Variables aléatoires à densité

Exercice 1 : EDHEC 2013

1. On considère la fonction f définie pour tout x réel par : $f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx$. En déduire sans calcul $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\ dx$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto 1-|x|$ est continue sur $]-1,1[$ car la fonction valeur absolue l'est.
  De plus, la fonction f est aussi continue en 1 car :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} 1-x \quad = \quad \underset{\substack{\shortparallel \\ f(1)}}{0} \quad = \lim_{x\to 1} 0 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

  On démontre de même que la fonction est continue en -1.

$$\boxed{\text{La fonction est continue sur } [-1,1]. \text{ Elle l'est donc aussi sur } [0,1].}$$

- De plus :

$$\int_0^1 f(t)\ dt = \int_0^1 (1-t)\ dt = \left[\ t - \frac{t^2}{2}\ \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\int_0^1 f(t)\ dt = \frac{1}{2}}$$

- Soit $x \in [-1,1]$. Alors $-x \in [-1,1]$ et :

$$f(-x) = 1 - |-x| = 1 - |x| = f(x)$$

$$\boxed{\text{Donc la fonction } f \text{ est paire.}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_{-1}^0 f(t)\ dt = \int_0^1 f(t)\ dt = \frac{1}{2}.}$$

Remarque
La démonstration du résultat précédent s'effectue grâce à un changement de variable.
On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \quad \text{(et donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = -1 \ \Rightarrow\ u = 1 \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
On a donc :

$$\int_{-1}^0 f(t)\ dt = \int_1^0 f(-u)(-\ du) = \int_0^1 f(-u)\ du$$

Or, la fonction f est paire (d'après la question ***1.***), donc :

$$\int_{-1}^{0} f(t)\ dt = \int_{0}^{1} f(u)\ du = \frac{1}{2}$$

□

b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]-1,1[$ en tant que somme de fonctions continues sur $]-1,1[$. Elle est continue sur $]-\infty,-1[$ et sur $]1,+\infty[$ en tant que fonction constante.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sauf éventuellement en } -1 \text{ et } 1.}$$

- Pour tout $x \in\ ]-\infty,-1[\ \cup\ ]1,+\infty[$, $f(x) = 0$, donc $f(x) \geqslant 0$.
  D'autre part, si $x \in [-1,1]$:

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \ \Leftrightarrow\ 0 \leqslant |x| \leqslant 1 \ \Leftrightarrow\ -1 \leqslant -|x| \leqslant 0 \ \Leftrightarrow\ 0 \leqslant 1-|x| \leqslant 1 \ \Leftrightarrow\ 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0}$$

- Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et vaut 1.
  La fonction f est nulle en dehors de $[-1,1]$. Donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{-1}^{1} f(t)\ dt$$

  De plus, f est continue sur $[-1,1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\ dt$ est bien définie.

$$\int_{-1}^{1} f(t)\ dt = \int_{-1}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{1} f(t)\ dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\boxed{\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \text{ converge et vaut 1.}}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et admettant f comme densité.

2. a) Établir l'existence de l'espérance de X, puis donner sa valeur.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance ssi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\ dt$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour des calculs de moments.
- La fonction f est nulle en dehors de $[-1,1]$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\ dt = \int_{-1}^{1} t\, f(t)\ dt$$

  De plus, la fonction $t \mapsto t\, f(t)$ est continue sur $[-1,1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} t\, f(t)\ dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ admet une espérance.}}$$

- Par parité de la fonction $t \mapsto f(t)$, on déduit, à l'aide du changement de variable $\boxed{u = -t}$:

$$\int_0^1 t\, f(t)\, dt \;=\; \int_0^{-1} (-u)\, f(-u)(-du) \;=\; \int_0^{-1} u\, f(-u) du \;=\; \int_0^{-1} u\, f(u) du = -\int_{-1}^{0} u\, f(u) du$$

- Ainsi, d'après la relation de Chasles :

$$\int_{-1}^{1} t\ f(t)\ dt \;=\; \int_{-1}^{0} t\ f(t)\ dt + \int_0^1 t\ f(t)\ dt \;=\; 0$$

$$\boxed{\text{En conclusion : } \mathbb{E}(X) = 0.}$$

Remarque

On peut aussi effectuer un calcul direct de $\displaystyle\int_{-1}^{1} t\, f(t)\ dt$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} t\, f(t)\ dt &= \int_{-1}^{0} t\, f(t)\ dt + \int_0^1 t\, f(t)\ dt \\
&= \int_{-1}^{0} t(1+t)\ dt + \int_0^1 t(1-t)\ dt \\
&= \int_{-1}^{0} (t+t^2)\ dt + \int_0^1 (t-t^2)\ dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_{0}^{1} \\
&= -\left(\frac{(-1)^2}{2} + \frac{(-1)^3}{3}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
&= -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \;=\; 0
\end{aligned}$$

□

b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une variance ssi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f(t)\ dt$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour des calculs de moments.
- La fonction f est nulle en dehors de $[-1, 1]$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, f(t)\ dt = \int_{-1}^{1} t^2\, f(t)\ dt$$

De plus, la fonction $t \mapsto t^2\, f(t)$ est continue sur $[-1, 1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\, f(t)\ dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{On en déduit que } X \text{ admet une variance.}}$$

- Par parité de la fonction $t \mapsto f(t)$, on déduit, à l'aide du changement de variable $\boxed{u = -t}$:

$$\int_0^1 t^2\ f(t)\ dt \;=\; \int_0^{-1} (-u)^2\ f(-u)(-du) \;=\; -\int_0^{-1} u^2\ f(u) du = \int_{-1}^{0} u^2\ f(u) du$$

- Enfin :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t^2 f(t)\ dt &= \int_0^1 t^2 f(t)\ dt \ = \int_0^1 t^2(1-t)\ dt \\
&= \int_0^1 (t^2 - t^3)\ dt \ = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ = \ \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

- Ainsi, d'après la relation de Chasles :

$$\int_{-1}^1 t^2\ f(t)\ dt = \int_{-1}^0 t^2\ f(t)\ dt + \int_0^1 t^2\ f(t)\ dt = 2 \int_0^1 t^2\ f(t)\ dt = 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{6}.}$$

- D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \frac{1}{6}}$$

□

3. Déterminer la fonction de répartition de X, notée F_X.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Plusieurs cas se présentent.

- Si $x < -1$. La fonction f est nulle sur $]-\infty, x]$, donc :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^x f(t)\ dt = 0$$

- Si $x \in [-1, 0]$.

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^x f(t)\ dt \\
&= \cancel{\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt} + \int_{-1}^x f(t)\ dt \\
&= \int_{-1}^x (1+t)\ dt \ = \left[t + \frac{t^2}{2} \right]_{-1}^x \\
&= \left(x + \frac{x^2}{2} \right) - \left(-1 + \frac{(-1)^2}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

- Si $x \in [0,1]$.

$$\begin{array}{rcl} F_X(x) & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\ & = & \cancel{\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt} + \displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\ dt + \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\ dt \\ & = & \dfrac{1}{2} + \displaystyle\int_{0}^{x} (1-t)\ dt \\ & = & \dfrac{1}{2} + \left[\ t - \dfrac{t^2}{2}\ \right]_0^x \\ & = & \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} \end{array}$$

- Si $x > 1$. Comme f est une densité :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = \cancel{\int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt} + \int_{-1}^{1} f(t)\ dt + \cancel{\int_{1}^{x} f(t)\ dt} = 1$$

$$\boxed{\text{Finalement, on obtient : } F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \in [-1, 0[\\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

□

Exercice 2 : EDHEC 2006

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[\\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[\\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [0,1[\end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.
Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et admettant la fonction f pour densité.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $]-\infty, 0[\cup]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, 1[\cup]1, +\infty[$. En effet :
  - × la fonction f est continue sur $]-\infty, 0[$ (resp. $]1, +\infty[$) car est nulle sur cet intervalle.
  - × la fonction f est continue sur $]0, \frac{1}{2}[$ (resp. $]\frac{1}{2}, 1[$) car est l'inverse de $x \mapsto 2\ (1-x)^2$ (resp. $x \mapsto 2\ x^2$), continue et qui ne s'annule pas sur cet intervalle.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \setminus \{0, \tfrac{1}{2}, 1\}.}$$

- De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$ car $(1-x)^2 > 0$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $x^2 > 0$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1[$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0}$$

- Remarquons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{1} f(t)\ dt$$

car la fonction f est nulle en dehors $[0,1[$.

La fonction f est $\mathcal{C}^0_m$ sur $[0,1]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)\ dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\ dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\ (1-t)^2}\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2\ t^2}\ dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (-1)\ (1-t)^{-2}\ dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 t^{-2}\ dt \\
&= -\frac{1}{2} \left[\frac{(1-t)^{-1}}{-1} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left[\frac{t^{-1}}{-1} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-t} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2}\ (2-1) - \frac{1}{2}\ (1-2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale impropre } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \text{ est convergente. De plus : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1.}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

2. Déterminer la fonction de répartition F de X.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Plusieurs cas se présentent.

- Si $x \in]-\infty, 0[$ alors :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt = 0$$

car f est nulle sur $]-\infty, x[$.

- Si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ alors :

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt + \int_0^x f(t)\ dt && \textit{(d'après la relation de Chasles)} \\
&= \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\ dt} + \int_0^x \frac{1}{2\ (1-t)^2}\ dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-t} \right]_0^x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)
\end{aligned}$$

- Si $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ alors :

$$\begin{array}{rcll} F_X(x) & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt & \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(t)\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\ dt & \textit{(d'après la relation de Chasles)} \\ & = & \displaystyle\cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\ dt} + \frac{1}{2} + \int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\ dt & \textit{(d'après les calculs de la question précédente)} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{t} \right]_{\frac{1}{2}}^{x} \ = \ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{1}{2}} \right) & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2} - \frac{1}{2x} + 1 \ = \ \frac{3}{2} - \frac{1}{2x} & \end{array}$$

- Si $x \in [1, +\infty[$ alors :

$$\begin{array}{rcll} F_X(x) & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt & \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(t)\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\ dt + \int_{1}^{x} f(t)\ dt & \textit{(d'après la relation de Chasles)} \\ & = & \displaystyle\cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\ dt} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cancel{\int_{1}^{x} 0\ dt} & \textit{(d'après les calculs de la question précédente)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } F : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2\ (1-x)} - \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2x} & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{array} \right.}$$

$\square$

3. Montrer que X a une espérance et que celle-ci vaut $\dfrac{1}{2}$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)\ dt$ est absolument convergente ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moment.
- Tout d'abord :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{1} t\ f(t)\ dt$$
car f est nulle en dehors de $[0, 1[$.
- La fonction $t \mapsto t\ f(t)$ est $\mathcal{C}_m^0$ sur $[0, 1]$.

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_{0}^{1} t\ f(t)\ dt & = & \displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} t\ f(t)\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} t\ f(t)\ dt & \textit{(d'après la relation de Chasles)} \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{2\ (1-t)^2}\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{t}{2\ t^2}\ dt & \end{array}$$

- Afin de calculer la première intégrale, remarquons que pout tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$:

$$\frac{t}{(1-t)^2} = -\frac{(1-t)-1}{(1-t)^2} = -\left(\frac{(1-t)}{(1-t)^2} + \frac{-1}{(1-t)^2}\right) = \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t}$$

Ainsi, par linéarité de l'intégration :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t}{(1-t)^2}\, dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(1-t)^2}\, dt - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t}\, dt \\
&= \left[\frac{1}{1-t}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \left[\ \ln(|1-t|)\ \right]_0^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1}\right) - \left[\ \ln(1-t)\ \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 - \left(\ln(\tfrac{1}{2} - \cancel{\ln(1)})\right) = 1 - \ln(2)
\end{aligned}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t\ f(t)\ dt &= \frac{1}{2}\left(1-\ln(2)\right) + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\ln(2)\right) + \frac{1}{2}\left[\ \ln(|t|)\ \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{2}\left(1-\ln(2)\right) + \frac{1}{2}\left[\ \ln(t)\ \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{2}\left(1-\ln(2)\right) + \frac{1}{2}\left(\cancel{\ln(1)} - \ln(\tfrac{1}{2})\right) \\
&= \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{2}\ln(2)} + \cancel{\frac{1}{2}\ln(2)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } X \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}.}$$

Commentaire

Afin de calculer la première intégrale, on peut procéder par intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl}
u(t) &=& t & & u'(t) &=& 1 \\
v'(t) &=& (1-t)^{-2} & & v(t) &=& (1-t)^{-1}
\end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{1}{2}]$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} t\ (1-t)^{-2}\ dt &= \left[\frac{t}{1-t}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t}\, dt \\
&= \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - 0\right) + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{1-t}\, dt \\
&= 1 + \left[\ \ln(|1-t|)\ \right]_0^{\frac{1}{2}} = 1 + \left[\ \ln(1-t)\ \right]_0^{\frac{1}{2}} \\
&= 1 + \left(\ln(\tfrac{1}{2}) - \cancel{\ln(1)}\right) = 1 - \ln(2)
\end{aligned}$$

□

4. a) Déterminer $\mathbb{E}((X-1)^2)$.

Démonstration.

- D'après le théorème de transfert, $(X-1)^2$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-1)^2\ f(t)\ dt$ est absolument convergente ce qui équivaut à démontrer la convergence car la fonction $t \mapsto (t-1)^2\ f(t)$ est positive.
- Tout d'abord :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-1)^2\ f(t)\ dt \ = \ \int_0^1 (t-1)^2\ f(t)\ dt$$
car f est nulle en dehors de $[0,1[$.
- La fonction $t \mapsto (t-1)^2\ f(t)$ est $\mathcal{C}_m^0$ sur $[0,1]$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (t-1)^2\ f(t)\ dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} (t-1)^2\ f(t)\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)^2\ f(t)\ dt \qquad \textit{(d'après la relation de Chasles)} \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(t-1)^2}{2\ (1-t)^2}\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(t-1)^2}{2\ t^2}\ dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}\ dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{t^2-2t+1}{t^2}\ dt \\
&= \frac{1}{2}\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 1\ dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2}{t}\ dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t^2} \right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left((1-\tfrac{1}{2}) - 2\ \left[\ \ln(|t|)\ \right]_{\frac{1}{2}}^1 - \left[\ \frac{1}{t}\ \right]_{\frac{1}{2}}^1 \right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 2\ \left(\cancel{\ln(1)} - \ln(\tfrac{1}{2})\right) - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{\frac{1}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 2\ln(2) + 1 \right) \ = \ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \ln(2) \ = \ 1 - \ln(2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } (X-1)^2 \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}\big((X-1)^2\big) = 1 - \ln(2)}$$

□

b) En déduire que X a une variance et que $\mathbb{V}(X) = \dfrac{3}{4} - \ln(2)$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord : $(X-1)^2 \ = \ X^2 - 2X + 1$.
On en déduit :
$$X^2 \ = \ (X-1)^2 + 2X - 1$$
Ainsi, X^2 admet une espérance comme somme de v.a.r. qui admettent une espérance.

$$\boxed{\text{On en conclut que la v.a.r. } X \text{ admet un moment d'ordre 2 et donc une variance.}}$$

- De plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}\big((X-1)^2+2X-1\big)\\ &= \mathbb{E}\big((X-1)^2\big)+2\,\mathbb{E}(X)-1 \quad \textit{(par linéarité de l'espérance)}\\ &= \big(1-\ln(2)\big)+\cancel{2}\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}-\cancel{1} \quad \textit{(d'après les calculs précédents)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2)=1-\ln(2)}$$

- Enfin, d'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2)-\big(\mathbb{E}(X)\big)^2\\ &= \big(1-\ln(2)\big)-\left(\frac{1}{2}\right)^2\\ &= 1-\ln(2)\big)-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}-\ln(2)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } \mathbb{V}(X)=\frac{3}{4}-\ln(2).}$$

□

5. On appelle variable indicatrice d'un événement A, la variable de Bernoulli qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon. On considère maintenant la variable aléatoire Y, indicatrice de l'événement $\left[X \leqslant \frac{1}{2}\right]$ et la variable aléatoire Z, indicatrice de l'événement $\left[X > \frac{1}{2}\right]$.

a) Préciser la relation liant Y et Z puis établir sans calcul que le coefficient de corrélation linéaire de Y et Z, noté $\rho(Y,Z)$, est égal à -1.

Démonstration.

- Montrons : $Y+Z=1$.
  Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent :
  × si $X(\omega) \leqslant \frac{1}{2}$, alors, par définition des v.a.r. Y et Z, $Y(\omega)=1$ et $Z(\omega)=0$. Donc :
  $$Y(\omega)+Z(\omega)=1+0=1$$
  × si $X(\omega) > \frac{1}{2}$, alors, par définition des v.a.r. Y et Z, $Y(\omega)=0$ et $Z(\omega)=1$. Donc :
  $$Y(\omega)+Z(\omega)=0+1=1$$
  Finalement : $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega)+Z(\omega)=1$.
  $$\boxed{\text{Ainsi : } Y+Z=1.}$$
- On a donc la relation suivante : $Z=-Y+1$.
  Ainsi, la v.a.r. Z est une fonction affine strictement décroissante de Y.
  $$\boxed{\text{Donc : } \rho(Y,Z)=-1.}$$

Commentaire

- Il ne faut pas se laisser déstabiliser par la définition donnée par l'énoncé des v.a.r. Y et Z.
  Remarquons qu'on peut les écrire sous la forme :
  $$\forall \omega \in \Omega, \quad Y(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } X(\omega) > \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad Z(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } X(\omega) \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$
  Par définition, on obtient directement : $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ (et $Z(\Omega) = \{0, 1\}$). De plus :
  $$[Y = 1] = \left[X \leqslant \tfrac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad [Y = 0] = \left[X > \tfrac{1}{2}\right]$$
  On obtient loi de Y (*i.e.* les valeurs de $\mathbb{P}([Y = 1])$ et $\mathbb{P}([Y = 0])$) à l'aide de ces égalités.
- Il est relativement classique de définir une v.a.r. en fonction des valeurs possibles d'une autre v.a.r. . Illustrons ce propos en considérant la v.a.r. T définie comme suit :
  $$\forall \omega \in \Omega, \ T(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } V(\omega) \leqslant 0 \\ V(\omega) & \text{si } V(\omega) > 0 \end{cases}$$
  où V est une v.a.r. telle que $V \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
  On demande généralement de déterminer la loi de T. On doit alors déterminer la probabilité de l'événement $[T \leqslant x]$. De par la définition de T, on a naturellement envie, pour calculer $\mathbb{P}([T \leqslant x])$, de faire une disjonction de cas selon les valeurs prises par V.
  C'est très précisément ce qui est formalisé par la formule des probabilités totales qu'on doit ici appliquer à l'aide du système complet d'événements $([V \leqslant 0], [V > 0])$.

□

b) En déduire la valeur de la covariance de Y et Z.

Démonstration.

- Par définition du coefficient de corrélation :
  $$\rho(Y, Z) = \frac{\text{Cov}(Y, Z)}{\sqrt{\mathbb{V}(Y)}\,\sqrt{\mathbb{V}(Z)}}$$
  Donc : $\text{Cov}(Y, Z) = \rho(Y, Z)\,\sqrt{\mathbb{V}(Y)}\,\sqrt{\mathbb{V}(Z)}$
  $$\boxed{\text{D'après la question précédente : } \text{Cov}(Y, Z) = -\sqrt{\mathbb{V}(Y)}\,\sqrt{\mathbb{V}(Z)}.}$$
- D'après l'énoncé, la v.a.r. Y suit une loi de Bernoulli.
  On a de plus l'égalité entre événements suivante :
  $$[Y = 1] = \left[X \leqslant \frac{1}{2}\right]$$
  Donc, d'après la question ***2.*** :
  $$\mathbb{P}([Y = 1]) = \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\cancel{2} \times \frac{1}{\cancel{2}}} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right). \text{ Et donc : } \mathbb{V}(Y) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.}$$

- De même, la v.a.r. Y suit une loi de Bernoulli.
  De plus : $[Z = 1] = \left[X > \dfrac{1}{2}\right]$. Donc, d'après la question ***2.*** :

$$\mathbb{P}([Z = 1]) = \mathbb{P}\left(\left[X > \frac{1}{2}\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)\text{. Et donc : } \mathbb{V}(Z) = \frac{1}{4}.}$$

- On en déduit :

$$\mathrm{Cov}(Y, Z) = -\sqrt{\mathbb{V}(Y)\,\mathbb{V}(Z)} = -\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\boxed{\mathrm{Cov}(Y, Z) = -\frac{1}{4}}$$

□

Exercice 3 : EML 16

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par : $f(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On a bien $-t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(-t) - f(t) &= \frac{e^{-(-t)}}{(1+e^{-(-t)})^2} - \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \\
&= \frac{e^{t}}{(1+e^{t})^2} - \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \\
&= \frac{e^{t}(1+e^{-t})^2 - e^{-t}(1+e^{t})^2}{(1+e^{t})^2(1+e^{-t})^2} \\
&= \frac{e^{t}(1+2e^{-t}+e^{-2t}) - e^{-t}(1+2e^{t}+e^{2t})}{(1+e^{t})^2(1+e^{-t})^2} \\
&= \frac{\cancel{e^{t}+2+e^{-t}} - (\cancel{e^{-t}+2+e^{t}})}{(1+e^{t})^2(1+e^{-t})^2} \ = \ 0
\end{aligned}$$

Donc $f(-t) = f(t)$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est paire.}}$$

Commentaire

La méthode classique pour démontrer qu'une fonction f est paire est de prouver l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$$

Lorsque ce calcul direct ne semble pas aboutir, on pensera à former $f(-x) - f(x)$.

En règle générale, pour démontrer l'égalité « $a = b$ », on peut :
- partir de a et, par une succession d'égalités, arriver à b.
- partir de b et, par une succession d'égalités, arriver à a.
- prouver $a = c$, puis $b = c$ par l'une des méthodes précédentes (méthode du « mi-chemin ».
- calculer $a - b$, pour prouver $a - b = 0$.

Pour choisir entre les deux premières méthodes, on retiendra qu'il est plus simple de transformer une expression « compliquée » en expression « simple » que l'inverse.
La dernière méthode est souvent efficace, notamment lorsque les autres ne semblent pas aboutir. □

2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Démonstration.

- La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car c'est le quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Détaillons ce dernier point.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{e}^{-t} > 0 \quad \text{donc} \quad 1 + \mathrm{e}^{-t} > 1$$
$$\text{et} \quad (1 + \mathrm{e}^{-t})^2 > 1^2 \qquad \textit{(car la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ est croissante sur } [0, +\infty[\textit{)}$$
$$\text{ainsi} \quad (1 + \mathrm{e}^{-t})^2 > 0$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-t} > 0$ donc $(1 + \mathrm{e}^{-t})^2 > 0$.

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) \geqslant 0}$$

- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente si les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt$ le sont. On étudie tout d'abord l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt$.
  - La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.
  - Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\int_0^A f(t)\ dt = \int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\ dt = \left[\ \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}\ \right]_0^A = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-A}} - \frac{1}{2} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

  Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}$.

On étudie maintenant l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt$.

  - On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \text{ (donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{et} \quad dt = -du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
  On a donc :

$$\int_0^{+\infty} f(t)\ dt = \int_0^{-\infty} f(-u)(-\ du) = \int_{-\infty}^{0} f(-u)\ du = \int_{-\infty}^{0} f(u)\ du$$

  La dernière égalité est obtenue car la fonction f est paire (d'après la question ***1.***).
  On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(u)\ du$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \text{ converge et : } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt = 1.}$$

$$\boxed{\text{Finalement, la fonction } f \text{ est une densité d'une variable aléatoire réelle.}}$$

Commentaire

- Le programme officiel stipule que « les changements de variables affines pourront être utilisés directement sur des intégrales sur un intervalle quelconque ». Pour autant, ce type de changement de variable ne peut se faire qu'après avoir démontré la convergence (ce qu'on a fait dans l'exemple).
- Cela signifie aussi que, de manière générale, on ne peut effectuer de changement de variable directement sur une intégrale impropre : on doit se ramener au préalable sur une intégrale sur un segment.

□

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

Démonstration.
On note F_X la fonction de répartition de X. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$$

La fonction f est continue sur $]-\infty, x]$.
Soit $B \in\ ]-\infty, x]$.

$$\int_B^x f(t)\ dt = \int_B^x \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2}\ dt = \left[\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}}\right]_B^x = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-B}} \underset{B\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$ converge et vaut $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}.}$$

□

4. ***a)*** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\ dt$ converge.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto t\,f(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ comme produit de fonctions continues sur l'intervalle $[0,+\infty[$.
- × Tout d'abord : $t\,f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
  En effet :
  $$\frac{t\,f(t)}{\frac{1}{t^2}} = t^2\,tf(t) = \frac{t^3\,\mathrm{e}^{-t}}{(1+\mathrm{e}^{-t})^2} = \frac{t^3\,\mathrm{e}^{-t}}{1+2\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-2t}} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^3\,\mathrm{e}^{-t}}{1} = t^3\,\mathrm{e}^{-t}$$
  Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{t\to+\infty} t^3\mathrm{e}^{-t} = 0$. Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\,tf(t) = 0$.

  On en déduit : $t\,f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

  × $\forall t \in [1,+\infty[,\ t\,f(t) \geqslant 0 \quad$ et $\quad \dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.

  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ est une intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant $2 > 1$. Elle est donc convergente.

  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\,f(t)\ dt$ converge.

- La fonction $t \mapsto t\, f(t)$ est continue sur le **segment** $[0,1]$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\, f(t)\, dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{Finalement, l'intégrale } \displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt \text{ converge.}}$$

Commentaire

L'énoncé demande simplement de déterminer la **nature** de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, dt$ (sans la calculer). Il faut donc privilégier pour cette question l'utilisation d'un critère de comparaison / équivalence / négligeabilité d'intégrales de fonctions continues positives.
On évitera donc le calcul direct de l'intégrale car :

1. il est sans doute difficile,
2. il est peut-être même (souvent) impossible.

☐

b) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t\, f(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\mathbb{E}(X) = 0$.

Démonstration.

- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ f(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour un calcul de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\ f(t)\ dt$.
  L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\ dt$ est convergente si les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} tf(t)\ dt$ le sont. Or, d'après la question précédente, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} tf(t)\ dt$ converge.
- Déterminons la nature de $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\ dt$.
  On effectue le changement de variable $\boxed{u = -t}$.

$$\left|\begin{array}{l} u = -t \text{ (donc } t = -u) \\ \hookrightarrow du = -\ dt \quad \text{ et } \quad dt = -du \\ \bullet\ t = -\infty \ \Rightarrow\ u = +\infty \\ \bullet\ t = 0 \ \Rightarrow\ u = 0 \end{array}\right.$$

  Ce changement de variable est valide car $\psi : u \mapsto -u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
  On a donc :

$$\int_0^{+\infty} tf(t)\ dt = \int_0^{-\infty} (\cancel{-}u) f(-u) (\cancel{-}\ du) = \int_0^{-\infty} uf(u)\ du = -\int_{-\infty}^{0} uf(u)\ du$$

  La deuxième égalité est obtenue car la fonction f est paire (d'après la question ***1.***).
  On en déduit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(u)\ du$ est convergente.

- Finalement, X admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} t f(t)\,dt + \int_{0}^{+\infty} t f(t)\,dt = -\cancel{\int_{0}^{+\infty} t f(t)\,dt} + \cancel{\int_{0}^{+\infty} t f(t)\,dt} = 0$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(X) = 0.}$$

□

PARTIE II. Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $\mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser.

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $\varphi = h \circ g$ où :
  - × $g : x \mapsto 1 + e^x$:
    - – dérivable sur $\mathbb{R}$,
    - – telle que $g(\mathbb{R}) \subset]0, +\infty[$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + e^x > 0$).
  - × $h : y \mapsto \ln(y)$ dérivable sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\varphi'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} > 0$$

Donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- La fonction φ est :
  - × continue sur $] - \infty, +\infty[$ (car dérivable sur cet intervalle),
  - × strictement croissante sur $] - \infty, +\infty[$.

  Ainsi, φ réalise une bijection de $] - \infty, +\infty[$ sur $I = \varphi(] - \infty, +\infty[)$. De plus :

$$\varphi(] - \infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \to -\infty} \varphi(x), \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) \right[=]0, +\infty[$$

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } I =]0, +\infty[.}$$

□

6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

Démonstration.

Soit $y \in I$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll}
\varphi^{-1}(y) = x & \Leftrightarrow & y = \varphi(x) & \\
& \Leftrightarrow & y = \ln(1 + e^x) & \\
& \Leftrightarrow & e^y = 1 + e^x & \textit{(car la fonction } x \mapsto e^x \textit{ est bijective sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & e^y - 1 = e^x & \\
& \Leftrightarrow & \ln(e^y - 1) = x & \textit{(car la fonction } x \mapsto \ln(x) \textit{ est bijective sur }]0, +\infty[\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall y \in I,\ \varphi^{-1}(y) = \ln(e^y - 1)}$$

Commentaire

On remarque que la composition par ln est bien autorisée car, si $y \in I =]0, +\infty[$, alors $e^y \in]1, +\infty[$. Et donc $e^y - 1 \in]0, +\infty[$.

□

On considère la variable aléatoire réelle Y définie par : $Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = 0$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
$$Y(\Omega) = (\varphi(X))(\Omega) = \varphi\big(X(\Omega)\big) \subset \,]0, +\infty[$$
En effet, $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ et $\varphi(\mathbb{R}) = I = \,]0, +\infty[$ (d'après la question ***5.***)
- On obtient alors : $[Y \leqslant 0] = \varnothing$. Donc :
$$\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
$$\boxed{\mathbb{P}([Y \leqslant 0]) = 0}$$

□

8. Déterminer la fonction de répartition de Y.

Démonstration.

- Tout d'abord : $Y(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - Si $x \leqslant 0$ alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$. Donc, on a :
$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
  - Si $x > 0$.
$$\begin{array}{rcll}
F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) & \\
& = & \mathbb{P}([\varphi(X) \leqslant x]) & \\
& = & \mathbb{P}\big(\big[X \leqslant \varphi^{-1}(x)\big]\big) & \textit{(car } \varphi \textit{ est strictement croissante, donc } \varphi^{-1} \textit{ également)} \\
& = & \mathbb{P}([X \leqslant \ln(\mathrm{e}^x - 1)]) \; = \; F_X(\ln(\mathrm{e}^x - 1)) & \\
& = & \dfrac{1}{1 + \exp(-\ln(\mathrm{e}^x - 1))} & \\
& = & \dfrac{1}{1 + \exp\left(\ln\left((\mathrm{e}^x - 1)^{-1}\right)\right)} & \\
& = & \dfrac{1}{1 + \frac{1}{\mathrm{e}^x - 1}} \; = \; \dfrac{1}{\frac{(\mathrm{e}^x - \cancel{1}) + \cancel{1}}{\mathrm{e}^x - 1}} \; = \; \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x} & \\
& = & \dfrac{\cancel{\mathrm{e}^x}\,(1 - \mathrm{e}^{-x})}{\cancel{\mathrm{e}^x}} \; = \; 1 - \mathrm{e}^{-x} &
\end{array}$$
$$\boxed{F_Y : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}}$$

□

9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

Démonstration.

$$\boxed{\text{On reconnaît une loi exponentielle : } Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1). \text{ On a alors } \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{1} = 1 \text{ et } \mathbb{V}(Y) = \frac{1}{1^2} = 1.}$$

□

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $U_n = T_n - \ln(n)$.

10. a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par noter que :

$$[T_n \leqslant x] = [X_1 \leqslant x] \ \cap \ \cdots \ \cap [X_n \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^{n} \ [X_i \leqslant x]$$

- On obtient alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{T_n}(x) & = & \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ [X_i \leqslant x]\right) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi)} \\ & = & \big(\mathbb{P}([X_1 \leqslant x]\,\big)^n & \end{array}$$

- D'après la question ***3.*** : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{X_1}(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \in \mathbb{R},\ F_{T_n}(x) = \left(\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)^n.}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = \left(1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) & = & \mathbb{P}([T_n - \ln(n) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([T_n \leqslant x + \ln(n)]) & \\ & = & F_{T_n}(x + \ln(n)) & \\ & = & \left(\dfrac{1}{1+\exp(-(x+\ln(n)))}\right)^n & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{10.a)}}\textit{)} \\ & = & \Big(1 + \exp(-x - \ln(n))\Big)^{-n} & \end{array}$$

Or : $\exp(-x-\ln(n)) = \mathrm{e}^{-x-\ln(n)} = \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{e}^{-\ln(n)} = \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{e}^{\ln(n^{-1})} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([U_n \leqslant x]) = \left(1 + \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n}}$$

□

11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche à déterminer, si elle existe, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_{U_n}(x)$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$F_{U_n}(x) = \left(1+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\,\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\right)$$
- De plus : $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n} = 0$, donc $\ln\left(1+\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$. D'où :
$$-n\,\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\cancel{n}\,\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\cancel{n}} = -\mathrm{e}^{-x}$$
- Or la fonction $x \mapsto \exp(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc, par composition de **limites** :
$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(-n\,\ln\left(1+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\right) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$$
D'où :
$$\lim_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = \exp(-\mathrm{e}^{-x})$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On note } G \text{ la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par } G : x \mapsto \exp(-\mathrm{e}^{-x}).\\ \text{On a alors } \lim\limits_{n\to+\infty} F_{U_n}(x) = G(x).\end{array}}$$

Montrons que G est une fonction de répartition.

- Tout d'abord : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-x} = 0$. Donc, par continuité de exp en 0 :
$$\lim_{x\to+\infty} G(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^0 = 1$$
- De plus : $\lim\limits_{x\to-\infty} -\mathrm{e}^{-x} = -\infty$. D'où :
$$\lim_{x\to-\infty} G(x) = \lim_{x\to-\infty} \exp(-\mathrm{e}^{-x}) = 0$$
- La fonction G est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $G = h_2 \circ h_1$ où :
  × $h_1 : x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$ est :
    – continue sur $\mathbb{R}$,
    – telle que $h_1(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
  × $h_2 : y \mapsto \exp(y)$ continue sur $\mathbb{R}$.
- Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour la même raison et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$g(x) = G'(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\exp(-\mathrm{e}^{-x}) > 0$$
Donc la fonction G est croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est une fonction de répartition.}}$$

Montrons que G est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité.

- On vient de démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction G est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car les fonctions h_1 et h_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité que l'on notera } V.}$$

- Pour déterminer une densité de V, on dérive la fonction G sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ est bien un intervalle ouvert). On en déduit que g est bien une densité de V.

La suite (U_n) converge en loi vers la v.a.r. V de fonction de répartition $G : x \mapsto \exp(-\mathrm{e}^{-x})$ dont une densité est $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \exp(-\mathrm{e}^{-x})$.

Commentaire

- Le programme officiel liste certaines propriétés d'une fonction de répartition F :
  1. F est croissante.
  2. F est continue à droite en tout point.
  3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.
  4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

  Cependant, il n'est pas précisé qu'il s'agit là d'une caractérisation d'une fonction de répartition : toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés ***1.***, ***2.***, ***3.*** et ***4.*** peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire.
- L'utilisation de la caractérisation ci-dessus ne semble apparaître que dans ce type de question traitant de la convergence en loi. Ce type de question apparaît aussi dans le sujet d'EML 2017.
  Il est donc conseillé de connaître la caractérisation ci-dessus.

$\square$

Exercice 4 : EDHEC 17

Soit V une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, dont la fonction de répartition est la fonction F_V définie par : $F_V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

On pose $W = -\ln(V)$ et on admet que W est aussi une variable aléatoire dont le fonction de répartition est notée F_W. On dit que W suit une loi de Gumbel.

1. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = e^{-e^{-x}}$.

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto -\ln(x)$, de sorte que $W = h(V)$.
  Comme $V \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors $V(\Omega) =]0, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} W(\Omega) & = & h(V)(\Omega) \ = \ h\big(V(\Omega)\big) & \\ & = & h\big(]0,+\infty[\big) & \\ & = &]\lim\limits_{x\to+\infty} h(x), \lim\limits_{x\to 0} h(x)[& \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement décroissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ & = &]-\infty,+\infty[& \textit{(car } \lim\limits_{x\to+\infty} -\ln(x) = -\infty \textit{ et } \lim\limits_{x\to 0} -\ln(x) = +\infty\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } W(\Omega) = \mathbb{R}.}$$

- Déterminons la fonction de répartition de W. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} F_W(x) & = & \mathbb{P}([W \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([-\ln(V) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([\ln(V) \geqslant -x]) & \\ & = & \mathbb{P}([V \geqslant e^{-x}]) & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & 1 - \mathbb{P}([V < e^{-x}]) & \\ & = & 1 - F_V(e^{-x}) & \textit{(car } V \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ & = & \cancel{1} - \left(\cancel{1} - e^{-e^{-x}}\right) & \textit{(car } e^{-x} > 0\textit{)} \\ & = & e^{-e^{-x}} & \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_W(x) = e^{-e^{-x}}}$$

Commentaire

- Commencer par déterminer l'ensemble image $V(\Omega)$ est un bon réflexe : cela peut guider l'étude de la fonction de répartition F_V. Plus précisément, cela fournit la disjonction de cas à effectuer. Typiquement, si l'on démontre que $V(\Omega)$ est de la forme $[a, b]$ (où a et b sont deux réels tels que $a < b$), on peut rédiger comme suit :
  - × si $x < a$ alors $[V \leqslant x] = \varnothing$.
    Ainsi, $F_V(x) = \mathbb{P}([V \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  - × si $x \in [a, b]$ alors [... `démo à produire` ...]
  - × si $x > b$ alors $[X \leqslant x] = \Omega$.
    Ainsi, $F_V(x) = \mathbb{P}([V \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Les ensembles images $V(\Omega)$ de types différents (essentiellement $]-\infty, b]$ et $[a, +\infty[$) amènent des disjonctions de cas analogues.

□

b) En déduire que W est une variable à densité.

Démonstration.
La fonction de répartition F_W est :
- × continue sur $\mathbb{R}$ (car elle est la composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$).
- × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (car elle est la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$).

$$\boxed{\text{Ainsi, } W \text{ est une variable à densité.}}$$

□

- On désigne par n un entier naturel non nul et par $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi que V, c'est à dire la loi $\mathcal{E}(1)$.
- On considère la variable aléatoire Y_n définie par $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, c'est à dire que pour tout ω de Ω, on a : $Y_n(\omega) = \max(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$.
  On admet que Y_n est une variable aléatoire à densité.

2. a) Montrer que la fonction de répartition F_{Y_n} de Y_n est définie par :

$$F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration.
- Déterminons tout d'abord $Y_n(\Omega)$.
  Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la v.a.r. X_i suit la loi $\mathcal{E}(1)$, et donc $X_i(\Omega) = [0, +\infty[$.
  On rappelle que $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
  $$\boxed{\text{Ainsi, } Y_n(\Omega) \ \subset \ [0, +\infty[.}$$
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  – Si $x < 0$: alors $[Y_n \leqslant x] = \varnothing$. Ainsi :
  $$F_{Y_n}(x) \ = \ \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$
  – Si $x \geqslant 0$:
  $$\begin{array}{rcll} F_{Y_n}(x) & = & \mathbb{P}([Y_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x] \ \cap \ \cdots \ \cap [X_n \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) \times \cdots \times \mathbb{P}([X_n \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ sont indépendantes)} \\ & = & (\mathbb{P}([X_1 \leqslant x])^n & \textit{(car les v.a.r. } X_i \textit{ ont même loi)} \\ & = & (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$$

Commentaire

- Cette question permet d'illustrer l'intérêt de la détermination de $Y_n(\Omega)$: cela nous fournit la disjonction de cas servant à déterminer la fonction de répartition F_{Y_n}.
- On notera au passage que démontrer l'inclusion $Y_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$ est suffisant pour mettre en place cette disjonction de cas.

□

b) En déduire une densité f_{Y_n} de Y_n.

Démonstration.

- Y_n est une variable à densité car :
  × F_{Y_n} est continue sur $\mathbb{R}$.
  × F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en 0.

  En effet, sur $]-\infty, 0[$, F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est constante sur cet intervalle.
  Sur $]0, +\infty[$, F_{Y_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- Pour déterminer une densité de Y_n, on dérive F_{Y_n} sur les **intervalles ouverts**.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  – Si $x \in]-\infty, 0[$:
  $$f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x) = 0$$
  – Si $x \in]0, +\infty[$:
  $$f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x) = n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}$$
  – Si $x = 0$: on pose $f_{Y_n}(0) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_{Y_n}(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{array} \right.}$$

Commentaire

Il faut bien comprendre qu'on peut prendre n'importe quelle valeur positive pour f_n en 0. On peut ainsi construire une infinité de densités de Y_n.
C'est pourquoi on parle d'**une** densité.

□

3. a) Donner un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ lorsque t est au voisinage de $+\infty$, puis montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt$ est convergente.

Démonstration.

On commence par déterminer un équivalent de $1 - F_{Y_n}(t)$ quand $t \to +\infty$.

- Soit $t \geqslant 0$.
$$F_{Y_n}(t) \quad = \quad \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^n$$
- On reconnaît une expression de la forme $(1 + x)^\alpha$ dont on connaît un développement limité en 0. Plus précisément, il existe une fonction ε définie dans un voisinage de 0 et qui vérifie $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$, telle que, au voisinage de 0 :
$$(1 + x)^n \ = \ 1 + n\ x + x\ \varepsilon(x)$$
- Comme $-\mathrm{e}^{-t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut appliquer l'égalité précédente à $x = -\mathrm{e}^{-t}$ pour t dans un voisinage de $+\infty$. On obtient :
$$\left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^n \ = \ 1 - n\ \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-t}\ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)$$
$$\text{ainsi} \quad 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^n \ = \ n\ \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}\ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)$$
- On constate alors : $\mathrm{e}^{-t}\ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right) = \underset{t \to +\infty}{o}(\mathrm{e}^{-t})$. En effet :
$$\frac{\mathrm{e}^{-t}\ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)}{\mathrm{e}^{-t}} \ = \ \varepsilon\left(-\mathrm{e}^{-t}\right) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$
par théorème de composition des limites.

- On en conclut : $1 - F_{Y_n}(t) = n \ \mathrm{e}^{-t} + \underset{t \to +\infty}{o}(\mathrm{e}^{-t})$.

$$\boxed{\text{Et ainsi : } 1 - F_{Y_n}(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} n\mathrm{e}^{-t}.}$$

Démontrons alors que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt$ est convergente.

- La fonction $t \mapsto 1 - F_{Y_n}(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- D'autre part :

$$1 - F_{Y_n}(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} n \ \mathrm{e}^{-t} \ (\geqslant 0)$$

- Or, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ dt$ est convergente (de la forme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \ dt$ avec $\alpha > 0$).
  (on ne change pas la nature d'une intégrale impropre en multipliant son intégrande par un réel non nul : ceci nous permet de ne pas prendre en compte le réel $n \neq 0$)

Ainsi, par critère d'équivalence des intégrales impropres de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt$ converge.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt \text{ est convergente.}}$$

Commentaire

- Les intégrales de type $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \ dt$ sont considérées dans le programme comme des intégrales de référence au même titre que les intégrales de Riemann ce qui explique la rédaction ci-dessus.
- On aurait pu justifier autrement la convergence de cette intégrale.
  1) Soit par calcul.
  Soit $A \geqslant 0$.

$$\int_0^A n\mathrm{e}^{-t} \ dt = n \left[-\mathrm{e}^{-t} \right]_0^A = n(1 - \mathrm{e}^{-A}) \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} n$$

  Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} n\mathrm{e}^{-t} \ dt$ converge.
  2) Soit par un argument provenant du chapitre des v.a.r. à densité.
  L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} \ dt$ converge et vaut 1 en tant qu'intégrale entre $-\infty$ et $+\infty$ d'une densité d'une v.a.r. X suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

□

b) Établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \int_0^x (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = x \, (1 - F_{Y_n}(x)) + \int_0^x t f_{Y_n}(t) \ dt$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On procède par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} u(t) & = & 1 - F_{Y_n}(t) & u'(t) & = & -f_{Y_n}(t) \\ v'(t) & = & 1 & v(t) & = & t \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\int_0^x 1\times(1-F_{Y_n}(t))\ dt &= \left[\ t\ (1-F_{Y_n}(t))\ \right]_0^x - \int_0^x (-f_{Y_n}(t))\times t\ dt\\ &= x\ (1-F_{Y_n}(x)) - \cancel{0\ (1-F_{Y_n}(0))} + \int_0^x\ tf_{Y_n}(t)\ dt\\ &= x\ (1-F_{Y_n}(x)) + \int_0^x\ tf_{Y_n}(t)\ dt\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \int_0^x\ (1-F_{Y_n}(t))\ dt = x(1-F_{Y_n}(x)) + \int_0^x\ tf_{Y_n}(t)\ dt}$$

□

c) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,(1-F_{Y_n}(x)) = 0$.

Démonstration.

- D'après la question ***3.a)***, $1-F_{Y_n}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} n\mathrm{e}^{-x}$. On obtient alors :

$$x(1-F_{Y_n}(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} nx\mathrm{e}^{-x}$$

- Or : $nx\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
  En effet, $x\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Ainsi : $nx\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x(1-F_{Y_n}(x)) = 0}$$

□

d) En déduire que Y_n possède une espérance et prouver l'égalité :

$$\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty}\ (1-F_{Y_n}(t))\ \ dt$$

Démonstration.

- La v.a.r. Y_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\ tf_{Y_n}(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour les calculs de moment du type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\ t^m f_{Y_n}(t)\ dt$.
  Or : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\ tf_{Y_n}(t)\ dt = \int_0^{+\infty}\ tf_{Y_n}(t)\ dt$ car f_{Y_n} est nulle en dehors de $[0,+\infty[$.
- Or, d'après la question ***3.b)***, pour tout $x\geqslant 0$:

$$\int_0^x\ tf_{Y_n}(t)\ dt = \int_0^x\ (1-F_{Y_n}(t))\ dt - x(1-F_{Y_n}(x))$$

  La partie droite de l'égalité admet une limite finie quand $x\to+\infty$ car :
  × l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ (1-F_{Y_n}(t))\ dt$ converge, d'après la question ***3.a)***
  × $\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-F_{Y_n}(x)) = 0$, d'après la question ***3.b)***

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\ tf_{Y_n}(t)\ dt$ est convergente. De plus :

$$\int_0^{+\infty}\ tf_{Y_n}(t)\ dt = \int_0^{+\infty}\ (1-F_{Y_n}(t))\ dt - 0$$

$$\boxed{\text{En conclusion, la v.a.r. } Y_n \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty}\ (1-F_{Y_n}(t))\ dt.}$$

□

4. a) Montrer, grâce au changement de variable $u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$, que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ \int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \frac{1-u^n}{1-u} \ du$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \int_0^x \ \left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^n\right) \ dt$$

On effectue le changement de variable $\boxed{u = 1 - \mathrm{e}^{-t}}$.

$u = 1 - \mathrm{e}^{-t}$ (et donc $\mathrm{e}^{-t} = 1 - u$ puis $t = -\ln(1-u)$)
$\hookrightarrow du = \mathrm{e}^{-t} \ dt$ et $dt = \frac{1}{\mathrm{e}^{-t}} \ du = \frac{1}{1-u} \ du$
- $t = 0 \ \Rightarrow \ u = 0$
- $t = x \ \Rightarrow \ u = 1 - \mathrm{e}^{-x}$

Ce changement de variable est valide car la fonction $\varphi : u \mapsto -\ln(1-u)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1 - \mathrm{e}^{-x}]$.
On remarque de plus que $u \in [0, 1 - \mathrm{e}^{-x}]$, en particulier $u \neq 1$ (car $1 - \mathrm{e}^{-x} < 1$ pour tout $x \geqslant 0$) ce qui permet de justifier la validité de l'écriture $\frac{1}{1-u}$.
On obtient finalement :

$$\int_0^x \ \left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^n\right) \ dt \ = \ \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ (1 - u^n) \, \frac{1}{1-u} \ du \ = \ \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \frac{1-u^n}{1-u} \ du$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+, \ \int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \frac{1-u^n}{1-u} \ du}$$

□

b) En déduire que : $\displaystyle\int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k}$ puis donner $\mathbb{E}(Y_n)$ sous forme de somme.

Démonstration.

- On remarque tout d'abord : $u \in [0, 1 - \mathrm{e}^{-x}]$. On a donc, en particulier : $u \neq 1$.
  On peut donc écrire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k \ = \ \frac{1-u^n}{1-u}$.
- On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
\int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \frac{1-u^n}{1-u} \ du \ &= \ \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ \sum_{k=0}^{n-1} u^k \ du \\
&= \ \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \ u^k \ du && \textit{(par linéarité de l'intégrale)} \\
&= \ \sum_{k=0}^{n-1} \left[\ \frac{u^{k+1}}{k+1} \ \right]_0^{1-\mathrm{e}^{-x}} \\
&= \ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^{k+1}}{k+1} \ = \ \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k} && \textit{(par décalage d'indice)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^x \ (1 - F_{Y_n}(t)) \ dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k}}$$

- On sait de plus que $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^k}{k} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{n} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(Y_n) = \int_0^{+\infty} (1 - F_{Y_n}(t))\ dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

$\square$

5. On pose $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

a) On rappelle que `grand(1,n,'exp',1)` simule n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1. Compléter la déclaration de fonction **Scilab** suivante afin qu'elle simule la variable aléatoire Z_n.

```
function Z = f(n)
    x = grand(1,n,'exp',1)
    Z = ---
endfunction
```

Démonstration.

```
    Z = max(x) - log(n)
```

Commentaire

- On rappelle qu'il est inutile de recopier le programme en entier.
Écrire la ligne contenant l'information manquante suffit.
- Il est tout à fait possible (et donc non sanctionné) aux concours d'utiliser plusieurs lignes, même si le concepteur a pensé à une réponse sur une seule ligne. Ici, on pouvait dans un premier temps simuler la v.a.r. Y_n puis la v.a.r. Z_n.

```
    Y = max(x)
    Z = Y - log(n)
```

$\square$

b) Voici deux scripts :

```
V = grand(1,10000,'exp',1)
W = -log(V)
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,W)
```

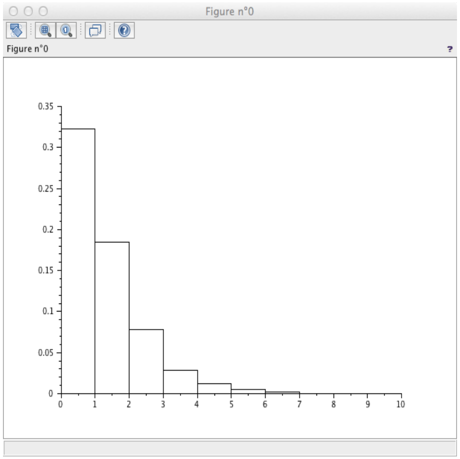
Script (1)

```
n = input('entrez la valeur de n : ')
Z = [] // la matrice-ligne Z est vide
for k = 1 :10000
    Z = [Z,f(n)]
end
s = linspace(0,10,11)
histplot(s,Z)
```

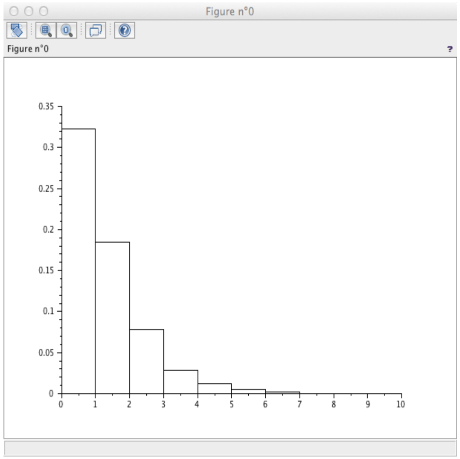
Script (2)

Chacun des scripts simule 10000 variables indépendantes, regroupe les valeurs renvoyées en 10 classes qui sont les intervalles $[0, 1]$, $]1, 2]$, $]2, 3]$, $\ldots$, $]9, 10]$ et trace l'histogramme correspondant (la largeur de chaque rectangle est égale à 1 et leur hauteur est proportionnelle à l'effectif de chaque classe).

Le script (1) dans lequel les variables aléatoires suivent la loi de Gumbel (loi suivie par W), renvoie l'histogramme (1) ci-dessous, alors que le script (2) dans lequel les variables aléatoires suivent la même loi que Z_n, renvoie l'histogramme (2) ci-dessous, pour lequel on a choisi $n = 1000$.



Histogramme (1)



Histogramme (2) pour $n = 1000$

Quelle conjecture peut-on émettre quant au comportement de la suite des v.a.r. (Z_n) ?

Démonstration.
Commentons tout d'abord le script et l'histogramme (1).

- Les lignes 1 et 2 permettent d'obtenir des valeurs $(w_1, \dots, w_{10000})$ qui correspondent à l'observation d'un 10000-échantillon $(W_1, \dots, W_{10000})$ de la v.a.r. W qui suit la loi de Gumbel. (les v.a.r. W_i sont indépendantes et ont même loi que W)
- Les lignes 3 et 4 ont pour but de permettre de visualiser la répartition des 10000 valeurs $(w_1, \dots, w_{10000})$ à l'aide d'un histogramme des fréquences :
  - × l'instruction `linspace(0, 10, 11)` crée la matrice `[0, 1, 2, ..., 10]`.
  - × l'instruction `histplot` crée les classes : $[0, 1]$, $]1, 2]$, ..., $]9, 10]$.
    Elle permet aussi de récupérer l'effectif de chaque classe (*i.e.* le nombre de w_i dans chaque classe) et trace l'histogramme (1).
- Considérons par exemple la classe définie par l'intervalle $]2, 3]$.
  La loi faible des grands nombres (LfGN) permet d'affirmer :

$$\text{fréquence de la classe }]2,3] = \frac{\text{effectif de la classe }]2,3]}{\text{taille de l'observation}} \simeq \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])$$

  Ici, on réalise bien un grand nombre d'observations ($N = 10000$) ce qui justifie cette formule.
  Ainsi, l'aire de la barre qui s'appuie sur l'intervalle $]2, 3]$ est donc une approximation de $\mathbb{P}([2 < W \leqslant 3]) = F_W(3) - F_W(2)$.

Commentons maintenant l'histogramme (2).

- Les lignes 3, 4, et 5 permettent d'obtenir les valeurs $(u_1, \dots, u_{10000})$ qui correspondent à l'observation d'un 10000-échantillon $(U_1, \dots, U_{10000})$ de la variable Z_n (pour $n = 1000$). (les U_i sont indépendantes et ont même loi que Z_n)
- On trace alors l'histogramme de répartition de ces valeurs. Pour les raisons évoquées ci-dessus, l'aire de la barre du graphique (2) est une valeur approchée de :

$$\mathbb{P}([2 < Z_n \leqslant 3]) = F_{Z_n}(3) - F_{Z_n}(2)$$

Or, on constate que l'histogramme (2) est similaire à l'histogramme (1).
Cela signifie que les aires des barres de chacun de ces deux graphiques sont très proches. Ainsi :

$$F_{Z_n}(3) - F_{Z_n}(2) \ \simeq \ F_W(3) - F_W(2)$$

En considérant la première classe, on observe que : $F_{Z_n}(1) \ \simeq \ F_W(1)$.
On obtient alors, en considérant successivement toutes les classes :

$$\forall i \in [\![1, 10]\!], \ F_{Z_n}(i) \ \simeq \ F_W(i)$$

Les fonctions de répartition F_{Z_n} et F_W coïncident en ces 10 points. En considérant des classes définies par d'autres points, on observerait que les fonctions coïncident en ces nouveaux points. Ainsi, lorsque $n = 1000$, les fonctions de répartition des v.a.r. W et Z_n sont très proches.

$$\boxed{\text{On conjecture que la suite de v.a.r. } (Z_n) \text{ converge en loi vers la v.a.r. } W.}$$

Commentaire

- Ces deux histogrammes sont normalisés. De ce fait, ce n'est pas l'effectif de la classe qui est affiché en ordonnée mais un nombre qui, une fois multiplié par la largeur de la barre, fournit la fréquence de la classe. Autrement dit, dans un tel histogramme, la fréquence d'une classe c'est l'aire de la barre correspondante.
  Ici, chaque barre est de largeur 1. Ce sont donc les fréquences de chaque classe que l'on peut lire en ordonnée. Il ne faut pas oublier de prendre en compte ce coefficient multiplicatif lorsque l'on considère un nombre de barres plus grand (et donc des largeurs de barres différentes).
- Dans la démonstration, on a utilisé la loi faible des grands nombres (LfGN) afin de faire le lien entre fréquence de la classe $]2, 3]$ et probabilité $\mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])$. Établissons ce lien de manière plus précise.
  Pour ce faire, on introduit la v.a.r. T suivante.

$$\begin{array}{rccl} T & : & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & & \omega & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } W(\omega) \in \,]2,3] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

  Le N-échantillon d'observations $(w_1, \dots, w_N)$ (où N est un grand nombre) de la v.a.r. W fournit un N-échantillon d'observations $(t_1, \dots, t_N)$ de la v.a.r. T.
  La LfGN stipule :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i \ \simeq \ \mathbb{E}(T)$$

  Or T est une v.a.r. finie qui admet pour espérance :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(T) & = & 1 \times \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3]) + \cancel{0 \times \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])} \\ & = & \mathbb{P}([2 < W \leqslant 3]) \ = \ F_W(3) - F_W(2) \end{array}$$

  Par ailleurs, $\sum\limits_{i=1}^{N} t_i$ permet de compter le nombre d'observations qui appartiennent à la classe $]2, 3]$ (*i.e.* l'effectif de la classe $]2, 3]$).
  Ainsi, $\frac{1}{N} \sum\limits_{i=1}^{N} t_i$ est la fréquence de cette classe. Celle-ci est représentée graphiquement par la troisième barre de l'histogramme (1). D'après ce qui précède, l'aire de cette barre est une valeur approchée de $\mathbb{P}([2 < W \leqslant 3])$.

□

6. On note F_{Z_n} la fonction de répartition de Z_n.

a) Justifier que, pour tout réel x, on a : $F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}\left(x + \ln(n)\right)$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} F_{Z_n}(x) & = & \mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([Y_n - \ln(n) \leqslant x]) \\ & = & \mathbb{P}([Y_n \leqslant x + \ln(n)]) \\ & = & F_{Y_n}(x + \ln(n)) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = F_{Y_n}(x + \ln(n))}$$

□

b) Déterminer explicitement $F_{Z_n}(x)$.

Démonstration.

- Déterminons tout d'abord $Z_n(\Omega)$.
  On a vu précédemment : $Y_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Comme } Z_n = Y_n - \ln(n), \text{ on en déduit que } Z_n(\Omega) \subset [-\ln(n), +\infty[}$$

Déterminons F_{Z_n}.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

- Si $x < -\ln(n)$: alors $[Z_n \leqslant x] = \varnothing$. Ainsi :

$$F_{Z_n}(x) = \mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

- Si $x \geqslant -\ln(n)$, alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{Z_n}(x) & = & F_{Y_n}(x + \ln(n)) & \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-(x+\ln(n))}\right)^n & \textit{(car } x + \ln(n) \geqslant 0 \textit{ et} \\ & & & \textit{par définition de } F_{Y_n}\textit{)} \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-x-\ln(n)}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{e}^{-\ln(n)}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\ \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(n)}}\right)^n & \\ & = & \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n & \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z_n}(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < -\ln(n) \\ \left(1 - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n & \text{si } x \geqslant -\ln(n) \end{array} \right.}$$

□

c) Montrer que, pour tout réel x, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n} = 0$, on a l'équivalent suivant :

$$\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$$

On obtient alors :

$$n\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\cancel{n}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\cancel{n}} = -\mathrm{e}^{-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\mathrm{e}^{-x}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}.}$$

□

d) Démontrer le résultat conjecturé à la question ***5.b)***.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que la suite (Z_n) converge en loi vers la v.a.r. W. Autrement dit, il faut démontrer qu'en tout point de continuité de F_W, *i.e.* pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = F_W(x)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- D'après la question ***6.c)***, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right) = -\mathrm{e}^{-x}$.
  La fonction $u \mapsto \exp(u)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, on a, par composition de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(n\ln\left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)\right) = \exp\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}}$$

- De plus, comme le réel x est fixé et que $-\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ x \geqslant -\ln(n)$$

  Considérons maintenant $n \geqslant n_0$ (ce qui est autorisé car on cherche une limite quand n tend vers $+\infty$). On a alors :

$$F_{Z_n}(x) = \left(1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$$

  On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = F_W(x)$$

$$\boxed{\text{La suite de v.a.r. } (Z_n) \text{ converge en loi vers la v.a.r. } W.}$$

□

Exercice 5 : EML 2015

Dans tout l'exercice, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et toutes les variables aléatoires considérées seront supposées définies sur cet espace.

Partie I : Loi exponentielle

Dans toute cette partie, λ désigne un réel strictement positif.

1. Donner une densité, la fonction de répartition, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

Démonstration.
Soit X une v.a.r. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

$$\boxed{\text{Alors la fonction } f_X : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \text{ est une densité de } X.}$$

$$\boxed{\text{La fonction de répartition de } X \text{ est la fonction } F_X : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\, x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. .}$$

$$\boxed{\text{Enfin, } X \text{ admet une espérance et une variance données par : } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.}$$ □

2. Justifier que les intégrales suivantes convergent et donner leurs valeurs :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} x\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$$

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \int_0^{+\infty} f_X(x)\, dx$$
car f_X est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
La fonction f_X étant une densité de probabilité, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_X(x)\, dx$ est convergente. Il en est de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$ car on ne change pas la nature d'une intégrale impropre en multipliant son intégrande par un réel non nul.
- On en déduit alors :
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, dx &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx \quad \textit{(par définition de } f_X\textit{)} \\ &= \frac{1}{\lambda} \times 1 \quad \textit{(car } f_X \textit{ est une densité)} \end{aligned}$$
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, dx = \frac{1}{\lambda}}$$

- En raisonnant de même, on démontre que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx$ est convergente car X admet une espérance.
- De plus :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, dx &= \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} x\,\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, dx \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx \qquad \textit{(par définition de } f_X\textit{)} \\ &= \frac{1}{\lambda}\times\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}\times\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-\lambda\, x}\, dx = \frac{1}{\lambda^2}}$$

□

3. a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\frac{1}{\lambda}\,\ln(1-U)$?

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto -\dfrac{1}{\lambda}\,\ln(1-x)$, de telle sorte que $Y = h(X)$.
Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$, alors $X(\Omega) = [0,1[$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \big(h(X)\big)(\Omega) = h\big(X(\Omega)\big) = h\big([0,1[\big) \\ &= \Big[h(0), \lim_{x\to 1} h(x)\Big[\qquad \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [0,1[\ (*)\textit{)} \\ &= [0,+\infty[\end{aligned}$$

Ainsi : $Y(\Omega) = [0,+\infty[$.
On peut démontrer $(*)$ par une rapide étude de fonction :
  - × la fonction h est dérivable (donc continue) sur $[0,1[$ en tant que composée de fonctions dérivables sur les intervalles adéquats.
  - × soit $x \in\,]0,1[$.

$$h'(x) = -\frac{1}{\lambda}\left(-\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{\lambda(1-x)} > 0$$

Donc la fonction h est strictement croissante sur $[0,1[$.
- Déterminons la fonction de répartition de Y.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
  - × Si $x < 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) = [0,+\infty[$. Ainsi :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  - × Si $x \in [0,+\infty[$:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X) \leqslant x\right]\right) \\ &= \mathbb{P}([\ln(1-X) \geqslant -\lambda x]) \qquad \textit{(car } -\lambda < 0\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[1 - X \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) \qquad \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) \\ &= F_X\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} \qquad \textit{(car } 1 - e^{-\lambda x} \in [0,1[\textit{)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcll} \text{En effet, comme} & x \geqslant 0 & \\ \text{alors} & -\lambda x \leqslant 0 & \\ \text{d'où} & 0 < \mathrm{e}^{-\lambda x} \leqslant 1 & \textit{(car } \exp \textit{ est croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ \text{et donc} & 0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} < 1 & \end{array}$$

Finalement : $F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$.
On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ.

$\boxed{\text{Or la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. , donc } X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).}$

Commentaire

- Cette question est une illustration de la méthode classique consistant à déterminer la loi de la transformée d'une v.a.r. à densité. Il est essentiel de maîtriser la méthodologie de résolution.
- Ici, on est dans un cas encore plus classique puisque la v.a.r. à densité de départ U suit une loi uniforme sur $[0, 1[$. On illustre ici la méthode d'inversion : on obtient une v.a.r. V qui suit une loi particulière ($V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$) en écrivant V comme transformée d'une v.a.r. U qui suit la loi uniforme sur $[0, 1[$. Ce type de question est fréquent dans les sujets. Et est généralement suivi, comme c'est le cas dans cet énoncé, d'une question de simulation informatique.
  Finalement, la Partie I de cet exercice est constituée en intégralité de questions de cours. □

b) Écrire une fonction en **Scilab** qui, étant donné un réel λ strictement positif, simule la loi exponentielle de paramètre λ.

Démonstration.

```
function v = simuExp(lambda)
    u = rand()
    v = -(1/lambda) * log(1-u)
endfunction
```

□

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi exponentielle de paramètre 1.
Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire $T_n = \max(X_1, ..., X_n)$ qui, à tout ω de Ω, associe le plus grand des réels $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$ et on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_n(x) = \begin{cases} n\mathrm{e}^{-x}(1 - \mathrm{e}^{-x})^{n-1} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Partie II : Loi de la variable aléatoire T_n

4. a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, la probabilité $\mathbb{P}([T_n \leqslant x])$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
- Tout d'abord :

$$[T_n \leqslant x] = [\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant x] = [X_1 \leqslant x] \cap \dots \cap [X_n \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\right) & \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 \leqslant x]) & \textit{(car les v.a.r. } X_1, \ldots, X_n \textit{ ont même loi)} \\
& = & \big(\mathbb{P}([X_1 \leqslant x])\big)^n & \\
& = & \big(1 - \mathrm{e}^{-x}\big)^n & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } x \geqslant 0\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = (1 - \mathrm{e}^{-x})^n}$$

□

b) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, T_n est une variable aléatoire à densité, admettant pour densité la fonction f_n.

Démonstration.

- Par définition : $T_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
  Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i(\Omega) = [0, +\infty[$ car $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × Si $x \leqslant 0$, alors $[T_n \leqslant x] = \varnothing$ car $T_n(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Ainsi :

$$F_{T_n}(x) = \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × Si $x > 0$. D'après la question ***4.a)*** :

$$F_{T_n}(x) = \mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \big(1 - \mathrm{e}^{-x}\big)^n$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_{T_n} : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} (1 - \mathrm{e}^{-x})^n & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right. .}$$

- Montrons que F_{T_n} est continue sur $\mathbb{R}$.
  - La fonction F_{T_n} est continue sur $]0, +\infty[$ en tant que composée $g_2 \circ g_1$ de :
    × $g_1 : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-x}$ continue sur $]0, +\infty[$
    et $g_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$,
    × $g_2 : y \mapsto y^n$ continue sur $\mathbb{R}$.
  - La fonction F_{T_n} est continue sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante.
  - On remarque :

$$\lim_{x \to 0^+} F_{T_n}(x) = \big(1 - \mathrm{e}^{-0}\big)^n = 0 = F_{T_n}(0) = \lim_{x \to 0^-} F_{T_n}(x)$$

  Donc F_{T_n} est continue en 0.

$$\boxed{\text{La fonction } F_{T_n} \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

- Avec le même raisonnement que précédemment, on montre que F_{T_n} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } T_n \text{ est une variable à densité.}}$$

- Pour déteminer une densité de T_n, on dérive F_{T_n} sur des intervalles ouverts.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × Si $x \in]-\infty, 0[$.
  $$f_{T_n}(x) = F_n'(x) = 0 = f_n(x)$$
  × Si $x \in]0, +\infty[$.
  $$f_{T_n}(x) = F_n'(x) = n\,\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} = f_n(x)$$
  × On choisit $f_{T_n}(0) = 0 = f_n(0)$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_n \text{ est bien une densité de } T_n.}$$

□

5. a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. T_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_n(x)\; dx$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer sa convergence pour des calculs de moments.
- Tout d'abord :
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_n(x)\; dx = \int_{0}^{+\infty} x\, f_n(x)\; dx$$
  car f_n est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
- La fonction $x \mapsto x\, f_n(x)$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0, +\infty[$.
- × Tout d'abord : $x\, f_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

  En effet, pour tout $x > 0$:
  $$\frac{x\, f_n(x)}{\frac{1}{x^2}} = x^2\, x\, n\,\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} = n\, x^3\,\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}$$
  Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$. Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} = 1$.

  De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\mathrm{e}^{-x} = 0$.

  Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\, f_n(x)}{\frac{1}{x^2}} = 0$, *i.e.* : $x\, f_n(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

  × $\forall x \in [1, +\infty[$, $x\, f_n(x) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$

  × L'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\; dx$ est une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant 2 ($2 > 1$), donc elle converge.

  D'après le critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} x\, f_n(x)\; dx$ converge.

- De plus, la fonction $x \mapsto x\, f_n(x)$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} x\, f_n(x)\, dx$ est bien définie.

Finalement, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\, f_n(x)\; dx$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ la v.a.r. } T_n \text{ admet une espérance.}}$$

□

b) Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(T_1)$ de T_1 et l'espérance $\mathbb{E}(T_2)$ de T_2.

Démonstration.

- On remarque que : $T_1 = \max(X_1) = X_1$.

$$\boxed{\text{Donc, d'après la question } \textbf{\textit{1.}} : \mathbb{E}(T_1) = 1.}$$

- D'après la question ***2.*** les intégrales impropres $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,dx$ converge.
  On peut donc effectuer le calcul suivant :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(T_2) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_2(x)\,dx \;=\; \int_0^{+\infty} 2x\,\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})\,dx & \\ & = & 2\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x}\,dx - 2\int_0^{+\infty} x\,\mathrm{e}^{-2x}\,dx & \textit{(par linéarité de l'intégration)} \\ & = & 2\times\dfrac{1}{1^2} - 2\times\dfrac{1}{2^2} & \textit{(d'après le résultat de la question 2.)} \\ & = & \dfrac{3}{2} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T_2) = \frac{3}{2}}$$

□

6. ***a)*** Vérifier : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
  On obtient alors, pour tout $x > 0$:

$$\begin{array}{rcl} f'_n(x) & = & -n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} + n(n-1)\mathrm{e}^{-2x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-2} \\ & = & n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-2}\left(-(1-\mathrm{e}^{-x}) + (n-1)\mathrm{e}^{-x}\right) \\ & = & n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-2}(n\mathrm{e}^{-x}-1) \end{array}$$

$$\boxed{\forall x > 0,\ f'_{n+1}(x) = (n+1)\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}((n+1)\mathrm{e}^{-x}-1)}$$

- Soit $x > 0$.

$$\begin{array}{rcl} f_{n+1}(x) - f_n(x) & = & (n+1)\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^n - n\mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1} \\ & = & \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}((n+1)(1-\mathrm{e}^{-x}) - n) \\ & = & \mathrm{e}^{-x}(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}(1-(n+1)\mathrm{e}^{-x}) \\ & = & -\dfrac{1}{n+1} f'_{n+1}(x) \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x > 0 : f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x)}$$

Commentaire

On a considéré ici x dans $\mathbb{R}_+^*$ et non dans $\mathbb{R}_+$. En effet, f_n n'est pas toujours dérivable en 0.
Par exemple, f_1 et f_2 ne le sont pas.

□

b) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \int_0^{+\infty} x\left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)\, dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\, dx$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La fonction $x \mapsto x(f_{n+1}(x) - f_n(x))$ est $\mathcal{C}^0$ sur $[0, +\infty[$.
- Soit $A \geqslant 0$. D'après la question précédente :

$$\int_0^A x(f_{n+1}(x) - f_n(x))\, dx = -\frac{1}{n+1}\int_0^A x\, f'_{n+1}(x)\, dx$$

  On effectue alors une intégration par parties (IPP).

$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x & \quad & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & f'_{n+1}(x) & \quad & v(x) & = & f_{n+1}(x) \end{array}\right.$$

  Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{n+1}\int_0^A x\, f'_{n+1}(x)\, dx &= -\frac{1}{n+1}\left(\Big[\ x\, f_{n+1}(x)\ \Big]_0^A - \int_0^A f_{n+1}(x)\, dx\right) \\ &= -\frac{1}{n+1}\, A\, f_{n+1}(A) + \frac{1}{n+1}\int_0^A f_{n+1}(x)\, dx \end{aligned}$$

- De plus :
  × la fonction f_{n+1} est une densité de probabilité nulle en dehors de $[0, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(x)\, dx = \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\, dx$ converge (et vaut 1).
  D'où : $\displaystyle\int_0^A f_{n+1}(x)\, dx \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\, dx$.
  × comme $A \geqslant 0$:

$$A\, f_{n+1}(A) = A \times n \mathrm{e}^{-A}(1 - \mathrm{e}^{-A})^n = n \times \frac{A}{\mathrm{e}^A} \times (1 - \mathrm{e}^{-A})^n \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{(par croissances comparées)}$$

  On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)\, dx$ converge.

$$\boxed{\text{Ainsi : } \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{+\infty} x\left(f_{n+1}(x) - f_n(x)\right)\, dx = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\, dx.}$$

□

c) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $\mathbb{E}(T_{n+1})$ et $\mathbb{E}(T_n)$, puis une expression de $\mathbb{E}(T_n)$ sous forme d'une somme.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question ***5.a)***, les v.a.r. T_{n+1} et T_n admettent une espérance.

  On en conclut que les intégrales impropres $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{n+1}(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_n(x)\, dx$ sont (absolument) convergentes.

- On calcule alors :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(T_{n+1}) - \mathbb{E}(T_n) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{n+1}(x)\ dx - \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_n(x)\ dx & \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\, f_{n+1}(x)\ dx - \int_{0}^{+\infty} x\, f_n(x)\ dx & \textit{(car } f_n \textit{ et } f_{n+1} \textit{ sont nulles en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\,(f_{n+1}(x) - f_n(x))\ dx & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n+1}\int_{0}^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx & \textit{(d'après la question } \textbf{6.b)}\textit{)} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n+1}(x)\ dx & \textit{(car } f_{n+1} \textit{ est nulle en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n+1} \times 1 & \textit{(car } f_{n+1} \textit{ est une densité)} \end{array}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(T_{n+1}) - \mathbb{E}(T_n) = \frac{1}{n+1}}$$

- On a donc : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(T_{k+1}) - \mathbb{E}(T_k) = \dfrac{1}{k+1}$.

  En sommant ces égalités pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\mathbb{E}(T_{k+1}) - \mathbb{E}(T_k)\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

  Or, oar télescopage :

$$\mathbb{E}(T_n) - \mathbb{E}(T_1) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$$

  Or, d'après la question , $\mathbb{E}(T_1) = 1$.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(T_n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

□

Partie III : Loi du premier dépassement

Dans toute cette partie, a désigne un réel strictement positif.
On définit la variable aléatoire N égale au plus petit entier n de $\mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$ si un tel entier existe, et égale à 0 sinon.

7. Justifier l'égalité d'événements : $[N = 0] = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]$. En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = 0])$.

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$. $N(\omega) = 0$ si et seulement s'il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n(\omega) > a$.
  Autrement dit, si la proposition suivante est vérifiée :

$$\texttt{NON}\,(\exists n \in \mathbb{N}^*,\ X_n(\omega) > a)$$

  Ce qui équivaut à : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n(\omega) \leqslant a$. Puis à : $\omega \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [X_n \leqslant a]$.

$$\boxed{[N = 0] = \bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]}$$

Commentaire

On aurait sans doute obtenu tous les points de cette question sans l'introduction propre de ω.
En effet, l'énoncé prend le parti de ne pas le faire lors de la définition de la v.a.r. N.
Cela se fait cependant au prix d'une confusion d'objets entre variables aléatoires / réalisations / événements. Détaillons la démonstration qui semble plus proche de l'esprit du concepteur.

- Ainsi :
$$\mathbb{P}([N=0]) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]\right)$$
D'après le théorème de la limite monotone :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant a]\right)$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant a]\right) &= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_k \leqslant a]) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \cdots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_1 \leqslant a]) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \cdots, X_n \textit{ ont même loi)} \\
&= (\mathbb{P}([X_1 \leqslant a]))^n \;=\; (F_{X_1}(a))^n \\
&= (1-\mathrm{e}^{-a})^n && \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } a \geqslant 0\textit{)}
\end{aligned}$$
Or : $0 < 1-\mathrm{e}^{-a} < 1$. En effet :
$$\begin{aligned}
+\infty > a > 0 &\Leftrightarrow -\infty < -a < 0 \\
&\Leftrightarrow 0 < \mathrm{e}^{-a} < 1 && \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
&\Leftrightarrow -1 < -\mathrm{e}^{-a} < 0
\end{aligned}$$
On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\mathrm{e}^{-a})^n = 0$.

Et : $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} [X_k \leqslant a]\right) = 0$.

$$\boxed{\mathbb{P}([N=0]) = 0}$$

□

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([N=n]) = (1-\mathrm{e}^{-a})^{n-1}\,\mathrm{e}^{-a}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Par définition, l'événement $[N=n]$ est réalisé si et seulement si n est le plus petit entier tel que $[X_n > a]$ est réalisé. Autrement dit, si on a à la fois :
  × pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, l'événement $[X_k \leqslant a]$ est réalisé,
  × l'événement $[X_n > a]$ est réalisé.

$$\boxed{\text{Ainsi : } [N=n] = [X_1 \leqslant a] \cap \cdots \cap [X_{n-1} \leqslant a] \cap [X_n > a] = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k \leqslant a]\right) \cap [X_n > a]}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([N=n]) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} [X_k \leqslant a]\right) \cap [X_n > a]\right) \\
&= \left(\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_k \leqslant a])\right) \times \mathbb{P}([X_n > a]) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \cdots, X_n \textit{ sont indépendantes)} \\
&= (\mathbb{P}([X_1 \leqslant a]))^n \times \mathbb{P}([X_1 > a]) && \textit{(car les v.a.r. } X_1, \cdots, X_n \textit{ ont même loi)} \\
&= (F_{X_1}(a))^{n-1} \times (1 - F_{X_1}(a)) \\
&= (1-\mathrm{e}^{-a})^{n-1} \times \mathrm{e}^{-a} && \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \textit{ et } a \geqslant 0\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([N=n]) = (1-\mathrm{e}^{-a})^{n-1}\ \mathrm{e}^{-a}}$$

□

9. Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(N)$ et la variance $\mathbb{V}(N)$ de N.

Démonstration.

- D'après l'énoncé : $N(\Omega) = \mathbb{N}$.
- De plus, on a démontré :
  × $\mathbb{P}([N=0]) = 0$.
  × $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}([N=n]) = (1-\mathrm{e}^{-a})^{n-1}\ \mathrm{e}^{-a}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } N \hookrightarrow \mathcal{G}(\mathrm{e}^{-a}).}$$

- Ainsi N admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(N) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-a}} = \mathrm{e}^a \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(N) = \frac{1-\mathrm{e}^{-a}}{(\mathrm{e}^{-a})^2} = \mathrm{e}^{2a}(1-\mathrm{e}^{-a}) = \mathrm{e}^a\,(\mathrm{e}^a - 1).}$$

Commentaire

- Dans le cours, il est précisé qu'une v.a.r. X qui suit une loi géométrique (de paramètre e^{-a}) admet pour ensemble image $\mathbb{N}^*$. Ici, N a pour ensemble image $\mathbb{N}$ mais prend la valeur 0 avec probabilité nulle. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \mathbb{P}([X=x]) = \mathbb{P}([N=x])$$

  (et ces probabilités sont nulles si $x \notin \mathbb{N}^*$)
  Dans ce cas, on considère que X et N ont même loi (qui est $\mathcal{G}(\mathrm{e}^{-a})$).
- Évidemment, il est tout à fait possible d'effectuer un calcul direct avec les probabilités calculées en questions ***7.*** et ***8.***. Cependant, cela démontre une manque de prise de recul et finit par coûter des points car demande beaucoup plus de temps.

□

On s'intéresse maintenant à la variable aléatoire Z, définie pour tout ω de Ω par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X_{N(\omega)}(\omega) & \text{si } N(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si } N(\omega) = 0 \end{cases}$$

10. Justifier : $\mathbb{P}([Z \leqslant a]) = 0$.

Démonstration.

- La famille $([N = 0], [N \neq 0])$ est un système complet d'événements.
  D'après la formule des probabilités totales :
  $$\mathbb{P}([Z \leqslant a]) = \mathbb{P}([Z \leqslant a] \cap [N = 0]) + \mathbb{P}([Z \leqslant a] \cap [N \neq 0])$$
- Or, par définition de Z :
  $$[Z \leqslant a] \cap [N = 0] = [0 \leqslant a] \cap [N = 0] = \Omega \cap [N = 0] = \Omega \cap [N = 0] = [N = 0]$$
  (on rappelle que d'après l'énoncé : $a > 0 \geqslant 0$)
- D'autre part, par définition de N :
  $$[Z \leqslant a] \cap [N \neq 0] = \varnothing$$
  Démontrons-le en supposant par l'absurde qu'il existe ω qui réalise $[Z \leqslant a] \cap [N \neq 0]$.
  Cela signifie que $N(\omega) \neq 0$ et $Z(\omega) \leqslant a$.
  Comme $N(\omega) \neq 0$ alors $Z(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$. On en déduit :
  $$Z(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega) \leqslant a$$
  Or, comme $N(\omega) \neq 0$, alors $N(\omega)$ est par définition le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n(\omega) > a$.
  On a alors : $X_{N(\omega)}(\omega) > a$ ce qui contredit $X_{N(\omega)}(\omega) \leqslant a$.
- On revient à la première égalité :
  $$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z \leqslant a]) & = & \mathbb{P}([N = 0]) + \mathbb{P}(\varnothing) & \\ & = & 0 + 0 & \textit{(d'après la question 7.)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \mathbb{P}([Z \leqslant a]) = 0}$$

Commentaire

L'utilisation de la formule des probabilités totales devrait relever ici de l'automatisme. En effet, on traite d'une v.a.r. qui est définie par cas. Pour le calcul de $\mathbb{P}([Z \leqslant a])$, on est donc naturellement amené à vouloir traiter à part le cas où $N = 0$ et celui où $N \neq 0$. La formule des probabilités totales n'est autre qu'une formalisation correcte de cette idée.

□

11. Soit $x \in \,]a, +\infty[$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité d'événements :
$$[N = n] \cap [Z \leqslant x] = \begin{cases} [a < X_1 \leqslant x] & \text{si } n = 1 \\ [T_{n-1} \leqslant a] \cap [a < X_n \leqslant x] & \text{si } n \geqslant 2 \end{cases}$$
En déduire la probabilité $\mathbb{P}([N = n] \cap [Z \leqslant x])$.

Démonstration.

Deux cas se présentent.

- Si $n = 1$.
  $$\begin{array}{rcll} [N = 1] \cap [Z \leqslant x] & = & [N = 1] \cap [X_N \leqslant x] & \textit{(par définition de } Z\textit{)} \\ & = & [N = 1] \cap [X_1 \leqslant x] & \textit{(par définition de } Z\textit{)} \\ & = & [X_1 > a] \cap [X_1 \leqslant x] & \textit{(par définition de } N\textit{)} \\ & = & [a < X_1 \leqslant x] & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } [N = 1] \cap [Z \leqslant x] = [a < X_1 \leqslant x].}$$

On en déduit alors :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}([N=1]\cap[Z\leqslant x]) & = & \mathbb{P}([a<X_1\leqslant x]) \ = \ F_{X_1}(x)-F_{X_1}(a) \\ & = & (\cancel{1}-\mathrm{e}^{-x})-(\cancel{1}-\mathrm{e}^{-a}) \ = \ \mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-x}\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([N=1]\cap[Z\leqslant x])=\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-x}}$$

- Si $n\geqslant 2$.

$$\begin{array}{rcll}[N=n]\cap[Z\leqslant x] & = & [N=n]\cap[X_N\leqslant x] & \textit{(par définition de } Z\textit{)} \\ & = & [N=n]\cap[X_n\leqslant x] & \textit{(par définition de } Z\textit{)} \\ & = & \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1}[X_k\leqslant a]\right)\cap[X_n>a] \ \cap \ [X_n\leqslant x] & \textit{(d'après la question } \textbf{8.}\textit{)} \\ & = & \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1}[X_k\leqslant a]\right)\cap[a<X_n\leqslant x] & \\ & = & [\max(X_1,\dots,X_n)\leqslant a]\cap[a<X_n\leqslant x] & \\ & = & [T_{n-1}\leqslant a]\cap[a<X_n\leqslant x] & \textit{(par définition de } T_{n-1}\textit{)}\end{array}$$

$$\boxed{\text{Si } n\geqslant 2, \text{ on a bien : } [N=n]\cap[Z\leqslant x]=[T_{n-1}\leqslant a]\cap[a<X_n\leqslant x].}$$

On en déduit alors :

$$\begin{array}{rcll}\mathbb{P}([N=n]\cap[T\leqslant x]) & = & \mathbb{P}([T_{n-1}\leqslant a]\cap[a<X_n\leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}([T_{n-1}\leqslant a])\,\mathbb{P}([a<X_n\leqslant x]) & \textit{(car } T_{n-1} \textit{ et } X_n \textit{ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions)} \\ & = & (1-\mathrm{e}^{-a})^{n-1}\ \mathbb{P}([a<X_n\leqslant x]) & \textit{(d'après la question } \textbf{4.a)}\textit{)}\end{array}$$

De plus X_n suit la même loi que X_1, donc :

$$\mathbb{P}([a<X_n\leqslant x])=\mathbb{P}([a<X_1\leqslant x])=\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-x}$$

$$\boxed{\text{Si } n\geqslant 2,\ \mathbb{P}([N=n]\cap[Z\leqslant x])=(1-\mathrm{e}^{-a})^{n-1}\ (\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-x}).}$$

On remarque que l'expression trouvée dans le cas $n\geqslant 2$ est valide pour $n=1$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([N=n]\cap[Z\leqslant x])=(\mathrm{e}^{-a}-\mathrm{e}^{-x})\ (1-\mathrm{e}^{-a})^{n-1}}$$

Commentaire

On fait remarquer que la formule obtenue est valide dans le cas $n=1$ et $n\geqslant 2$.
Ce n'est pas un objectif annoncé de la question. L'avantage est que cela rend la question suivante plus simple à rédiger : on n'est pas obligé de distinguer les cas $n=1$ et $n\geqslant 2$ puisque l'expression est valide dans ces deux cas.

□

b) Montrer alors : $\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 1 - e^{a-x}$.

Démonstration.
La famille $\big([N = n]\big)_{n\geqslant 1}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{P}([Z \leqslant x]) & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([N = n] \cap [Z \leqslant x]) & \\
& = & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{-a} - e^{-x}\right)\ \left(1 - e^{-a}\right)^{n-1} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{11.a)}}\textit{)} \\
& = & \left(e^{-a} - e^{-x}\right) \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{-a})^{n-1} & \\
& = & \left(e^{-a} - e^{-x}\right) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (1 - e^{-a})^{n} & \textit{(par décalage d'indice)} \\
& = & \left(e^{-a} - e^{-x}\right) \dfrac{1}{\cancel{1} - (\cancel{1} - e^{-a})} & \\
& = & \cancel{e^{-a}}\ \left(1 - e^{a-x}\right) \dfrac{1}{\cancel{e^{-a}}} & \\
& = & 1 - e^{a-x} &
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 1 - e^{a-x}}$$

□

12. a) Montrer que la variable aléatoire $Z - a$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  - × si $x < 0$, alors :
  $$[Z - a \leqslant x] = [Z \leqslant x + a] \subset [Z \leqslant a]$$
  Donc, par croissance de $\mathbb{P}$ et d'après la question ***10.*** :
  $$0 \leqslant \mathbb{P}([Z - a \leqslant x]) \leqslant \mathbb{P}([Z \leqslant a]) = 0$$
  D'où : $F_{Z-a}(x) = \mathbb{P}([Z - a \leqslant x]) = 0$.
  - × si $x \geqslant 0$:
  $$\begin{array}{rcll}
  F_{Z-a}(x) & = & \mathbb{P}([Z - a \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}([Z \leqslant x + a]) & \\
  & = & 1 - e^{\cancel{a}-(x+\cancel{a})} & \begin{array}{l}\textit{(d'après la question } \textbf{\textit{11.b)}}\textit{,} \\ \textit{car } x + a \geqslant a\textit{)}\end{array} \\
  & = & 1 - e^{-x} &
  \end{array}$$

  Finalement :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ F_{Z-a}(x) = \left\{\begin{array}{cl} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array}\right.$$
  On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1.
  Or, la fonction de répartition caractérise la loi.
  $$\boxed{\text{Donc la v.a.r. } Z - a \text{ suit une loi exponentielle de paramètre } 1.}$$

Commentaire

- On reconnaît ici une question du type « déterminer la transformée affine d'une v.a.r. Z ». Ce type de question est à savoir faire sans hésitation.
- L'énoncé nous guide ici dans la disjonction de cas à considérer : il précise que $Z - a$ suit une loi exponentielle. Or l'ensemble image d'une v.a.r. suivant une loi exponentielle est $[0, +\infty[$. La disjonction de cas attendue pour déterminer la fonction de répartition de $Z - a$ est donc :
  - × le cas $x \geqslant 0$,
  - × le cas $x < 0$.

□

b) En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(Z)$, ainsi que l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(Z)$.

Démonstration.

- On remarque que : $Z = (Z - a) + a$.

  La v.a.r. Z admet une espérance et une variance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent.

- Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Z - a) + \mathbb{E}(a) = \frac{1}{1} + a = 1 + a$$

- Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(Z - a) = \frac{1}{1^2} = 1$$

Finalement : $\mathbb{E}(Z) = 1 + a$ et $\mathbb{V}(Z) = 1$.

□

Exercice 6 : ESSEC-I 2007

Dans tout l'exercice, les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$. Dans la suite, λ désigne un réel strictement positif.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

a) Déterminer la fonction : $x \mapsto \mathbb{P}([X > x])$ (appelée *fonction de survie de* X).

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Comme X suit la loi exponentielle de paramètre λ, sa fonction de répartition est donnée par :

$$F_X : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$$

- On en déduit que :

$$\mathbb{P}([X > x]) = 1 - \mathbb{P}([X \leqslant x]) = 1 - F_X(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{La fonction de survie est : } x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. .}$$

□

b) Pour tous nombres réels strictement positifs x et y, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y])$; justifier alors que, si X modélise la durée de vie d'un phénomène, on dise de ce dernier qu'il est « sans vieillissement ».

Démonstration.
Soient $x > 0$ et $y > 0$.

- D'après la question précédente, $\mathbb{P}([X > x]) > 0$.
- On peut donc calculer la probabilité conditionnelle suivante :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y]) & = & \dfrac{\mathbb{P}([X > x] \cap [X > x + y])}{\mathbb{P}([X > x])} & \\ & = & \dfrac{\mathbb{P}([X > x + y])}{\mathbb{P}([X > x])} & \textit{(car, comme } y > 0 \textit{ :} \\ & & & X > x + y \ \Rightarrow \ X > x \\ & & & \textit{donc } [X > x + y] \subset [X > x]\textit{)} \\ & = & \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda(x+y)}}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} & \textit{(car } x + y \geqslant 0 \textit{ et } x \geqslant 0\textit{)} \\ & = & \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda x}\ \mathrm{e}^{-\lambda y}}{\mathrm{e}^{-\lambda x}} \ = \ \mathrm{e}^{-\lambda y} & \\ & = & \mathbb{P}([X > y]) & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X>x]}([X > x + y]) = \mathbb{P}([X > y])}$$

La probabilité que le phénomène ait encore lieu après $x + y$ « heures » sachant qu'il a déjà eut lieu durant x heures ne dépend que de la durée supplémentaire $x + y - x = y$ ajoutée.

□

2. Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

a) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La v.a.r. S_n admet une espérance en tant que somme de variables aléatoires qui admettent toutes une espérance.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(S_n) & = & \mathbb{E}(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda} & \textit{(car pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \\ & & & X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\ & = & n \, \dfrac{1}{\lambda} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = \frac{n}{\lambda}}$$

- La v.a.r. S_n admet une variance en tant que somme de variables aléatoires qui admettent toutes une variance.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(S_n) & = & \mathbb{V}(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k) & \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) & \textit{(car } X_1, \ldots, X_n \textit{ sont} \\ & & & \textit{indépendantes)} \\ & = & \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda^2} & \textit{(car pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \\ & & & X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\ & = & n \, \dfrac{1}{\lambda^2} & \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}}$$

$\square$

b) Démontrer par récurrence que, pour tout n de$\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire S_n admet pour densité la fonction f_n :

$$t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0\,; \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda t} t^{n-1} & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Pour cela, on admettra que, si U et V sont des variables aléatoires indépendantes admettant respectivement pour densité les fonctions f_U et f_V, alors la variable aléatoire $U+V$ admet pour densité la fonction f_{U+V} définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{U+V}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(x) f_V(t-x)\, dx.$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: S_n est une variable à densité, de densité f_n.

- **Initialisation** :
  Par définition, $f_1 : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda}{0!}\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\ t^0 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
  Comme $\dfrac{\lambda}{0!}\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\ t^0 = \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda t}$, on reconnaît la densité d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.
  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$
  (*i.e.* S_{n+1} est une variable à densité, de densité f_{n+1}).
  - Remarquons tout d'abord que $S_{n+1}(\Omega) \subset [0,+\infty[$ puisque les v.a.r. X_i sont telles que : $X_i(\Omega) = [0,+\infty[$.
  - Par définition : $S_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} X_k = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \right) + X_{n+1}$.

    On est dans le cadre d'utilisation du théorème fourni par l'énoncé :
    × par hypothèse de récurrence, S_n est une variable à densité, de densité f_n.
    × d'après l'énoncé, X_{n+1} est une variable à densité de densité f_1 (puisque pour tout i, $X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$).
    × d'après le lemme des coalitions, les v.a.r. $X_1, \ldots, X_{n+1}$ étant indépendantes, les v.a.r. S_n et X_{n+1} sont indépendantes.
  - On en déduit que S_{n+1} est une v.a.r. à densité dont il reste à déterminer une densité.
    Soit $t \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
    × si $t < 0$: $f_{S_{n+1}}(t) = 0$ car $S_{n+1}(\Omega) \subset [0,+\infty[$.
    × si $t \geqslant 0$:
    Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_n(x)\ f_1(t-x) \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_n(x) \neq 0 \\ f_1(t-x) \neq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in [0,+\infty[\\ (t-x) \in [0,+\infty[\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ t - x \geqslant 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x \leqslant t \end{cases} \end{aligned}$$

    On en déduit : $f_n(x)\, f_1(t-x) \neq 0 \Leftrightarrow x \in [0,t]$.

Et ainsi :

$$f_{S_{n+1}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_n}(x)\, f_{X_{n+1}}(t-x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\, f_1(t-x)\, dx = \int_0^t f_n(x)\, f_1(t-x)\, dx$$

car $x \mapsto f_n(x)\, f_1(t-x)$ est nulle en dehors de $[0,t]$. Enfin :

$$\begin{aligned} f_{S_{n+1}}(t) &= \int_0^t \frac{\lambda^n}{(n-1)!}\ \mathrm{e}^{-\lambda x}\ x^{n-1}\ \lambda\ \mathrm{e}^{-\lambda(t-x)}\ dx \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^t \cancel{\mathrm{e}^{-\lambda x}}\ x^{n-1}\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\ \cancel{\mathrm{e}^{\lambda x}}\ dx \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\ \mathrm{e}^{-\lambda t} \int_0^t x^{n-1}\ dx \\ &= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!}\ \mathrm{e}^{-\lambda t} \left[\frac{x^n}{n} \right]_0^t = \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\ \mathrm{e}^{-\lambda t}\ t^n \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence, pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ S_n \text{ est une variable à densité de densité } f_n.}$

Remarque

Lorsque l'énoncé demande de déterminer la loi d'une v.a.r. Y, ou sa fonction de répartition F_Y, ou une densité f_Y, il est utile de commencer par déterminer $Y(\Omega)$ puisque cet ensemble fournit la disjonction de cas permettant de déterminer F_Y et f_Y. □

Exercice 7 : HEC 2012

Sous réserve d'existence, on note $\mathbb{E}(U)$ et $\mathbb{V}(U)$ respectivement, l'espérance mathématique et la variance d'une variable aléatoire U définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Pour p entier supérieur ou égal à 2, on dit que les variables aléatoires à densité $U_1, \ldots, U_p$ sont indépendantes si pour tout p-uplet $(u_1, \ldots, u_p)$ de réels, les événements $[U_1 \leqslant u_1], \ldots, [U_p \leqslant u_p]$ sont indépendants.
L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés d'une loi de probabilité utilisée notamment en fiabilité.
Les parties I et II sont largement indépendantes. La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I : Loi à 1 paramètre.

On note λ un paramètre réel strictement positif. On considère la fonction f_λ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}}\, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } \ x > 0 \\[2ex] 0 & \text{si } \ x \leqslant 0 \end{cases}$$

1. a) Montrer que la fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ en tant qu'inverse de la fonction $x \mapsto 2\sqrt{x}$:
  - × de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$,
  - × qui ne s'annule pas ($\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \sqrt{x} \neq 0$).
- La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ en tant que composée $g_2 \circ g_1$ de :
  - × $g_1 : x \mapsto -\lambda\sqrt{x}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$,
    et telle que : $g_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
  - × $g_2 : u \mapsto \mathrm{e}^u$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_\lambda \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ en tant que produit de fonctions de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

□

b) Dresser le tableau de variation de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ et préciser les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\lambda(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x)$.

Démonstration.

- Comme $\lambda > 0$, par produit de limites : $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\lambda(x) = +\infty$.
- Toujours par produit de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_\lambda(x) = 0$.
- La fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$. En particulier, elle est dérivable sur $]0, +\infty[$.
  Soit $x \in\ ]0, +\infty[$. Tout d'abord, remarquons :

$$f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}\right) = \frac{\lambda}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}\right)$$

  On obtient alors :

$$\begin{aligned} f_\lambda'(x) &= \frac{\lambda}{2}\left(-\frac{1}{2}\, x^{-\frac{3}{2}}\, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} + x^{-\frac{1}{2}}\, \frac{-\lambda}{2\sqrt{x}}\, \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}\right) \\ &= -\frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{2}\, \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\, \frac{\lambda}{2\sqrt{x}}\right) \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \ = \ -\frac{\lambda}{4}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{\lambda}{x}\right) \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Comme $x > 0$ et $\lambda > 0$, $f_\lambda'(x)$ apparaît comme l'opposé de trois produits strictement positifs. Ainsi : $f_\lambda'(x) < 0$. Et f_λ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

- On obtient le tableau de variations suivant :

x	0 $+\infty$
Signe de $f_\lambda'(x)$	$-$
Variations de f_λ	$+\infty \searrow 0$

□

c) Établir la convexité de la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- Notons $u : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda}{x} = x^{-\frac{3}{2}} + \lambda x^{-1}$, de sorte que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_\lambda'(x) = -\dfrac{\lambda}{4}\ u(x)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit de fonctions dérivables sur cet intervalle.
De plus, pour tout $x \in\ ]0, +\infty[$: $u'(x) = -\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} - \lambda x^{-2} = -\left(\dfrac{3}{2}\ \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda}{x^2}\right)$.
- Soit $x \in\ ]0, +\infty[$.

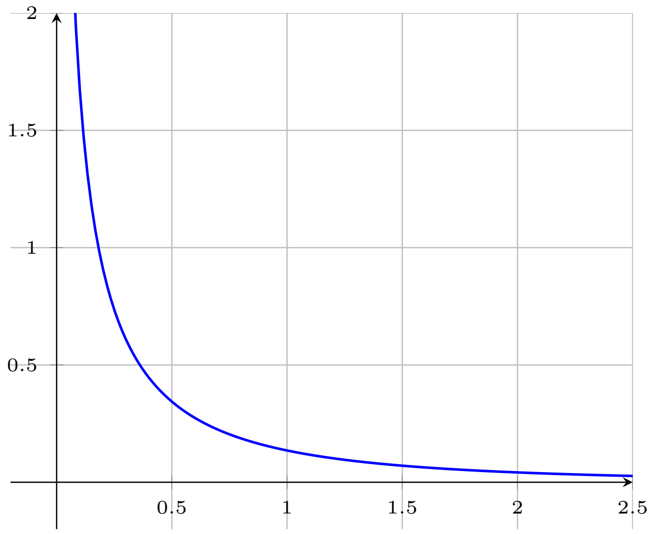
$$\begin{array}{rcl} f_\lambda''(x) & = & -\dfrac{\lambda}{4}\ \left(u'(x)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} + u(x)\ \dfrac{-\lambda}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}\right) \\ & = & -\dfrac{\lambda}{4}\ \left(u'(x) + u(x)\ \dfrac{-\lambda}{2\sqrt{x}}\right)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \\ & = & -\dfrac{\lambda}{4}\ \left(-\left(\dfrac{3}{2}\ \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda}{x^2}\right) - u(x)\ \dfrac{\lambda}{2\sqrt{x}}\right)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \\ & = & \dfrac{\lambda}{4}\ \left(\dfrac{3}{2}\ \dfrac{1}{x^2\sqrt{x}} + \dfrac{\lambda}{x^2} + \dfrac{\lambda}{2x^2} + \dfrac{\lambda^2}{2x\sqrt{x}}\right)\ \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}\ >\ 0 \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } f_\lambda \text{ est convexe sur }]0, +\infty[}$$

□

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f_λ dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

Démonstration.



□

2. ***a)*** Vérifier que la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$ est une primitive de f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.
On note $F : x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}$.

- La fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que composée $g_2 \circ g_1$ de :
  - × $g_1 : x \mapsto -\lambda\sqrt{x}$ dérivable sur $]0, +\infty[$,
    et telle que : $g_1(]0, +\infty[) \subset \mathbb{R}$.
  - × $g_2 : u \mapsto -\mathrm{e}^u$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$F'(x) = -\left(-\frac{\lambda}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}}\right) = f_\lambda(x)$$

$$\boxed{\text{Donc } x \mapsto -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \text{ est une primitive de } f_\lambda \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

□

b) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx$ et calculer sa valeur.

Démonstration.

- La fonction f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, donc elle est continue sur $]0, +\infty[$.
- L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx$ est convergente si $\displaystyle\int_0^{1} f_\lambda(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx$ le sont.

On s'intéresse tout d'abord à la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx$.

- La fonction f_λ est $\mathcal{C}^0$ sur $[1, +\infty[$.
- Soit $A \in [1, +\infty[$. D'après la question précédente :

$$\int_1^A f_\lambda(x)\ dx = [\ F(x)\ ]_1^A = \mathrm{e}^{-\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{A}} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\lambda}$$

  Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx$ converge et vaut $\mathrm{e}^{-\lambda}$.

On s'intéresse maintenant à la nature de $\displaystyle\int_0^{1} f_\lambda(x)\ dx$.

- La fonction f_λ est $\mathcal{C}^0$ sur $]0, 1]$.
- Soit $B \in]0, 1]$.

$$\int_B^1 f_\lambda(x)\ dx = [\ F(x)\ ]_B^1 = \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{B}} - \mathrm{e}^{-\lambda} \underset{B \to 0}{\longrightarrow} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$$

  Donc $\displaystyle\int_0^{1} f_\lambda(x)\ dx$ converge et vaut $1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\ dx \text{ converge et vaut } 1 - \cancel{\mathrm{e}^{-\lambda}} + \cancel{\mathrm{e}^{-\lambda}} = 1.}$$

□

c) En déduire que la fonction f_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)***, f_λ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
  En particulier, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Par définition de f_λ, on a bien :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f_\lambda(x) \geqslant 0$$
- Tout d'abord :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\lambda(x) \, dx = \int_0^{+\infty} f_\lambda(x) \, dx$$
  car f_λ est nulle en dehors de $]0, +\infty[$.
  D'après la question ***2.b)***, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_\lambda(x) \, dx$ converge et vaut 1.

$$\boxed{\text{Donc } f_\lambda \text{ est une densité de probabilité sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

□

3. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, à valeurs strictement positives, ayant f_λ pour densité. On note F_λ la fonction de répartition de X et on pose : $Y = \lambda\sqrt{X}$.

a) Calculer pour tout x réel, $F_\lambda(x)$.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $X(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \leqslant 0$, alors $[X \leqslant x] = \varnothing$ car $X(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$. Donc :
$$F_\lambda(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
  × si $x > 0$. Tout d'abord :
$$\int_{-\infty}^{x} f_\lambda(t) \, dt = \int_0^{x} f_\lambda(t) \, dt$$
  car f_λ est nulle en dehors de $]0, x]$ $(x > 0)$.
  La fonction f_λ est continue sur $]0, x]$. Soit $B \in \,]0, x]$.
$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int_B^x f_\lambda(t) \, dt & = & \left[-\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{t}} \right]_B^x & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.a)}}\textit{)} \\ & = & -\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} - (-\mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{B}}) & \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{B}} - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \\ & \underset{B \to 0}{\longrightarrow} & 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \end{array}$$
  On en déduit :
$$\begin{array}{rcl} F_\lambda(x) \ = \ \mathbb{P}([X \leqslant x]) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_\lambda(t) \, dt \qquad \textit{(car } f_\lambda \textit{ est une densité de } X\textit{)} \\ & = & 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_\lambda : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right. .}$$

□

b) Montrer que Y suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Démonstration.

- D'après l'énoncé, $X(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
  Donc, comme $\lambda > 0$, on obtient : $Y(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.

$$\boxed{Y(\Omega) \subset \,]0, +\infty[}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \leqslant 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$. Donc :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × si $x > 0$.

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \; = \; \mathbb{P}\left(\left[\lambda\sqrt{X} \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{X} \leqslant \dfrac{x}{\lambda}\right]\right) & \textit{(car } \lambda > 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^2\right]\right) & \textit{(car } x \mapsto x^2 \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\textit{)} \\ & = & F_\lambda\left(\frac{x^2}{\lambda^2}\right) & \textit{(car } F_\lambda \textit{ est la fonction de répartition de } X\textit{)} \\ & = & 1 - \mathrm{e}^{-\cancel{\lambda}\sqrt{\frac{x^2}{\cancel{\lambda^2}}}} & \textit{(d'après la question précédente, car } \frac{x^2}{\lambda^2} > 0\textit{)} \\ & = & 1 - \mathrm{e}^{-x} & \textit{(car } x > 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{array} \right. .}$$

- On reconnaît la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{Donc la v.a.r. } Y \text{ suit la loi exponentielle de paramètre 1.}}$$

□

c) Établir pour tout r de $\mathbb{N}^*$, l'existence de $\mathbb{E}(Y^r)$.

Démonstration.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

- D'après le théorème de transfert, la v.a.r. Y^r admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_Y(t)\ dt$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer la convergence pour des calculs de moments.
- La v.a.r. Y suit la loi exponentielle de paramètre 1. Donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f_Y(t) = \left\{ \begin{array}{cl} \mathrm{e}^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{array} \right.$$

- La fonction f_Y est nulle en dehors de $[0, +\infty[$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_Y(t)\ dt = \int_0^{+\infty} t^r f_Y(t)\ dt$$

- La fonction $t \mapsto t^r \ f_Y(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.
  De plus, elle est positive sur $[0,+\infty[$.
- $\times$ Tout d'abord : $t^r \ f_Y(t) = t^r \mathrm{e}^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
  En effet :
  $$\frac{t^r \mathrm{e}^{-t}}{\frac{1}{t^2}} = t^2 t^r \mathrm{e}^{-t} = t^{r+2}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
  $\times$ $\forall t \in [1,+\infty[$, $t^r \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.
  $\times$ L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \ dt$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en $+\infty$, d'exposant 2 $(2 > 1)$.
  Par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^r \ f_Y(t) \ dt$ converge.
- De plus la fonction $t \mapsto t^r \ f_Y(t)$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^r \mathrm{e}^{-t} \ dt$ est bien définie.

Finalement, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^r \mathrm{e}^{-t} \ dt$ converge.

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } r \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{E}(Y^r) \text{ existe.}}$$

□

d) Montrer que pour tout r de $\mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{E}\left(Y^{r+1}\right) = (r+1)\,\mathbb{E}\left(Y^r\right)$.

Démonstration.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$.
D'après la question précédente :
$$\mathbb{E}(Y^{r+1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{r+1} f_Y(t) \ dt = \int_0^{+\infty} t^{r+1} \mathrm{e}^{-t} \ dt$$
Soit $A \geqslant 0$. On effectue une intégration par parties (IPP).
$$\left|\begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^{r+1} & \quad & u'(t) & = & (r+1)t^r \\ v'(t) & = & \mathrm{e}^{-t} & & v(t) & = & -\mathrm{e}^{-t} \end{array}\right.$$
Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,A]$. On obtient :
$$\begin{aligned} \int_0^A t^{r+1}\mathrm{e}^{-t} \ dt &= \left[\ -t^{r+1}\mathrm{e}^{-t}\ \right]_0^A + (r+1)\int_0^A t^r \mathrm{e}^{-t} \ dt \\ &= -A^{r+1}\mathrm{e}^{-A} + (r+1)\int_0^A t^r\mathrm{e}^{-t} \ dt \end{aligned}$$
Or, par croissances comparées : $\lim\limits_{A\to+\infty} -A^{r+1}\mathrm{e}^{-A} = 0$.
De plus, $\displaystyle\int_0^A t^r \mathrm{e}^{-t} \ dt$ admet une limite finie en $+\infty$ car $\mathbb{E}(Y^r)$ existe.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit, par passage à la limite quand } A \text{ tend vers } +\infty : \\ \mathbb{E}(Y^{r+1}) = (r+1)\ \mathbb{E}(Y^r).\end{array}}$$

□

e) En déduire pour tout r de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(Y^r)$ et $\mathbb{E}(X^r)$. En particulier, calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $\forall r \geqslant 2$, $\mathbb{E}(Y^r) = r\ \mathbb{E}(Y^{r-1})$.
- On obtient ainsi, pour tout $r \geqslant 2$:

$$\mathbb{E}(Y^r) = r\mathbb{E}(Y^{r-1}) = r(r-1)\mathbb{E}(Y^{r-2}) = \cdots = r(r-1) \times \cdots \times 2\, \mathbb{E}(Y^1) = r!\, \mathbb{E}(Y)$$

(on le démontre rigoureusement par une récurrence immédiate)
Or, comme $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$: $\mathbb{E}(Y) = 1$.

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(Y^r) = r!}$$

- Par définition : $Y = \lambda\sqrt{X}$.
Ainsi : $Y^2 = \lambda^2\ X$ et comme $\lambda^2 > 0$: $X = \dfrac{Y^2}{\lambda^2}$. On en déduit :

$$X^r = \left(\frac{Y^2}{\lambda^2}\right)^r = \frac{Y^{2r}}{\lambda^{2r}}$$

Et par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X^r) = \mathbb{E}\left(\frac{Y^{2r}}{\lambda^{2r}}\right) = \frac{1}{\lambda^{2r}}\, \mathbb{E}(Y^{2r}) = \frac{(2r)!}{\lambda^{2r}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \forall r \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{E}(X^r) = \dfrac{(2r)!}{\lambda^{2r}} \\ \text{En particulier : } \mathbb{E}(X) = \dfrac{2}{\lambda^2} \text{ et } \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \dfrac{4!}{\lambda^4} - \dfrac{4}{\lambda^4} = \dfrac{20}{\lambda^4}. \end{array}}$$

□

Partie II : Estimation ponctuelle de λ.

Pour n entier de $\mathbb{N}^*$, on note $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires à valeurs strictement positives, indépendantes et de même loi que la variable aléatoire X définie dans la question ***3.***

On rappelle que $Y = \lambda\sqrt{X}$, et on pose pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $Y_k = \lambda\sqrt{X_k}$, $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} Y_j$ et g_k une densité de S_k.

On admet que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ sont indépendantes et que pour tout k de $[\![1, n]\!]$, les variables aléatoires S_k et Y_{k+1} sont indépendantes. On admet que si T et Z sont deux variables aléatoires à densité indépendantes définies sur le même espace probabilisé, de densités respectives f_T et f_Z telles que f_T et f_Z soient bornées, alors la variable aléatoire $T + Z$ admet une densité f_{T+Z} définie pour tout x réel par :

$$f_{T+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y)\, f_Z(x-y)\ dy$$

4. *a)* En utilisant les propriétés admises, montrer que : $g_2(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Démonstration.

- Par définition : $S_2 = \sum\limits_{j=1}^{2} Y_j = Y_1 + Y_2$.
Comme $Y_1(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[$ et $Y_2(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[$ alors : $S_2(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[$.

$$\boxed{S_2(\Omega) \subset\ ]0, +\infty[}$$

- D'autre part, les v.a.r. Y_1 et Y_2 :
  - × sont des variables à densité.
    En effet, elles suivent la loi exponentielle de paramètre 1, d'après la question ***3.b)***.
  - × sont indépendantes, d'après l'énoncé.
  - × admettent pour densité commune la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  La fonction f est bien bornée sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-0} = 1$.

  Donc, d'après l'énoncé, la v.a.r. S_2 admet une densité g_2 définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_2(x) = f_{Y_1+Y_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1}(y) f_{Y_2}(x-y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)f(x-y)\ dy$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Deux cas se présentent alors :
  - × si $x \leqslant 0$. Alors $g_2(x) = 0$ car $S_2(\Omega) \subset\,]0, +\infty[$.
  - × si $x > 0$. Remarquons que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(y)f(x-y) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) \neq 0 \\ f(x-y) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in [0, +\infty[\\ x-y \in [0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0 \\ x-y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant 0 \\ y \leqslant x \end{cases}$$

  On en déduit : $f(y)f(x-y) \neq 0 \ \Leftrightarrow\ y \in [0, x]$. Et ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)f(x-y)\ dy \ = \ \int_0^x f(x)f(x-y)\ dy$$

  car $y \mapsto f(y)f(x-y)$ est nulle en dehors de $[0, x]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} g_2(x) &= \int_0^x f(y)f(x-y)\ dy = \int_0^x \mathrm{e}^{-y}\ \mathrm{e}^{-(x-y)}\ dy \\ &= \mathrm{e}^{-x} \int_0^x \mathrm{e}^{-\cancel{y}+\cancel{y}}\ dy = \mathrm{e}^{-x} \int_0^x 1\ dy \\ &= \mathrm{e}^{-x} \left[\ y\ \right]_0^x = x\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall x \in \mathbb{R},\ g_2(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.}$$

Remarque

- Le théorème fournit dans l'énoncé a deux objectifs :
  1) démontrer (sous certaines hypothèses) que la somme de deux variables aléatoires à densité Z et T est à densité,
  2) donner une expression de la densité de la somme $Z+T$ en fonction des densités de Z et T.

  Ce résultat n'est pas au programme d'ECE. Il sera donc toujours rappelé dans les énoncés qui exigent son utilisation. Ce résultat revient régulièremet dans les sujets de type HEC / ESSEC. Il est donc préférable de l'avoir déjà vu.
- La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(x)f_Z(x-y)$ est appelée produit de convolution de f_T et f_Z.
  Le théorème stipule donc que, sous certaines hypothèse, la densité d'une somme de v.a.r. est le produit de convolution des densités. □

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$,

où $\quad \mathcal{P}(n) : \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}\, x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$.

▸ **Initialisation** :
Par définition : $S_1 = \sum\limits_{j=1}^{1} Y_j = Y_1$. Donc : $S_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

Or : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{(1-1)!}\, x^{1-1}\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{0!}\, x^0\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$. Ainsi, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-1)!}\, x^{1-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vérifié.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\, x^n\mathrm{e}^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$)

- Par définition : $S_{n+1} = \sum\limits_{j=1}^{n+1} Y_j = \sum\limits_{j=1}^{n} Y_j + Y_{n+1} = S_n + Y_{n+1}$.
  Comme pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, $Y_j(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$, alors $S_{n+1}(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.

$$\boxed{S_{n+1}(\Omega) \subset \,]0, +\infty[}$$

- D'autre part, les v.a.r. S_n et Y_{n+1} :
  × sont des variables à densité. En effet, Y_{n+1} suit la loi exponentielle de paramètre 1, d'après la question ***3.b)***, et, par hypothèse de récurrence, S_n admet pour densité g_n.
  × sont indépendantes, d'après l'énoncé.
  × admettent pour densités les fonctions f et g_n.
  La fonction f est bien bornée sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-0} = 1$.
  La fonction g_n est également bornée sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant g_n(n-1)$.

- On en déduit, d'après le théorème de l'énoncé, que la v.a.r. S_{n+1} admet une densité g_{n+1} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_{n+1}(x) = f_{S_n+Y_{n+1}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_n}(y) f_{Y_{n+1}}(x-y)\ dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(y) f(x-y)\ dy$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Deux cas se présentent alors :
  × si $x \leqslant 0$. Alors $g_{n+1}(x) = 0$ car $S_{n+1}(\Omega) \subset \,]0, +\infty[$.
  × si $x > 0$. Remarquons que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$g_n(y)f(x-y) \neq 0 \ \Leftrightarrow \begin{cases} g_n(y) \neq 0 \\ f(x-y) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \,]0, +\infty[\\ x - y \in [0, +\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x - y \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ y \leqslant x \end{cases}$$

On en déduit : $g_n(y)f(x-y) \neq 0 \ \Leftrightarrow \ y \in]0,x]$. Et ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(y)f(x-y)\ dy = \int_0^x g_n(y)f(x-y)\ dy$$

car $y \mapsto g_n(y)f(x-y)$ est nulle en dehors de $]0,x]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
g_{n+1}(x) &= \int_0^x g_n(y)f(x-y)\ dy \\
&= \int_0^x \frac{1}{(n-1)!}\, y^{n-1}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{-(x-y)}\ dy \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-x}\int_0^x y^{n-1}\mathrm{e}^{-\cancel{y}+\cancel{y}}\ dy \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-x}\int_0^x y^{n-1}\ dy \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\,\mathrm{e}^{-x}\left[\frac{y^n}{n}\right]_0^x = \frac{1}{n!}\,x^n\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien : $\forall x \in \mathbb{R},\ g_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n!}\,x^n\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(n-1)!}\,x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}.}$$

Remarque

- L'objectif de cette question est encore une fois, l'application du théorème du produit de convolution. C'est pourquoi on ne détaille pas la démonstration du caractère borné de g_n.
  Il s'effectue proprement grâce à une simple étude de fonction.
  Cela donnerait la preuve suivante pour $n \geqslant 2$ (le cas $n = 1$ correspond au cas $g_1 = f$).
  - La fonction g_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Soit $x \in [0,+\infty[$.
  $$g_n'(x) = (n-1)x^{n-2}\mathrm{e}^{-x} - x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} = x^{n-2}\mathrm{e}^{-x}(n-1-x)$$
  Donc : $g_n'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant n-1$.
  - On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$n-1$		$+\infty$
Signe de $g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g_n	0	$\nearrow$	$g_n(n-1)$	$\searrow$	0

  On en déduit que g_n est bornée. Plus précisément : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant g_n(x) \leqslant g_n(n-1)$.
- Au début de la partie II, le sujet fait admettre l'indépendance entre les v.a.r. S_k et Y_{k+1} pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Néanmoins, la démontrer est tout à fait à notre portée : il suffit ici d'invoquer le lemme des coalitions appliqué aux v.a.r. X_1, ..., X_n. $\square$

c) On admet que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{S_n}$ est une variable aléatoire à densité.

Pour quelles valeurs de n, l'espérance $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ et la variance $\mathbb{V}\left(\dfrac{1}{S_n}\right)$ existent-elles ?

Calculer alors leurs valeurs respectives.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après le théorème de transfert, la v.a.r. $\dfrac{1}{S_n}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\ dx$ est absolument convergente.
- La fonction g_n est nulle en dehors de $]0, +\infty[$. Donc :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\ dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\ dx$$
Les fonctions en présence étant positives sur $]0, +\infty[$, l'absolue convergence de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\ dx$ équivaut à la convergence.
- Remarquons alors que pour tout $x > 0$:
$$\begin{array}{rcll} \dfrac{1}{x}\, g_n(x) & = & \dfrac{1}{x}\ \dfrac{1}{(n-1)!}\ x^{n-1}\ \mathrm{e}^{-x} & \\ & = & \dfrac{1}{(n-1)!}\ x^{n-2}\ \mathrm{e}^{-x} & \\ & = & \dfrac{1}{n-1}\ \dfrac{1}{(n-2)!}\ x^{n-2}\ \mathrm{e}^{-x} & \\ & = & \dfrac{1}{n-1}\ g_{n-1}(x) & \textit{(vrai si } n-1 \geqslant 1\textit{)} \end{array}$$
Ainsi, si $n - 1 \geqslant 1$, c'est à dire si $n \geqslant 2$, on reconnaît, à une constante multiplicative près, l'expression de g_{n-1} sur $]0, +\infty[$. La fonction g_{n-1} étant une densité de probabilité, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_{n-1}(x)\ dx$ est convergente et :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_{n-1}(x)\ dx \ = \ \int_{0}^{+\infty} g_{n-1}(x)\ dx$$
car g_{n-1} nulle en dehors de $]0, +\infty[$.
On ne change pas la nature d'une intégrale impropre par multiplication par un réel non nul de son intégrande.

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } n \geqslant 2,\ \dfrac{1}{S_n} \text{ admet une espérance.}}$$

- De plus :
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n}\right) & = & \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x}\, g_n(x)\ dx \ = \ \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{n-1}\, g_{n-1}(x)\ dx \\ & = & \displaystyle\frac{1}{n-1} \int_{0}^{+\infty} g_{n-1}(x)\ dx \ = \ \frac{1}{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{n-1}(x)\ dx \\ & = & \dfrac{1}{n-1} \end{array}$$
(car g_{n-1} est une densité de probabilité)

$$\boxed{\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n}\right) = \dfrac{1}{n-1}}$$

- Il reste à étudier le cas où $n = 1$.
  Commençons par rappeler : $S_1 = Y_1$ et $f_{Y_1} : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} e^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{array} \right.$.
  × Tout d'abord : $\dfrac{1}{x}\ g_1(x) = \dfrac{1}{x}\ e^{-x} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$
  × $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$
  × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ dx$ est divergente en tant qu'intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$, d'exposant $1 \not> 1$.

  Ainsi, par critère d'équivalence des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ g_1(x)\ dx$ diverge et il en est donc de même de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\ g_1(x)\ dx$.

  $$\boxed{\text{On en déduit que } \frac{1}{S_n} \text{ admet une espérance seulement si } n \geqslant 2.}$$

- On procède de même pour la variance.
  La v.a.r. $\dfrac{1}{S_n}$ admet une variance si et seulement si la v.a.r. $\left(\dfrac{1}{S_n}\right)^2 = \dfrac{1}{S_n^2}$ admet une espérance.
  D'après le théorème de transfert, la v.a.r. $\dfrac{1}{S_n^2}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ g_n(x)\ dx$ converge absolument ce qui équivaut à démontrer la convergence puisque les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et g_n sont positives.
- La fonction g_n est nulle en dehors de $]0, +\infty[$. Donc :
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ g_n(x)\ dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ g_n(x)\ dx$$
- Enfin pour tout $x > 0$:
  $$\begin{array}{rcll} \dfrac{1}{x^2}\ g_n(x) & = & \dfrac{1}{x^2}\ \dfrac{1}{(n-1)!}\ x^{n-1}\ e^{-x} & \\ & = & \dfrac{1}{(n-1)!}\ x^{n-3}\ e^{-x} & \\ & = & \dfrac{1}{(n-1)(n-2)}\ \dfrac{1}{(n-3)!}\ x^{n-3}\ e^{-x} & \\ & = & \dfrac{1}{(n-1)(n-2)}\ g_{n-2}(x) & \textit{(vrai si } n-2 \geqslant 1\textit{)} \end{array}$$

  $$\boxed{\text{Ainsi, } \mathbb{V}\left(\frac{1}{S_n}\right) \text{ existe si et seulement si } n \geqslant 3.}$$

- Soit $n \geqslant 3$. On calcule :
  $$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}\left(\dfrac{1}{S_n^2}\right) & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ g_n(x)\ dx \ = \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-1)(n-2)}\ g_{n-2}(x)\ dx \\ & = & \dfrac{1}{(n-1)(n-2)} \displaystyle\int_0^{+\infty} g_{n-2}(x)\ dx \ = \ \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int_{-\infty}^{+\infty} g_{n-2}(x)\ dx \\ & = & \dfrac{1}{(n-1)(n-2)} \qquad \textit{(car } g_{n-2} \textit{ est une densité de probabilité)} \end{array}$$

Et d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}\left(\frac{1}{S_n}\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n^2}\right) - \left(\mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right)\right)^2 \\
&= \frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2} \\
&= \frac{\cancel{n} - 1 - (\cancel{n} - 2)}{(n-1)^2(n-2)} \\
&= \frac{1}{(n-2)(n-1)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{(n-2)(n-1)^2}}$$

□

5. On note $(x_1, \dots, x_n)$ un n-uplet de $(\mathbb{R}_+^*)^n$ constituant une réalisation du n-échantillon $(X_1, \cdots, X_n)$. On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit H la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$H(\lambda) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)\right)$$

Montrer que la fonction H admet un maximum atteint en un unique point λ_0 dont on donnera la valeur.

Démonstration.

- Déterminons une expression de H.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Par propriété de la fonction ln :

$$\begin{aligned}
H(\lambda) &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(f_\lambda(x_k)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{x_k}}\, e^{-\lambda\sqrt{x_k}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln\left(\frac{\lambda}{2\,(x_k)^{\frac{1}{2}}}\right) + \ln\left(e^{-\lambda\sqrt{x_k}}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(\lambda) - \ln(2) - \frac{1}{2}\,\ln(x_k) - \lambda\sqrt{x_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(\lambda) - \sum_{k=1}^{n} \ln(2) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) - \lambda\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
&= n\ln(\lambda) - n\ln(2) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k) - \lambda\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \\
&= n\ln(\lambda) - \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\right)\lambda - n\ln(2) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)
\end{aligned}$$

- La fonction H est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de :
  $\times$ $\lambda \mapsto n\ \ln(\lambda)$ dérivable sur $]0,+\infty[$.
  $\times$ $\lambda \mapsto \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}\right)\ \lambda - n\ln(2) - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\ \ln(x_k)$ dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que fonction affine.
  (ne pas oublier que la variable est ici λ)
- Soit $\lambda > 0$.
$$H'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}$$
(par rapport à λ, le réel $-n\ln(2) - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\ \ln(x_k)$ est une constante)
On obtient alors :
$$\begin{aligned} H'(\lambda) \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{n}{\lambda} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{\lambda}{n} \leqslant \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}} \qquad \textit{(car } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ est strictement croissante sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \leqslant \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}} \end{aligned}$$
Notons $\lambda_0 = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}$.
- On obtient le tableau de variations suivant :

λ	0		λ_0		$+\infty$
Signe de $H'(\lambda)$		$+$	0	$-$	
Variations de H	$-\infty$	$\nearrow$	$H(\lambda_0)$	$\searrow$	$-\infty$

$$\boxed{\text{La fonction } H \text{ admet un unique maximum en } \lambda_0 = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}.}$$

Remarque

- Dans cette question, on dispose initialement d'un n-uplet d'observations $(x_1, \dots, x_n)$.
  Plus précisément, $(x_1, \dots, x_n)$ est une réalisation d'un n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de la v.a.r. X. La loi de X dépend d'un paramètre λ, a priori inconnu et qu'on cherche à déterminer. Pour ce faire, une idée naturelle consiste à considérer que la valeur λ qui a permis de générer les observations est celle qui avait la plus grande probabilité de les générer. C'est cette idée qui guide la méthode dite du maximum de vraisemblance, dont la question ci-dessus est une illustration. Le réel λ_0 est précisément la valeur du paramètre λ maximisant la réalisation des observations initiales.
- La méthode du maximum de vraisemblance conduit à considérer la v.a.r. construite à l'aide de ce maximum. C'est l'objet de la question suivante où l'on étudie la v.a.r. λ_n^*.
  On reviendra sur ce point dans le chapitre « Estimation ». □

6. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $\lambda_n^* = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}}$.

a) Que représente λ_0 pour λ_n^* ?

Démonstration.
Rappelons que : $\lambda_0 = \dfrac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}$ où chaque x_k est une réalisation de X_k.

$$\boxed{\text{Le réel } \lambda_0 \text{ est une réalisation de la variable aléatoire } \lambda_n^*.}$$

□

b) Déterminer une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $\mathbb{E}(a_n\ \lambda_n^*) = \lambda$. On note alors : $\hat{\lambda}_n = a_n\ \lambda_n^*$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 2$.

- On commence par exprimer λ_n^* en fonction de $Y_1, \ldots, Y_n$, puis en fonction de S_n.

$$\lambda_n^* = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}} = \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{Y_k}{\lambda}} = \frac{n\lambda}{\sum\limits_{k=1}^{n} Y_k} = \frac{n\lambda}{S_n}$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(a_n\lambda_n^*) = \lambda \quad & \Leftrightarrow \quad a_n\mathbb{E}(\lambda_n^*) = \lambda && \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
& \Leftrightarrow \quad a_n\,\mathbb{E}\left(\frac{n\lambda}{S_n}\right) = \lambda \\
& \Leftrightarrow \quad \cancel{\lambda}\, n\, a_n \mathbb{E}\left(\frac{1}{S_n}\right) = \cancel{\lambda} \\
& \Leftrightarrow \quad n\, a_n \frac{1}{n-1} = 1 && \textit{(d'après la question 4.c)} \\
& \Leftrightarrow \quad a_n = \frac{n-1}{n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{En posant : } \forall n \geqslant 2,\ a_n = \frac{n-1}{n}, \text{ alors } \mathbb{E}(a_n\lambda_n^*) = \lambda.}$$

Remarque
L'énoncé demande de déterminer a_n pour tout $n \geqslant 1$ et non $n \geqslant 2$.
Cependant, on a démontré en question *4.c)* que $\dfrac{1}{S_n}$ n'admet pas d'espérance si $n = 1$.
Donc λ_n^* n'en admet pas non plus si $n = 1$. La question n'est donc plus pertinente. □

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{V}\left(\hat{\lambda}_n\right)$.

Démonstration.
Soit $n \geqslant 3$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) &= \mathbb{V}(a_n\lambda_n^*) = (a_n)^2\mathbb{V}(\lambda_n^*) = \frac{(n-1)^2}{n^2}\mathbb{V}\left(\frac{n\lambda}{S_n}\right) = \frac{\cancel{n^2}\lambda^2(n-1)^2}{\cancel{n^2}}\mathbb{V}\left(\frac{1}{S_n}\right) \\
&= \frac{\lambda^2\cancel{(n-1)^2}}{(n-2)\cancel{(n-1)^2}} = \frac{\lambda^2}{n-2} \qquad \textit{(d'après la question 4.c)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}(\hat{\lambda}_n) = 0.}$$

□