Variables aléatoires à densité

Exercice 1 : EDHEC 2013

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 1-|x| & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$.

a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$. En déduire sans calcul $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\ dx$.

b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et admettant f comme densité.

2. **a)** Établir l'existence de l'espérance de X, puis donner sa valeur.

b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

3. Déterminer la fonction de répartition de X, notée F_X.

Exercice 2 : EDHEC 2006

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \dfrac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[\\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[\\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [0,1[\end{array} \right.$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.
Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et admettant la fonction f pour densité.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X.

3. Montrer que X a une espérance et que celle-ci vaut $\dfrac{1}{2}$.

4. **a)** Déterminer $\mathbb{E}((X-1)^2)$.

b) En déduire que X a une variance et que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{3}{4} - \ln(2)$.

5. On appelle variable indicatrice d'un évènement A, la variable de Bernoulli qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon. On considère maintenant la variable aléatoire Y, indicatrice de l'évènement $\left[X \leqslant \dfrac{1}{2}\right]$ et la variable aléatoire Z, indicatrice de l'évènement $\left[X > \dfrac{1}{2}\right]$.

a) Préciser la relation liant Y et Z puis établir sans calcul que le coefficient de corrélation linéaire de Y et Z, noté $\rho(Y, Z)$, est égal à -1.

b) En déduire la valeur de la covariance de Y et Z.

Exercice 3 : `EML 16`

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.

2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

4. ***a)*** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\;dt$ converge.

b) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t\,f(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(X) = 0$.

PARTIE II. Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = 0$.

8. Déterminer la fonction de répartition de Y.

9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. ***a)*** Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = \left(1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Exercice 4 : `EDHEC 17`

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont le fonction de répartition est notée F_W. On dit que W suit une loi de Gumbel.

1. ***a)*** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

b) En déduire que W est une variable à densité.

- On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est à dire la loi $\mathcal{E}(1)$.
- On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$.
  On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2. ***a)*** Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

3. ***a)*** Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ est convergente.

b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = x\,(1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t)\ dt$$

c) Montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x\,(1 - F_{Y_n}(x)) = 0$.

d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$$

4. ***a)*** Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$, que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \frac{1 - u^n}{1 - u}\ du$$

b) En déduire que : $\displaystyle\int_0^x (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1 - \mathrm{e}^{-x})^k}{k}$ puis donner $\mathbb{E}(Y_n)$ sous forme de somme.

5. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

a) On rappelle que `grand(1,n,'exp',1)` simule n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. Compléter la déclaration de fonction **Scilab** suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Z_n.

```
function Z = f(n)
    x = grand(1,n,'exp',1)
    Z = ---
endfunction
```

b) Voici deux scripts :

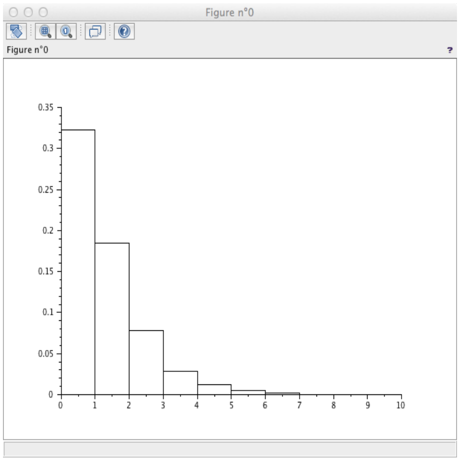
```
V = grand(1,10000,'exp',1)
W = -log(V)
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,W)
```

Script (1)

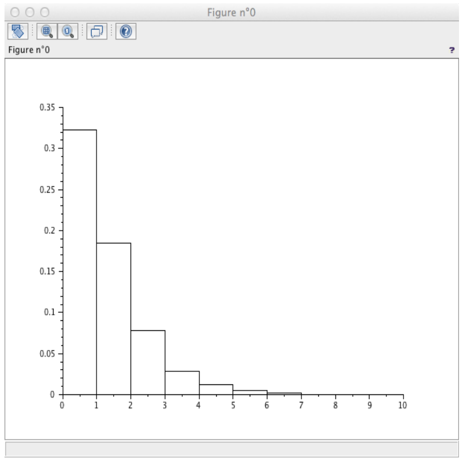
```
n = input('entrez la valeur de n : ')
Z = [] // la matrice-ligne Z est vide
for k = 1 :10000
    Z = [Z,f(n)]
end
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,Z)
```

Script (2)

Chacun des scripts simule 10000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0, 1]$, $]1, 2]$, $]2, 3]$, ..., $]9, 10]$ et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).
Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi de Gumbel (loi suivie par W), renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables aléatoires suivent la même loi que Z_n, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n = 1000$.



Histogramme (1)



Histogramme (2) pour $n = 1000$

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des v.a.r. (Z_n) ?

6. On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.

a) Justifier que, pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))$.

b) Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.

c) Montrer que, pour tout réel x, on a : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}$.

d) Démontrer le résultat conjecturé à la question ***5.b)***.

Exercice 5 : `EML 2015`

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$$

3. ***a)*** Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$?

b) Écrire une fonction en **Scilab** qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, ..., X_n)$ qui, à tout ω de Ω, associe le plus grand des réels $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n \leqslant x])$.

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f_n.

5. a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.

b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(T_1)$ de T_1 et l'espérance $\mathbb{E}(T_2)$ de T_2.

6. a) Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$.

b) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} x\,(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx$$

c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $\mathbb{E}(T_{n+1})$ et $\mathbb{E}(T_n)$, puis une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ sous forme d'une somme.

Partie III : Loi du premier dépassement

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.
On définit la variable aléatoire N égale au plus petit entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité d'événements : $[N = 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]$. En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = 0])$.

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([N = n]) = (1 - \mathrm{e}^{-a})^{n-1}\,\mathrm{e}^{-a}$.

9. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(N)$ et la variance $\mathbb{V}(N)$ de N.
On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z, définie pour tout ω de Ω par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}$$

10. Justifier : $\mathbb{P}([Z \leqslant a]) = 0$.

11. Soit $x \in \,]a, +\infty[$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité d'événements :

$$[N = n] \cap [Z \leqslant x] = \begin{cases} [a < X_1 \leqslant x] & \text{si } n = 1 \\ [T_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x] & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$

En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = n] \cap [Z \leqslant x])$.

b) Montrer alors : $\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 1 - \mathrm{e}^{a-x}$.

12. ***a)*** Montrer que la variable aléatoire $Z - a$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

b) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(Z)$, ainsi que l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(Z)$.

Exercice 6 : `ESSEC-I 2007`

Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.
Dans la suite, λ désigne un réel strictement positif.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

a) Déterminer la fonction : $x \mapsto \mathbb{P}([X > x])$ (appelée *fonction de survie de X*).

b) Pour tous nombres réels strictement positifs x et y, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y])$; justifier alors que, si X modélise la durée de vie d'un phénomène, on dise de ce dernier qu'il est « sans vieillissement ».

2. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

b) Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n admet pour densité la fonction f_n :

$$t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\, t^{n-1} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Pour cela, on admettra que, si U et V sont des variables aléatoires indépendantes admettant respectivement pour densité les fonctions f_U et f_V, alors la variable aléatoire $U+V$ admet pour densité la fonction f_{U+V} définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{U+V}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(x) f_V(t-x)\, dx$$

Exercice 7 : `HEC 2012`

Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(U)$ respectivement, l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire U définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Pour p entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité $U_1, \ldots, U_p$ sont indépendantes si pour tout p-uplet $(u_1, \ldots, u_p)$ de réels, les événements $[U_1 \leqslant u_1], \ldots, [U_p \leqslant u_p]$ sont indépendants.
L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une loi de probabilité utilisée notamment en fiabilité.
Les parties I et II sont largement indépendantes. La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I : Loi à 1 paramètre.

On note λ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}}\, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } \ x > 0 \\[2ex] \quad 0 & \text{si } \ x \leqslant 0 \end{cases}$$

1. ***a)*** Montrer que la fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Dresser le tableau de variation de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\lambda(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x)$.

c) Établir la convexité de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_λ dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

2. ***a)*** Vérifier que la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$ est une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\, dx$ et calculer sa valeur.

c) En déduire que la fonction f_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, ayant f_λ pour densité. On note F_λ la fonction de répartition de X et on pose : $Y = \lambda\sqrt{X}$.

a) Calculer pour tout x réel, $F_\lambda(x)$.

b) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

c) Établir pour tout r de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $\mathbb{E}(Y^r)$.

d) Montrer que pour tout r de $\mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{E}\left(Y^{r+1}\right) = (r+1)\, \mathbb{E}(Y^r)$.

e) En déduire pour tout r de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Y^r)$ et $\mathbb{E}(X^r)$. En particulier, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Partie II : Estimation ponctuelle de λ.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on note $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X définie dans la question ***3***.

On rappelle que $Y = \lambda\sqrt{X}$, et on pose pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $Y_k = \lambda\sqrt{X_k}$, $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Y_j$ et g_k une densité de S_k.

On admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes et que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, les variables aléatoires S_k et Y_{k+1} sont indépendantes.
On admet que si T et Z sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_T et f_Z telles que f_T et f_Z soient bornées, alors la variable aléatoire $T + Z$ admet une densité f_{T+Z} définie pour tout x réel par :

$$f_{T+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y)\, f_Z(x-y)\; dy$$

4. ***a)*** En utilisant les propriétés admises, montrer que : $g_2(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$.

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

c) On admet que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{S_n}$ est une variable aléatoire à densité.
Pour quelles valeurs de n, l'espérance $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ et la variance $\mathbb{V}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ existent-elles ?
Calculer alors leurs valeurs respectives.

5. On note $(x_1, \ldots, x_n)$ un n-uplet de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ constituant une réalisation du n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$.
On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit H la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$H(\lambda) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)\right)$$

Montrer que la fonction H admet un maximum atteint en un unique point λ_0 dont on donnera la valeur.

6. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $\lambda_n^* = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}}$.

a) Que représente λ_0 pour λ_n^* ?

b) Déterminer une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\mathbb{E}\left(a_n\lambda_n^*\right) = \lambda$. On note alors : $\hat{\lambda}_n = a_n\lambda_n^*$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}\left(\hat{\lambda}_n\right)$.