Projecteurs

Cet exercice fait le point sur les propriétés classiques des projecteurs. Cette notion n'est pas officiellement au programme mais se retrouve régulièrement dans les énoncés d'algèbre théorique, notamment dans les sujets `HEC`.

Définition (Projecteur)

Soit E un espace vectoriel.

- Une application p est appelé un **projecteur de** E si elle vérifie :
  (1) $p \in \mathscr{L}(E)$ (p est un endomorphisme de E).
  (2) $p \circ p = p$ $(\forall x \in E,\, p(p(x)) = (p \circ p)(x) = p(x))$.
- La propriété ***(2)*** est appelée **idempotence**.
  Un projecteur est donc un endomorphisme idempotent.

Exercice

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie.

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur de p.

On suppose dans la suite : $p \neq \mathrm{id}_E$ et $p \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. ***a)*** Démontrer que les seules valeurs propres possibles de p sont 0 et 1.
b) Démontrer : $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$.

2. ***a)*** Démontrer : $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - p)$.
b) Démontrer : $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{Im}(p)$.
c) En déduire que p est diagonalisable.

3. ***a)*** Démontrer : $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) = \{0_E\}$.
b) Démontrer : $E = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(p)$.
(si A et B sont des ensembles, on note $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$)
c) En déduire que tout élément $x \in E$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$x = x_1 + x_2$$

où $x_1 \in \mathrm{Im}(p)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(p)$.

4. Dans la suite, on note : $r = \dim\big(\mathrm{Im}(p)\big)$ et $s = \dim\big(\mathrm{Ker}(p)\big)$.
On considère $\mathscr{B}_1 = (e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathscr{B}_2 = (f_1, \dots, f_s)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$.
a) Démontrer que la famille obtenue par concaténation des vecteurs de $\mathscr{B}_1$ est $\mathscr{B}_2$ est une base de E. On note $\mathscr{B}$ cette base.
b) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$.
c) Quelle est la forme de la matrice obtenue dans la question précédente ? Pourquoi était-ce prévisible ?