Projecteurs

Cet exercice fait le point sur les propriétés classiques des projecteurs. Cette notion n'est pas officiellement au programme mais se retrouve régulièrement dans les énoncés d'algèbre théorique, notamment dans les sujets `HEC`.

Définition (Projecteur)

Soit E un espace vectoriel.

- Une application p est appelé un **projecteur de** E si elle vérifie :
  (1) $p \in \mathscr{L}(E)$ (p est un endomorphisme de E).
  (2) $p \circ p = p$ ($\forall x \in E$, $p(p(x)) = (p \circ p)(x) = p(x)$).
- La propriété ***(2)*** est appelée **idempotence**.
  Un projecteur est donc un endomorphisme idempotent.

Exercice

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie.

Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur de p.

On suppose dans la suite : $p \neq \mathrm{id}_E$ et $p \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. a) Démontrer que les seules valeurs propres possibles de p sont 0 et 1.

b) Démontrer : $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$.

2. a) Démontrer : $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - p)$.

b) Démontrer : $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{Im}(p)$.

c) En déduire que p est diagonalisable.

3. a) Démontrer : $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) = \{0_E\}$.

b) Démontrer : $E = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(p)$.
(si A et B sont des ensembles, on note $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$)

c) En déduire que tout élément $x \in E$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$x = x_1 + x_2$$

où $x_1 \in \mathrm{Im}(p)$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(p)$.

4. Dans la suite, on note : $r = \dim\big(\mathrm{Im}(p)\big)$ et $s = \dim\big(\mathrm{Ker}(p)\big)$.
On considère $\mathscr{B}_1 = (e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathscr{B}_2 = (f_1, \dots, f_s)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$.

a) Démontrer que la famille obtenue par concaténation des vecteurs de $\mathscr{B}_1$ est $\mathscr{B}_2$ est une base de E. On note $\mathscr{B}$ cette base.

b) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$.

c) Quelle est la forme de la matrice obtenue dans la question précédente ? Pourquoi était-ce prévisible ?

1. a) Démontrer que les seules valeurs propres possibles de p sont 0 et 1.

Démonstration.
Par définition de p, on a : $p \circ p = p$ ou encore : $p^2 - p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
On en déduit que :

$$P(X) = X^2 - X = X(X-1)$$

est un polynôme annulateur de p.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(p) \subset \{\text{racines de } P\} = \{0, 1\}}$$ □

b) Démontrer : $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que 0 et 1 sont bien valeurs propres de p.

- Tout d'abord : 0 est valeur propre de p $\Leftrightarrow$ p est non inversible.
  On procède par l'absurde.

  Supposons que p est inversible.
  Alors, en composant par p^{-1} dans l'égalité ***(2)***, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1} \circ (p \circ p) & = & p^{-1} \circ p \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ p & = & \mathrm{id}_E \end{array}$$

  Ceci contredit l'hypothèse de l'énoncé.

$$\boxed{\text{On en déduit que 0 est valeur propre de } p.}$$

- De même : 1 est valeur propre de $p \Leftrightarrow p - \mathrm{id}_E$ est non inversible.
  On procède par l'absurde.
  Supposons que $p - \mathrm{id}_E$ est inversible.
  Remarquons que l'égalité *(2)* peut s'écrire sous la forme :
  $$p \circ (p - \mathrm{id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$$
  Alors, en composant par $(p - \mathrm{id}_E)^{-1}$ dans l'égalité, on obtient :
  $$\begin{array}{ccc} p \circ (p - \mathrm{id}_E) \circ (p - \mathrm{id}_E)^{-1} & = & 0_{\mathscr{L}(E)} \circ (p - \mathrm{id}_E)^{-1} \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ p & = & 0_{\mathscr{L}(E)} \end{array}$$
  Ceci contredit l'hypothèse de l'énoncé.
  $$\boxed{\text{On en déduit que 1 est valeur propre de } p.}$$
  □

2. a) Démontrer : $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - p)$.

Démonstration.
On procède par double inclusion.

($\supset$) Soit $y \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - p)$.
Il existe alors $x \in E$ tel que $y = (\mathrm{id}_E - p)(x) = x - p(x)$.
On a alors :
$$\begin{array}{rcll} p(y) & = & p(x - p(x)) & \\ & = & p(x) - p(p(x)) & \textit{(car } p \textit{ est linéaire)} \\ & = & p(x) - p(x) & \textit{(car } p \circ p = p\textit{)} \\ & = & 0_E & \end{array}$$
Ainsi $y \in \mathrm{Ker}(p)$.
$$\boxed{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - p) \subset \mathrm{Ker}(p)}$$

($\subset$) Soit $x \in \mathrm{Ker}(p)$.
$$\begin{array}{lrcl} \text{Alors} & p(x) & = & 0_E \\ \text{donc} & x - p(x) & = & x \\ \text{et} & (\mathrm{id}_E - p)(x) & = & x \end{array}$$
Ainsi : $x = (\mathrm{id}_E - p)(x) \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - p)$.
$$\boxed{\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - p)}$$
□

b) Démontrer : $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{Im}(p)$.

Démonstration.
On procède par double inclusion.

($\subset$) Soit $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p)$.
Alors : $(\mathrm{id}_E - p)(x) = 0_E$.
$$\begin{array}{c} (\mathrm{id}_E - p)(x) \\ \shortparallel \\ x - p(x) \end{array}$$
On en déduit : $x = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$.
$$\boxed{\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p) \subset \mathrm{Im}(p)}$$

($\supset$) Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$.
Il existe alors $x \in E$ tel que $y = p(x)$.
On a alors :
$$\begin{array}{rcll} (\mathrm{id}_E - p)(y) & = & y - p(y) & \\ & = & p(x) - p(p(x)) & \textit{(par définition de } y\textit{)} \\ & = & p(x) - p(x) & \textit{(car } p \circ p = p\textit{)} \\ & = & 0_E & \end{array}$$
Ainsi $y \in \mathrm{Ker}(id_E - p)$.
$$\boxed{\mathrm{Im}(p) \subset \mathrm{Ker}(id_E - p)}$$
□

Commentaire

La démonstration de cette question fait apparaître des arguments analogue à ceux présents dans la question précédente. En réalité, on peut se servir du résultat précédent pour démontrer cette question. Détaillons cette méthode.

- On commence par montrer :

$$\boxed{p \text{ est un projecteur } \Rightarrow \text{id}_E - p \text{ est un projecteur}}$$

Considérons un projecteur p. Alors $\text{id}_E - p \in \mathscr{L}(E)$ et :

$$\begin{array}{rcl} (\text{id}_E - p) \circ (\text{id}_E - p) & = & \text{id}_E - p - p + p \circ p \\ & = & \text{id}_E - p - \cancel{p} + \cancel{p} \\ & = & \text{id}_E - p \end{array}$$

Ainsi, $q = \text{id}_E - p$ est un projecteur de E.

- En utilisant le résultat de la question ***2.a)***, on obtient :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker}(q) & = & \text{Im}(\text{id}_E - q) & & \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ \text{Ker}(\text{id}_E - p) & & \text{Im}(\text{id}_E - (\text{id}_E - p)) & = & \text{Im}(p) \end{array}$$

Insistons par ailleurs sur l'écriture $\text{Im}(p) = \text{Ker}(\text{id}_E - p)$.

- Un élément x de $\text{Ker}(\text{id}_E - p)$ vérifie : $x = p(x)$. Ainsi :

$$\forall x \in \text{Im}(p), \ p(x) = x$$

ce qui s'écrit encore : $p_{|\text{Im}(p)} = \text{id}_{\text{Im}(p)}$ (sur l'ensemble $\text{Im}(p)$, l'application p opère comme l'application identité).

- On a : $\text{Ker}(\text{id}_E - p) = \text{Ker}(p - \text{id}_E) = E_1(p)$. En effet :

$$\begin{array}{rcl} x \in \text{Ker}(\text{id}_E - p) & \Leftrightarrow & x = p(x) \\ & \Leftrightarrow & p(x) = x \ \Leftrightarrow \ x \in \text{Ker}(p - \text{id}_E) \end{array}$$

c) En déduire que p est diagonalisable.

Démonstration.
D'après le théorème du rang :

$$\begin{array}{rcll} \dim(E) & = & \dim\big(\text{Im}(p)\big) + \dim\big(\text{Ker}(p)\big) & \\ & = & \dim\big(\text{Ker}(\text{id}_E - p)\big) + \dim\big(\text{Ker}(p)\big) & \textit{(d'après } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{)} \\ & = & \dim\big(E_1(p)\big) + \dim\big(E_0(p)\big) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } p \text{ est diagonalisable.}}$$

□

3. a) Démontrer : $\text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) = \{0_E\}$.

Démonstration.
On procède par double inclusion.

($\supset$) Tout d'abord :

× $0_E \in \text{Im}(p)$ car $\text{Im}(p)$ est un espace vectoriel.

× $0_E \in \text{Ker}(p)$ car $\text{Ker}(p)$ est un espace vectoriel.

Ainsi, $0_E \in \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p)$.

$$\boxed{\{0_E\} \subset \text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p)}$$

($\subset$) Soit $y \in \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p)$.

× $y \in \text{Im}(p)$, donc il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$ $(*)$.

× $y \in \text{Ker}(p)$, donc $p(y) = 0_E$.

En appliquant p de part et d'autre de l'égalité $(*)$:

$$\begin{array}{ccc} p(y) & = & p(p(x)) = (p \circ p)(x) = p(x) \\ \shortparallel & & \\ 0_E & & \end{array}$$

On en déduit, d'après $(*)$: $y = p(x) = 0_E$.

$$\boxed{\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(p) \subset \{0_E\}}$$

□

Commentaire

Notons que $\text{Ker}(p) = E_0(p)$ et $\text{Im}(p) = E_1(p)$. Cette question est donc une instance particulière du résultat suivant :

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \in \mathscr{L}(E) \\ \bullet\ \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont deux valeurs propres distinctes de } f \end{array}\right\} \Rightarrow E_{\lambda_1}(f) \cap E_{\lambda_2}(f) = \{0_E\}$$

- Tout d'abord : $\boxed{E_{\lambda_1}(f) \cap E_{\lambda_2}(f) \supset \{0_E\}}$ car $E_{\lambda_1}(f)$ et $E_{\lambda_2}(f)$ contiennent 0_E en tant qu'espaces vectoriels.
- D'autre part, si $x \in E_{\lambda_1}(f) \cap E_{\lambda_2}(f)$ alors :
$$f(x) = \lambda_1 \cdot x \quad \text{et} \quad f(x) = \lambda_2 \cdot x$$
On en déduit : $\lambda_1 \cdot x = \lambda_2 \cdot x$ et : $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot x = 0_E$.
Par hypothèse, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. On en déduit $x = 0_E$.
$$\boxed{E_{\lambda_1}(f) \cap E_{\lambda_2}(f) \subset \{0_E\}}$$

b) Démontrer : $E = \text{Im}(p) + \text{Ker}(p)$.

Démonstration.
On procède par **Analyse-synthèse**.

- **Analyse** : supposons $E = \text{Im}(p) + \text{Ker}(p)$.
Soit $x \in E$. Il existe alors $(x_1, x_2) \in \text{Im}(p) \times \text{Ker}(p)$ tel que :
$$x = x_1 + x_2$$
En appliquant p :
$$p(x) = \underset{x_1}{\underset{\shortparallel}{p(x_1)}} + \underset{0_E}{\underset{\shortparallel}{p(x_2)}} \quad \textit{(car } x_1 \in \text{Ker}(\text{id}_E - p) \textit{ et } x_2 \in \text{Ker}(p)\textit{)}$$
On en déduit : $x_1 = p(x)$ et $x_2 = x - x_1 = x - p(x)$.

- **Synthèse** : soit $x \in E$. Écrivons :
$$x = p(x) + (x - p(x))$$
Alors :
  × $p(x) \in \text{Im}(p)$.
  × $(x - p(x)) \in \text{Ker}(p)$.
  En effet : $p\big((x - p(x))\big) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0_E$.

$$\boxed{\text{On a bien : } E = \text{Im}(p) + \text{Ker}(p)}$$

Commentaire

- Formellement, la partie **Analyse** du raisonnement n'est pas indispensable. Elle permet simplement d'expliquer d'où provient la décomposition $x = p(x) + (x - p(x))$.
- Il faut noter que le raisonnement par analyse-synthèse n'est mentionné que dans le programme ECS. Dans un sujet ECE, il ne peut être demandé de faire seul un tel raisonnement. Comme le signale le point précédent, nous avons ici opté pour cette présentation pour expliquer d'où provient la décomposition présentée dans la partie **synthèse**.

□

c) En déduire que tout élément $x \in E$ se décompose de manière unique sous la forme :
$$x = x_1 + x_2$$
où $x_1 \in \text{Im}(p)$ et $x_2 \in \text{Ker}(p)$.

Démonstration.
Cette décomposition a déjà été présentée dans la question précédente. Il reste à démontrer l'unicité.
Soit $x \in E$. On suppose qu'il existe :
× $(x_1, x_2) \in \text{Im}(p) \times \text{Ker}(p)$ tel que : $x = x_1 + x_2$.
× $(u_1, u_2) \in \text{Im}(p) \times \text{Ker}(p)$ tel que : $x = u_1 + u_2$.

On en déduit : $x_1 + x_2 = u_1 + u_2$ ou encore :

$$\underbrace{x_1 - u_1}_{\in \mathrm{Im}(p)} \quad = \quad \underbrace{x_2 - u_2}_{\in \mathrm{Ker}(p)}$$

Ainsi :

$\times$ $x_1 - u_1 \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) = \{0_E\}$ donc $x_1 - u_1 = 0_E$ et $x_1 = u_1$.

$\times$ $x_2 - u_2 \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Ker}(p) = \{0_E\}$ donc $x_2 - u_2 = 0_E$ et $x_2 = u_2$.

> Ainsi, tout élément x se décompose bien de manière unique comme somme d'un élément de $\mathrm{Im}(p)$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}(p)$.

Commentaire

Il y a une subtilité dans le raisonnement : la deuxième décomposition envisagée n'est pas forcément supposée différente de la première. On ne raisonne pas ici par l'absurde : on considère deux décompositions (éventuellement mais pas forcément différentes) et on démontre que ce sont les mêmes. On conclut alors qu'il y a unicité de la décomposition. □

4. Dans la suite, on note : $r = \dim\big(\mathrm{Im}(p)\big)$ et $s = \dim\big(\mathrm{Ker}(p)\big)$.
On considère $\mathscr{B}_1 = (e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathscr{B}_2 = (f_1, \dots, f_s)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$.

a) Démontrer que la famille obtenue par concaténation des vecteurs de $\mathscr{B}_1$ est $\mathscr{B}_2$ est une base de E. On note $\mathscr{B}$ cette base.

Démonstration.

- La famille $\mathscr{B}_1$ est une famille libre (car c'est une base de $\mathrm{Im}(p)$) de vecteurs propres associés à la valeur propre 1.
- La famille $\mathscr{B}_2$ est une famille libre (car c'est une base de $\mathrm{Ker}(p)$) de vecteurs propres associés à la valeur propre 0.

> Ces deux valeurs propres étant différentes, la famille $\mathscr{B}$ obtenue par concaténation de ces deux familles est une famille libre.

De plus, par le théorème du rang :

$$\dim(E) \ = \ \dim\big(\mathrm{Im}(p)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(p)\big) \ = \ r + s$$

La famille $\mathscr{B}$ est :

$\times$ libre.

$\times$ telle que : $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = r + s = n = \dim(E)$.

> Ainsi, la famille $\mathscr{B}$ est une base de E.

□

b) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$.

Démonstration.

- Comme $e_1 \in \mathrm{Im}(p)$, $p(e_1) = e_1$.
  Ainsi : $e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_r + 0 \cdot f_1 + \dots + 0 \cdot f_s$.
- Comme $e_2 \in \mathrm{Im}(p)$, $p(e_2) = e_2$.
  Ainsi : $e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + \dots + 0 \cdot e_r + 0 \cdot f_1 + \dots + 0 \cdot f_s$.
- $\dots$
- Comme $e_r \in \mathrm{Im}(p)$, $p(e_r) = e_r$.
  Ainsi : $e_r = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 1 \cdot e_r + 0 \cdot f_1 + \dots + 0 \cdot f_s$.

- Comme $f_1 \in \mathrm{Ker}(p)$, $p(f_1) = 0$.
  Ainsi : $p(f_1) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_r + 0 \cdot f_1 + \dots + 0 \cdot f_s$.
- $\dots$
- Comme $f_s \in \mathrm{Ker}(p)$, $p(f_s) = 0$.
  Ainsi : $p(f_s) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_r + 0 \cdot f_1 + \dots + 0 \cdot f_s$

On obtient donc :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} p(e_1) & p(e_2) & \cdots & p(e_r) & p(f_1) & \cdots & p(f_s) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_r \\ f_1 \\ \vdots \\ f_s \end{array}$$

Commentaire

On peut aussi présenter $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$ sous forme de matrices par blocs de la manière suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,q} \\ \hline 0_{s,r} & 0_{s,s} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{array}\right)$$

Cette présentation met en exergue des propriétés déjà rencontrées :

× $p_{|\mathrm{Im}(p)} = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}(p)}$.
On retrouve ainsi le bloc I_r en haut à gauche de la matrice.

× $p_{|\mathrm{Ker}(p)} = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{Ker}(p))}$.
On retrouve ainsi le bloc $0_{s,s}$ en bas à droite de la matrice. □

c) Quelle est la forme de la matrice obtenue dans la question précédente ? Pourquoi était-ce prévisible ?

Démonstration.

La famille $\mathscr{B}$ étant une base de vecteurs propres, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$ est diagonale. □