^2$. Ainsi, toujours d'après la question ***4.e)*** :

$$0 \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{\ell}{2^n} \leqslant \frac{e^2}{2^n}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ |\ell - u_n| \leqslant \frac{e^2}{u_n}}$$

□

b) Déterminer un entier N tel que : $\forall n \geqslant N, \ |u_n - \ell| \leqslant 10^{-3}$.

Démonstration.

- Il suffit de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$:

$$\frac{e^2}{2^n} \ \leqslant \ 10^{-3}$$

  car alors, par transitivité, on aura :

$$|\ell - u_n| \ \leqslant \ \frac{e^2}{2^n} \ \leqslant \ 10^{-3}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{e^2}{2^n} \leqslant 10^{-3} & \Leftrightarrow & \dfrac{2^n}{e^2} \geqslant 10^3 & \textit{(car } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & 2^n \geqslant 10^3 \, e^2 & \textit{(car } e^2 > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & n\ln(2) \geqslant \ln(10^3) + \ln(e^2) & \textit{(car } x \mapsto \ln(x) \textit{ est strictement croissante)} \\ & \Leftrightarrow & n\ln(2) \geqslant 3\ln(10) + 2 & \\ & \Leftrightarrow & n \geqslant \dfrac{3\ln(10)+2}{\ln(2)} & \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{L'entier } N = \left\lceil \frac{3\ln(10)+2}{\ln(2)} \right\rceil \text{ convient.}}$$

□

c) Déduire de cet encadrement un programme **Scilab** permettant de déterminer une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près. *On pourra utiliser la fonction* `SuiteU`.

Démonstration.

```
N = ceil((2 + 3 ⋆ log(10)) / log(2))
u = SuiteU(N)
disp(u)
```

□

Problème (EDHEC 1998)

La partie ***I*** permet d'établir des résultats utiles pour les parties ***II*** et ***III***.
Les parties ***II*** et ***III*** sont indépendantes entre elles.
On considère la fonction f définie pour tout réel x positif ou nul par $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

Partie I

1. a) Dresser le tableau de variations de f.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ l'est comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors :
$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} > 0$$
- On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$
Variations de f	$0 \nearrow 1$

En effet :
× $\lim\limits_{x \to 0} 1 - \mathrm{e}^{-x} = 1 - \mathrm{e}^{-0} = 1 - 1 = 0$,
× $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \mathrm{e}^{-x} = 1 - 0 = 1$. □

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant x$, l'égalité ayant lieu seulement pour $x = 0$.

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto f(x) - x$.
La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ car f l'est. De plus :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h'(x) = f'(x) - 1 = \mathrm{e}^{-x} - 1 = -f(x)$$
- Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, $f(x) < 0$.
On en déduit que h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Comme de plus $h(0) = 0$ alors, pour tout $x \in]0, +\infty[$: $h(x) < 0$.

$\boxed{\text{On en déduit ainsi que } \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) \leqslant x, \text{ l'égalité ayant lieu seulement pour } x = 0.}$

Remarque

- On pouvait aussi invoquer un argument de convexité.
La fonction f est $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. De plus :
$$\forall x \geqslant 0,\ f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} < 0$$
Ainsi la fonction f est concave sur $[0, +\infty[$. Sa courbe représentative est donc située en dessous de ses tangentes. En particulier, elle est en dessous de sa tangente en 0, droite d'équation :
$$y = f(0) + f'(0)\ (x - 0) = x$$
- On peut toujours penser à ce type d'argument lorsqu'il s'agit de comparer une fonction f à une fonction affine (dont la courbe représentative est une droite).

□

2. ***a)*** Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$\mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$.

- **Initialisation** :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^1 \int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt &= \frac{(-1)^0\ x^0}{0!} - \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\ dt \ = \ 1 - \Big[-\mathrm{e}^{-t} \Big]_0^x \\ &= 1 + \Big[\mathrm{e}^{-t} \Big]_0^x \ = \ \cancel{1} + (\mathrm{e}^{-x} - \cancel{\mathrm{e}^0}) \ = \ \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

  D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$

  ($i.e.$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^{n+2} \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$).

  - Soit $x \in \mathbb{R}$. Par hypothèse de récurrence :

$$\mathrm{e}^{-x} \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$$

    Procédons par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{ll} u(t) = \mathrm{e}^{-t} & u'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \\ v'(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!} & v(t) = \dfrac{-1}{n+1}\ \dfrac{(x-t)^{n+1}}{n!} = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{array} \right.$$

    Cette IPP est valide car u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{(x-t)^{n+1}}{n!}\ dt &= \frac{-1}{(n+1)!}\ \Big[(x-t)^{n+1}\ \mathrm{e}^{-t} \Big]_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\ &= \frac{-1}{(n+1)!}\ \left(0 \times \mathrm{e}^{-x} - x^{n+1}\ \mathrm{e}^{-0}\right) - \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \end{aligned}$$

    On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-x} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^{n+2} \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \end{aligned}$$

    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$$

Remarque

- Cette question est un cas particulier de la formule de Taylor avec reste intégral.
Considérons une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ f^{(k)}(0)}{k!}\ x^k + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\ (x-t)^n\ dt$$
ce qu'on peut encore généraliser. Pour tout $a \in \mathbb{R}$:
$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\ f^{(k)}(a)}{k!}\ (x-a)^k + (-1)^{n+1} \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\ (x-t)^n\ dt$$
La démonstration se fait exactement comme celle que l'on vient de faire : par récurrence et à l'aide d'une IPP.
- Ce résultat, dont la démonstration ne nécessite que des outils basiques, permet de démontrer qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$ (en réalité, l'hypothèse minimale pour ce résultat est d'exiger f n fois dérivable) admet un développement limité en tout point $a \in \mathbb{R}$. Classe ! □

b) En écrivant l'égalité précédente pour $n = 2$, puis pour $n = 3$, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

- Pour $n = 2$, l'égalité se réécrit :
$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-x} &= \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k\ x^k}{k!} + (-1)^3 \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\
&= \frac{(-1)^0\ x^0}{0!} + \frac{(-1)^1\ x^1}{1!} + \frac{(-1)^2\ x^2}{2} - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \\
&= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt
\end{aligned}$$
Ainsi :
$$\underbrace{1-\mathrm{e}^{-x}}_{f(x)} \;=\; \cancel{1} - \left(\cancel{1} - x + \frac{x^2}{2} - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt\right) \;=\; x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$$
Enfin :
$$x - f(x) \;=\; \frac{x^2}{2} - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt$$
- Or, pour tout $t \in [0, x]$: $\dfrac{(x-t)^2}{2} \geqslant 0$.
Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissance $(0 \leqslant x)$:
$$\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \geqslant 0 \quad \text{et} \quad -\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \leqslant 0$$
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x - f(x) \;\leqslant\; \frac{x^2}{2} - \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2}\ \mathrm{e}^{-t}\ dt \;\leqslant\; \frac{x^2}{2}}$$

- On procède de même pour $n = 3$. L'égalité se réécrit :
$$e^{-x} \quad = \quad 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \ e^{-t} \ dt$$
Ainsi :
$$x - f(x) \ = \ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \ e^{-t} \ dt$$
- Or, pour tout $t \in [0, x]$: $\dfrac{(x-t)^3}{2} \geqslant 0$.
Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissance ($0 \leqslant x$) :
$$\int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \ e^{-t} \ dt \geqslant 0$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \ x - f(x) \ \geqslant \ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{6} \ e^{-t} \ dt \ \geqslant \ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}$$

□

Partie II

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in \,]0, 1]$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in \,]0, 1]$.

- **Initialisation** :
D'après l'énoncé : $u_0 = 1 \in \,]0, 1]$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \in \,]0, 1]$).
Par hypothèse de récurrence : $0 < u_n \leqslant 1$.
Par application de la fonction f, strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$:
$$\begin{array}{ccccc} f(0) & < & f(u_n) & \leqslant & f(1) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 0 & & u_{n+1} & & 1 \end{array}$$
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in \,]0, 1].}$$

□

b) Montrer, grâce à la question ***I.1)***, que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n - u_{n+1} \geqslant 0$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons démontré, en question ***I.1)*** :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \ f(x) \ \leqslant \ x$$
En appliquant cette inégalité à $x = u_n \in \,]0, 1] \subset \mathbb{R}_+$, on obtient : $u_{n+1} \leqslant u_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} \leqslant u_n}$$

□

c) Conclure quant à la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

Démonstration.

- La suite (u_n) est :
  - × décroissante d'après la question précédente,
  - × minorée par 0 d'après la question ***II.1.a)***.

  Elle est donc convergente vers une limite $\ell \in [0, 1]$.
  De plus, comme f est continue en ℓ (puisque continue sur $\mathbb{R}$) la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $f(\ell)$.
- On passe alors à la limite dans l'égalité de définition de la suite (u_n) :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n\to+\infty}\downarrow \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

  Ainsi, ℓ est un point fixe de f.
  Or, d'après la question ***I.1.b)***, le seul point fixe de f est 0.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est convergente de limite } \ell = 0}$$

□

2. a) Simplifier, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1})$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) = 1 - u_n}$$

□

b) En déduire que la série de terme général $(u_n - u_{n+1})$ est convergente.

Démonstration.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) = 1 - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - 0 = 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la série } \sum (u_n - u_{n+1}) \text{ est convergente, de somme } \sum_{k=0}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = 1.}$$

□

c) En utilisant la question ***I.2)***, montrer que $u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{{u_n}^2}{2}$ en $+\infty$.

Démonstration.

- On a démontré en quesiton ***I.2.b)*** :
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \ \leqslant\ x - f(x) \ \leqslant\ \frac{x^2}{2}$$
On applique cette inégalité à $x = u_n \in\ ]0,1] \subset \mathbb{R}_+$. On obtient :
$$\frac{{u_n}^2}{2} - \frac{{u_n}^3}{6} \ \leqslant\ u_n - f(u_n) \ \leqslant\ \frac{{u_n}^2}{2}$$
- Ainsi, en divisant par $\dfrac{{u_n}^2}{2} > 0$, on obtient :
$$\frac{\frac{{u_n}^2}{2}}{\frac{{u_n}^2}{2}} - \frac{\frac{{u_n}^3}{6}}{\frac{{u_n}^2}{2}} \ \leqslant\ \frac{u_n - u_{n+1}}{\frac{{u_n}^2}{2}} \ \leqslant\ \frac{\frac{{u_n}^2}{2}}{\frac{{u_n}^2}{2}}$$
ce qui se simplifie en :
$$1 - \frac{u_n}{3} \ \leqslant\ \frac{u_n - u_{n+1}}{\frac{{u_n}^2}{2}} \ \leqslant\ 1$$
- Enfin :
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{u_n}{3} = 1$,
  × $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

  Ainsi, par théorème d'encadrement, la suite $\left(\dfrac{u_n - u_{n+1}}{\frac{{u_n}^2}{2}}\right)$ est convergente, de limite 1.

$$\boxed{u_n - u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{{u_n}^2}{2}}$$

□

d) Donner enfin la nature de la série de terme général ${u_n}^2$.

Démonstration.
D'après ce qui précède :

× ${u_n}^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ (u_n - u_{n+1})\ (\geqslant 0)$

× La série $\sum\ (u_n - u_{n+1})$ est convergente.
Il en est de même de la série $\sum\ 2\ (u_n - u_{n+1})$.
(on ne change pas la nature d'une série en multipliant son terme général par $2 \neq 0$)

Ainsi, d'après le théorème d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum\ {u_n}^2$ est convergente.

$$\boxed{\text{La série } \sum\ {u_n}^2 \text{ est convergente.}}$$

□

Partie III

1. On note ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\phi(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
Montrer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration.

- La fonction ϕ est continue sur $]0, +\infty[$ car est le quotient de :
  - $\times$ f continue sur $]0, +\infty[$,
  - $\times$ $x \mapsto x$ continue sur $]0, +\infty[$ car polynomiale,
    et qui `NE S'ANNULE PAS` sur $]0, +\infty[$.
- De plus, en divisant l'inégalité de la question ***II.2.b)*** par $x > 0$:

$$\frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} \leqslant 1 - \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{x}{2}$$

Ainsi :

$$-1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} \leqslant -\frac{f(x)}{x} \leqslant -1 + \frac{x}{2}$$

Enfin :

$\times$ $\lim\limits_{x \to 0^+} -1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{6} = -1$,

$\times$ $\lim\limits_{x \to 0^+} -1 + \dfrac{x}{2} = -1$.

Donc, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x \to 0^+} -\dfrac{f(x)}{x} = -1$ et ainsi : $\lim\limits_{x \to 0^+} \phi(x) = 1$.

$$\boxed{\text{Comme } \phi(0) = 1, \text{ on en déduit que } \phi \text{ est continue en } 0.}$$

$$\boxed{\text{En conclusion, } \phi \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

□

On considère la fonction réelle g définie par $g(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x \phi(t)\, dt$.

2. a) Vérifier que g est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- La fonction ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  Ainsi, elle admet une primitive H sur $\mathbb{R}_+$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
  On en déduit, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x \phi(t)\, dt \\ &= \frac{1}{x} \left[H(t) \right]_0^x = \frac{1}{x} \left(H(x) - H(0) \right) \end{aligned}$$

- La fonction g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car est le produit de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto H(x) - H(0)$ qui sont toutes les deux $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc notamment continue sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

□

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1-\dfrac{x}{4} \leqslant g(x) \leqslant 1-\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{18}$.

Démonstration.

- Comme on l'a démontré dans la question ***III.1***, pour tout $t>0$:

$$1-\frac{t}{2} \ \leqslant\ \frac{f(t)}{t} \ \leqslant\ 1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}$$

- Soit $x>0$. Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x>0$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_0^x \left(1-\frac{t}{2}\right)\,dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{t}\,dt & \leqslant & \displaystyle\int_0^x \left(1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{6}\right)\,dt \\ \shortparallel & & & & \shortparallel \\ x-\dfrac{x^2}{4} = \left[\,t-\dfrac{t^2}{4}\,\right]_0^x & & & & \left[\,t-\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t^3}{18}\,\right]_0^x = x-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{18} \end{array}$$

On obtient alors le résultat en multipliant de part et d'autre par $\dfrac{1}{x}>0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 1-\frac{x}{4} \ \leqslant\ g(x) \ \leqslant\ 1-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{18}}$$

□

c) En déduire que g est continue en 0, dérivable en 0 puis donner $g'(0)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
  × $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-\dfrac{x}{4}=1$.
  × $\lim\limits_{x\to 0^+} 1-\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{18}=1$.

  On en déduit, par théorème d'encadrement, que g admet une limite en 0^+.
  De plus : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=1$.

$$\boxed{\text{Comme } g(0)=1, \text{ la fonction } g \text{ est continue en } 0.}$$

- Soit $x>0$.
  En réordonnant les éléments de la double inégalité précédente, on obtient :

$$-\frac{x}{4} \ \leqslant\ g(x)-1 \ \leqslant\ -\frac{x}{4}+\frac{x^2}{18}$$

puis, par multiplication par $\dfrac{1}{x}>0$:

$$\begin{array}{ccccc} -\dfrac{1}{4} & \leqslant & \dfrac{g(x)-1}{x} & \leqslant & -\dfrac{1}{4}+\dfrac{x}{18} \\ & & \shortparallel & & \\ & & \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0} & & \end{array}$$

Or :

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{4} + \frac{x}{18}$$

On en déduit par le théorème d'encadrement que la fonction $x \mapsto \dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ admet une limite en 0^+. Plus précisément : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = -\frac{1}{4}$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } g \text{ est dérivable en 0 et } g'(0) = -\frac{1}{4}.}$$

□

3. ***a)*** Montrer que : $\forall x \in \,]1,+\infty[$, $\displaystyle\int_1^x \phi(t)\, dt \leqslant \ln(x)$.

Démonstration.
Soit $x \in \,]1,+\infty[$.

- Soit $t \in [1,x]$. Remarquons tout d'abord :

$$0 \ \leqslant \ 1 - \mathrm{e}^{-t} \ \leqslant \ 1$$

On en déduit, par multiplication par $\dfrac{1}{t} > 0$: $\phi(t) \ = \ \dfrac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t} \ \leqslant \ \dfrac{1}{t}$.

- Enfin, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(x > 1)$:

$$\int_1^x \phi(t)\, dt \ \leqslant \ \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = [\ \ln(t)\ ]_1^x = \ln(x) - \cancel{\ln(1)}$$

$$\boxed{\forall x > 1, \int_1^x \phi(t)\, dt \ \leqslant \ \ln(x)}$$

□

b) En déduire que g a une limite finie en $+\infty$ et donner la valeur de cette limite.

Démonstration.
Soit $x > 1$.

- En multipliant par $\dfrac{1}{x} > 0$ l'inégalité précédente, on obtient :

$$0 \leqslant \frac{1}{x} \int_1^x \phi(t)\, dt \ \leqslant \ \frac{\ln(x)}{x}$$

- Or : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 0 = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ (par croissances comparées).

$$\boxed{\text{On en déduit, en utilisant une nouvelle fois le théorème d'encadrement, que la fonction } g \text{ admet une limite en } +\infty. \text{ Plus précisément : } \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$$

□

4. ***a)*** Pour tout réel x strictement positif, calculer $g'(x)$ et l'écrire sous la forme $g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

Démonstration.

- La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la démonstration faite en ***II.2.a)***.
- Soit $x > 0$. En reprenant les notation de la question ***II.2.a)*** :

$$g(x) = \frac{1}{x}\big(H(x) - H(0)\big)$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & \dfrac{-1}{x^2}\ \big(H(x) - H(0)\big) + \dfrac{1}{x}\ H'(x) \\ & = & \dfrac{-1}{x^2}\ \big(H(x) - H(0)\big) + \dfrac{1}{x}\ \phi(x) \\ & = & \dfrac{-1}{x^2}\ \displaystyle\int_0^x\ \phi(t)\ dt + \dfrac{1}{x}\ \phi(x) \\ & = & \dfrac{1}{x^2}\ \left(x\ \phi(x) - \displaystyle\int_0^x\ \phi(t)\ dt\right) \end{array}$$

$$\boxed{\text{En posant } h : x \mapsto x\ \phi(x) - \int_0^x\ \phi(t)\ dt, \text{ on obtient bien : } g'(x) = \frac{h(x)}{x^2}.}$$

□

b) Montrer alors que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $xh'(x) = (x+1)\ \mathrm{e}^{-x} - 1$.

Démonstration.

- La fonction $h : x \mapsto x\ \phi(x) - (H(x) - H(0))$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car les fonction ϕ et H le sont.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$h'(x)\ =\ \phi(x) + x\ \phi'(x) - H'(x)\ =\ \phi(x) + x\ \phi'(x) - \phi(x)\ =\ x\ \phi'(x)$$

- La fonction ϕ est dérivable sur $]0, +\infty[$ car est le quotient de :
  - × $f : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$ dérivable sur $]0, +\infty[$,
  - × $x \mapsto x$ dérivable sur $]0, +\infty[$ car polynomiale,
    et qui `NE S'ANNULE PAS` sur $]0, +\infty[$.

  De plus, pour tout $x > 0$:

$$\phi'(x)\ =\ \frac{\mathrm{e}^{-x}\ x - (1 - \mathrm{e}^{-x})}{x^2}\ =\ \frac{(x+1)\ \mathrm{e}^{-x} - 1}{x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ xh'(x) = x^2\ \phi'(x) = (x+1)\ \mathrm{e}^{-x} - 1}$$

□

c) Étudier la fonction notée k définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $k(x) = (x+1)\ \mathrm{e}^{-x} - 1$.

Démonstration.

- La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car la fonction $x \mapsto (x+1)\ \mathrm{e}^{-x}$ l'est comme produits de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$k'(x)\ =\ \mathrm{e}^{-x} + (x+1)\ (-\mathrm{e}^{-x}) = -x\ \mathrm{e}^{-x} \leqslant 0$$

  On remarque de plus : $k'(x) = 0\ \Leftrightarrow\ x = 0$.
  (la fonction k' ne s'annule qu'en un point)

$$\boxed{\text{La fonction } k \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

□

d) Donner le signe de k, puis les variations de h et enfin celles de g.

Démonstration.

- D'après la quesiton précédente, k est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
  Or : $k(0) = 1 - 1 = 0$.

  $$\boxed{\text{On en déduit que pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ k(x) < k(0) = 0.}$$

- D'après la question ***II.4.b)***, pour tout $x > 0$: $h'(x) = \dfrac{k(x)}{x} < 0$.

  $$\boxed{\text{On en déduit que } h \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

- On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) < h(0) = 0$.
  Or, d'après la question ***II.4.a)*** : $\forall x > 0,\ g'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

  $$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x > 0,\ g'(x) < 0, \text{ ce qui démontre que } g \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

□

e) Dresser le tableau de variations de g et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Démonstration.
D'après les questions précédentes, g admet le tableau de variation suivant.

x	0	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	$-$	
Variations de g	1 ↘	0

□