CH I : Suites réelles - révisions, compléments

I. Notion de suite (POLY)

I.1. Définition générale

Définition
Une **suite** de nombre réels u est une **application** de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ *i.e.* une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ telle que tout élément $n \in \mathbb{N}$ possède une image par u.

$$\boxed{\begin{array}{rccc} u : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u(n) \end{array}}$$

Notation

- On utilisera la notation u_n pour représenter $u(n)$, l'image de l'application u au point n.
- Pour cet élément u_n, on préférera parler de valeur de la suite au rang n ou encore de **terme général de la suite**.
- Une telle application u sera généralement notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou tout simplement (u_n).

I.2. Comment définir une suite ?

a) **Par formule explicite** : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5n + 3$.

b) **Par formule récurrente** : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} & = & u_n + 5 \end{array}\right.$

I.3. Propriétés - vocabulaire

I.3.a) Sens de variation

Une suite est croissante si elle définit une fonction croissante.

$$(u_n) \text{ croissante} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad (m \leqslant n \Rightarrow u_m \leqslant u_n))$$

On utilise en fait la définition suivante qui tire partie des propriétés de $\mathbb{N}$.

Définition *(Sens de variation des suites)*

- Une suite (u_n) est dite **croissante** si : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n}$
- Une suite (u_n) est dite **décroissante** si : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n}$
- Dans le cas où ces inégalités sont strictes, on parlera de **croissance stricte** et de **décroissance stricte**.
- Une suite (u_n) est dite (strictement) **monotone** si elle est :
  - × soit (strictement) **croissante**,
  - × soit (strictement) **décroissante**.
- Une suite à la fois croissante et décroissante est **constante**.

$$\begin{array}{rcl} (u_n) \text{ constante} & \Leftrightarrow & \exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = a \\ & \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \\ & \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \end{array}$$

- Une suite est dite **stationnaire** si elle est constante à partir d'un certain rang. $\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n = u_{n_0})}$
- De manière générale, on dit qu'une propriété $\mathcal{P}(.)$ est vérifiée à partir d'un certain rang si : $\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow \mathcal{P}(n))}$

Exercice
Montrer que ces deux notions de croissance sont équivalentes.

Étude du sens de variation d'une suite (MÉTHODO)
Pour montrer qu'une suite est croissante, il faut démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \ \geqslant \ u_n$$

***1)* Si on connaît une formule explicite pour u_n**

a) Si u_n est donné sous forme de somme : signe de $u_{n+1} - u_n$

On remarque que :

$$u_{n+1} \ \geqslant \ u_n \ \Leftrightarrow \ u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

> **À retenir** : pour étudier la monotonie d'une suite (u_n), on peut étudier le signe de la quantité $u_{n+1} - u_n$.

Exemple
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k+2}$$

Soit $n \geqslant 1$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\ln(k)}{k+2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k+2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+3} > 0 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est (strictement) croissante.

b) Si u_n est donné sous forme de produit : comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

On remarque que :

(i) Si $u_n > 0$: $\quad u_{n+1} \ \geqslant \ u_n \ \Leftrightarrow \ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$

(ii) Si $u_n < 0$: $\quad u_{n+1} \ \geqslant \ u_n \ \Leftrightarrow \ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$

Dans le cas des suites de signe constant, on peut donc étudier la monotonie de (u_n) en formant le quotient. Plus précisément :

> **À retenir** : pour étudier la monotonie d'une suite (u_n),
> - Si (u_n) est une suite strictement positive ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$)
>
> $$(u_n) \text{ croissante } \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$
>
> $$(u_n) \text{ décroissante } \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$$
>
> - Si (u_n) est une suite strictement négative ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 0$)
>
> $$(u_n) \text{ croissante } \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$$
>
> $$(u_n) \text{ décroissante } \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$

Exemple
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \geqslant 2,\ u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Remarquons tout d'abord que : $\forall n \geqslant 2,\ u_n > 0$ (u_n est un produit de termes strictement positifs). Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)}{\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1$$

Or : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \ \Leftrightarrow \ u_{n+1} < u_n$ car $u_n > 0$.
Donc (u_n) est (strictement) décroissante.

2) Si on n'a pas de formule explicite pour u_n

a) Avec l'une des méthodes précédentes

- Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n} \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors : $u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{-u_n} > 0$.
Donc (u_n) est (strictement) croissante.

- Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n\,(1 - u_n) \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors : $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ et ainsi :

$$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$$

Donc (u_n) est décroissante.

- Considérons la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2n}{2n+1}\ u_n \end{cases}$$

On peut démontrer (récurrence) que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$. Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n}{2n+1} < 1$$

Et puisque $u_n > 0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \ \Leftrightarrow\ u_{n+1} < u_n$$

b) Par récurrence

On considère (u_n) de terme général : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + u_n^2 \end{cases}$

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \leqslant u_{n+1}$.

1) **Initialisation** :
$u_0 = 1$, $u_1 = 2$ donc $u_0 \leqslant u_1$.
Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ ($u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$).
Par hypothèse de récurrence, on a $u_n \leqslant u_{n+1}$.
Par croissance de la fonction $f : x \mapsto 1 + x^2$, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} f(u_n) & \leqslant & f(u_{n+1}) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ u_{n+1} & & u_{n+2} \end{array}$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

Exercice

Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n) définies par :

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}$.

I.3.b) Bornes d'une suite réelle

Définition *(Notion de majorant, minorant)*

- Une suite (u_n) est dite **majorée** si elle admet un majorant.

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M}$$

- Une suite (u_n) est dite **minorée** si elle admet un minorant.

$$\boxed{\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m}$$

- Une suite à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

$$\boxed{(u_n) \text{ est bornée } \Leftrightarrow \ \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N},\ m \leqslant u_n \leqslant M}$$

Remarque

- Si une suite (u_n) admet un majorant M, tout réel $R \geqslant M$ est aussi majorant de la suite puisqu'on a alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M \leqslant R$.
- Ainsi, si la suite (u_n) admet un majorant, elle en admet une infinité.
- Un majorant d'une suite (u_n) est un réel indépendant de la valeur de n.
  Par exemple, si on a (u_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant n^2$, **on ne peut pas** en conclure que (u_n) est majorée.
  (par exemple, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \leqslant n^2$ mais la suite (n) n'est pas majorée)

Exemple

Considérons la suite $\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)$.

- Elle est majorée par 2 puisque : $2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$.
- Elle est donc majorée par : 2, 2.1, e, 3, $\dfrac{7}{2}$, $\sqrt{37}$ ...
- Parmi ces majorants, il convient de distinguer « le meilleur » *i.e.* celui qui apporte le plus d'information sur la suite.
  Il s'agit ici de 2, le plus petit des majorants de la suite.

Définition *(Notion de borne supérieure, inférieure)*

- Toute suite réelle (u_n) <u>majorée</u> admet une **borne supérieure** :
  par définition, c'est le plus petit des majorants de la suite.

  On notera $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ la borne supérieure de (u_n).
- Toute suite réelle (u_n) <u>minorée</u> admet une **borne inférieure** :
  par définition, c'est le plus grand des minorants de la suite.

  On notera $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ la borne inférieure de (u_n).

Remarque

- Par définition, la borne supérieure de (u_n) (si elle existe !) est un majorant de (u_n). On est donc dans l'un des deux cas suivants :
  × soit (u_n) est majorée et, dans ce cas, elle admet une borne supérieure,
  × soit (u_n) n'est pas majorée et, dans ce cas, elle n'admet pas de borne supérieure.
- Il est à noter que la borne supérieure de (u_n) (si elle existe !) n'est pas forcément un élément de la suite.
- Par exemple, la suite (u_n) de terme générale $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ admet pour borne supérieure $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n = 2$. Et 2 n'est jamais atteint ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq 2$).
- Si le « meilleur » des majorants est atteint, on parle de maximum.

Définition *(Notion de maximum, minimum)*

- On dira qu'une suite (u_n) admet un **maximum** atteint au rang n_0 si :

$$\boxed{\exists n_0, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n_0}}$$

  Un maximum atteint au rang n_0 sera noté : $u_{n_0} = \max\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$.
- On dira qu'une suite (u_n) admet un **minimum** atteint au rang n_0 si :

$$\boxed{\exists n_0, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant u_{n_0}}$$

  Un minimum atteint au rang n_0 sera noté : $u_{n_0} = \min\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$.

Remarque

- Les notions de maximum et de borne supérieure sont différentes.
  1) Si une suite admet un maximum, alors elle admet aussi une borne supérieure qui est égale à ce maximum.
  2) Ainsi, si une suite n'admet pas de borne supérieure, elle n'admet pas non plus de maximum. *(c'est la contraposée du point précédent)*
  3) Une suite peut admettre une borne supérieure mais pas de maximum. Autrement dit, la borne supérieure d'une suite n'est pas forcément atteinte (*i.e.* n'est pas forcément un élément de la suite).
  (considérer par exemple la suite $(2 - \frac{1}{n})$)
- Les notions de borne supérieure et inférieure ne sont pas officiellement au programme de ECE. Elles sont développées ici dans le but de permettre une meilleure compréhension de la notion de majorants.

Propriété (*Caractérisation des suites bornées)*

$$\boxed{(u_n) \text{ est bornée } \Leftrightarrow \exists M \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leqslant M}$$

Autrement dit : (u_n) est bornée `ssi` la suite $(|u_n|)$ possède un majorant.

Démonstration.
On procède par double implication.

($\Rightarrow$) Si (u_n) est bornée, il existe m_1 et M_1 tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ m_1 \leqslant u_n \leqslant M_1$.
Notons $M = \max(|m_1|, |M_1|)$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leqslant M$$

($\Leftarrow$) Il suffit de remarquer que (propriété de la fonction valeur absolue) :

$$|u_n| \leqslant M \Leftrightarrow -M \leqslant u_n \leqslant M$$

□

I.3.c) Suites extraites

Définition

Soit (u_n) une suite.
Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

- La suite $(u_{\varphi(n)})$ est une **sous-suite** (ou **suite extraite**) de (u_n).

Exemple

Considérons la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

- Si on note $v_n = u_{2n}$, alors (v_n) est une suite extraite de (u_n) définie par :
  $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n = \dfrac{(-1)^{2n}}{(2n)+1} = \dfrac{1}{2n+1}$.
- Si on note $w_n = u_{2n+1}$, alors (v_n) est une suite extraite de (u_n) définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \ w_n = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)+1} = \dfrac{-1}{2n+2}$.
- La suite $(u_{n-3})_{n \geqslant 3}$ est aussi une suite extraite de (u_n).
- La suite $(u_{\ln(n)})_{n \geqslant 1}$ n'est pas une suite extraite de (u_n).

Exercice

On considère la suite (S_n) de terme général : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont des suites extraites de la suite (S_n).
Il suffit de remarquer que $\varphi : n \mapsto 2n$ et $\psi : n \mapsto 2n+1$ sont des fonctions :
  × de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,
  × strictement croissantes.

b. Déterminer le sens de variation des suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).
Notons (v_n) la suite de terme général $v_n = S_{2n}$.
Alors : $v_{n+1} - v_n = S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = \ldots$
(on agit de même pour (S_{2n+1}) ...)

II. Suites usuelles

II.1. Suites arithmétiques

Définition
Une suite (u_n) est dite **arithmétique** s'il existe un réel r (appelé raison) tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r}$$

Théorème 1. *(Caractérisation des suites arithmétiques)*

$$\boxed{\begin{array}{c} (u_n) \textit{ est une suite arithmétique} \\ \textit{de raison } r \in \mathbb{R} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + n \times r}$$

II.2. Suites géométriques

Définition
Une suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe un réel q (appelé raison) tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n}$$

Théorème 2. *(Caractérisation des suites géométriques)*

$$\boxed{\begin{array}{c} (u_n) \textit{ est une suite géométrique} \\ \textit{de raison } q \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 \times q^n}$$

Exemple
On considère les suites (u_n) et (v_n) suivantes.

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} v_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 5 \times v_n \end{array}\right.$$

- La suite (u_n) a pour formule explicite : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 5n + 3$.
- La suite (v_n) a pour formule explicite : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 3 \times 5^n$.

II.3. Suites arithmético-géométriques

II.3.a) Définition

Définition

- Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** s'il existe $a \in \mathbb{R}\setminus\{0, 1\}$ et un réel $b \neq 0$ tel que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a \times u_n + b}$
- On appelle **équation de point fixe** associée à la suite (u_n) l'équation (en la variable x) suivante : $\boxed{x = a \times x + b}$

  (si on note $f : x \mapsto a \times x + b$, cette équation se réécrit : $f(x) = x$, faisant ainsi de l'élément $x \in \mathbb{R}$ un **point fixe** *de f)*

II.3.b) Méthode d'étude

Considérons une suite arithmético-géométrique (u_n).
On va ramener l'étude de ce type de suites à l'étude des suites géométriques.

1) *Résolution de l'équation de point fixe $x = a \times x + b$*

Cette équation admet pour unique solution $\lambda = \dfrac{b}{1-a}$.

2) *Utilisation d'une suite auxiliaire (v_n) (géométrique)*

$$\begin{array}{lrclcl} \text{On écrit :} & u_{n+1} & = & a \times u_n + b & & (L_1) \\ & \lambda & = & a \times \lambda + b & & (L_2) \\ \\ \text{et donc} & u_{n+1} - \lambda & = & a \times (u_n - \lambda) & & (L_1) - (L_2) \end{array}$$

Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.
De par l'égalité précédente, on a : $v_{n+1} = a \times v_n$.

3) *Obtention de la formule explicite pour (v_n)*

La suite (v_n) est géométrique de raison a. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = a^n \times v_0$.

4) Conclusion : obtention de la formule explicite pour (u_n)

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n - \lambda \ = \ a^n \times (u_0 - \lambda)$
On obtient donc une formule explicite pour (u_n).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \ = \ a^n \times (u_0 - \lambda) + \lambda}$$

Remarque

- Le principe de la démonstration est de faire apparaître u_n comme somme d'une partie géométrique (v_n) et d'un élément (λ) : $u_n = v_n + \lambda$.
- Les suites arithmético-géométriques apparaissent ainsi comme des suites géométriques translatées de λ.
- On note que la partie géométrique dans la définition de (u_n) $(u_{n+1} = a \times u_n + \ldots)$ se retrouve dans la formule explicite $(u_n = a^n \times (u_0 - \lambda) + \ldots)$.

Exercice
Notons (u_n) la suite définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3 \times u_n + 2 \end{array} \right.$$

Donner une formule explicite de (u_n) puis calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

1) L'équation de point fixe associée à la suite (u_n) est :

$$x = 3 \times x + 2$$

Or : $x = 3 \times x + 2 \ \Leftrightarrow \ 2 \times x = -2$.
Cette équation a donc pour unique solution : $\lambda = -1$.

2) On écrit alors :

$$\begin{array}{rcccccl} u_{n+1} & = & 3 & \times & u_n & + & 2 \qquad (L_1) \\ \lambda & = & 3 & \times & \lambda & + & 2 \qquad (L_2) \end{array}$$

$$\text{et donc} \quad u_{n+1} - \lambda \ = \ 3 \ \times \ (u_n - \lambda) \qquad (L_1) - (L_2)$$

Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.

3) D'après le point *2)*, la suite (v_n) est géométrique de raison 3.
On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times 3^n = (u_0 - \lambda)\ 3^n = (0 - (-1))\ 3^n = 3^n$$

4) Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \ = \ v_n + \lambda \ = \ 3^n - 1$.

On peut alors déterminer $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

$$\begin{array}{rcl} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k & = & \sum\limits_{k=0}^{n} (3^k - 1) \\ & = & \sum\limits_{k=0}^{n} 3^k - \sum\limits_{k=0}^{n} 1 \\ & = & \dfrac{1 - 3^{n+1}}{1 - 3} - (n+1) \\ & = & \frac{1}{2}\ (3^{n+1} - 1) - n - 1 \\ & = & \frac{1}{2} \times 3^{n+1} - n - \frac{3}{2} \end{array}$$

II.4. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

II.4.a) Définition

Définition

- Une suite (u_n) est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe deux réels (non nuls) a et b tels que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} \ = \ a \times u_{n+1} + b \times u_n}$$

- On appelle **équation caractéristique** associée à la suite (u_n) l'équation (en la variable x) $x^2 = ax + b$. On peut la réécrire :

$$\boxed{x^2 - ax - b = 0}$$

II.4.b) Méthode d'étude

Cette méthode est basée sur le calcul des racines de l'équation caractéristique. On a ainsi trois cas différents, en fonction du discriminant Δ du polynôme caractéristique.

Théorème 3.
Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
Il existe donc $a \neq 0$ et $b \neq 0$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

1) *Si $\Delta = a^2 + 4b > 0$*

Alors le polynôme admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.
La formule explicite de (u_n) est donnée par :

$$\boxed{u_n = \lambda \times r_1^n + \mu \times r_2^n}$$

où les réels λ et μ sont donnés par

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & + & \mu & = & u_0 \\ \lambda \times r_1 & + & \mu \times r_2 & = & u_1 \end{array}\right.$$

2) *Si $\Delta = a^2 + 4b = 0$*

Alors le polynôme admet une racine double r.
La formule explicite de (u_n) est donnée par :

$$\boxed{u_n = \lambda \times r^n + \mu \times n \times r^n}$$

où les réels λ et μ sont donnés par

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda & & & = & u_0 \\ \lambda r & + & \mu \times r & = & u_1 \end{array}\right.$$

3) *Si $\Delta = a^2 + 4b < 0$*

Alors le polynôme n'admet pas de racine réelle.
Une formule explicite pour la suite (u_n) <u>existe bien</u> mais ne sera pas donnée ici (Hors Programme).

Démonstration.
Hors programme et donc non développée ici. □

Exercice
On considère la suite donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 2 \\ u_1 & = & 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} & = & -2u_{n+1} + 3u_n \end{array}\right.$$

Donner une formule explicite de cette suite.

- L'équation caractéristique associée à la suite (u_n) est : $x^2 = -2x + 3$.
  Notons P le polynôme : $P(X) = X^2 + 2X - 3 = (X - 1)(X + 3)$.
  (Le polynôme P admet pour racine évidente $r_1 = 1$.
  On en déduit la deuxième racine de P : $r_2 = -3$.)
- On en déduit la formule explicite de (u_n) :

$$\begin{array}{rcl} \forall n \in \mathbb{N},\ u_n & = & \lambda \times {r_1}^n + \mu \times {r_2}^n \\ & = & \lambda \times (1)^n + \mu \times (-3)^n \\ & = & \lambda + \mu \times (-3)^n \end{array}$$

  où les valeurs λ et μ sont données par le système :

$$(S) \left\{\begin{array}{cccccl} 2 & = & \lambda & + & \mu & \textit{(valeur en } n = 0\textit{)} \\ 0 & = & \lambda & - & 3\ \mu & \textit{(valeur en } n = 1\textit{)} \end{array}\right.$$

  Résolvons-le.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{cccl} 2 & = & & 4\ \mu \quad (L_1) - (L_2) \\ 6 & = & 4\ \lambda & \quad 3 \times (L_1) + (L_2) \end{array}\right.$$

- Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-3)^n$$

III. Notions de convergence, divergence

III.1. Suites réelles convergentes

Définition *Suites réelles convergentes*

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ un nombre réel (fini).

- On dit que la sute (u_n) **converge vers** ℓ (ou admet la limite ℓ / ou tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$) si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux.
  (c'est la définition donnée par le programme officiel)
- Cette propriété peut s'écrire à l'aide de quantificateurs.
  La suite (u_n) converge vers ℓ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)}$$

  ou encore *(avec l'abus de notation « $\forall n \geqslant n_0$ »)* :

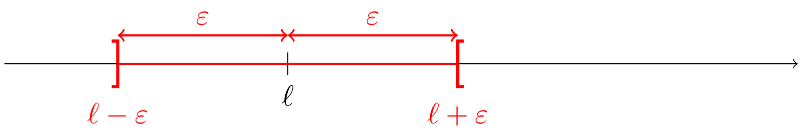
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon}$$

- Cette propriété signifie que :
  « quelle que soit la précision ε (> 0) choisie, on peut trouver un rang à partir duquel les éléments de la suite ne s'écartent pas de ℓ de plus de ε »
- Lorsque (u_n) converge vers ℓ, on note :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

Représentation graphique

Si la suite (u_n) converge vers ℓ, il existe un rang à partir duquel tous ses termes sont dans l'intervalle rouge (et ce quel que soit la largeur fixée auparavant de cet intervalle) :



III.2. Suites réelles divergentes

Définition *Suites réelles divergentes*

- Une suite réelle (u_n) est dite **divergente** si elle n'est pas convergente.
- Autrement dit, (u_n) est divergente s'il n'existe pas d'éléments $\ell \in \mathbb{R}$ tel que (u_n) converge vers ℓ.

III.3. Cas des limites infinies

Définition *Suite divergeant vers l'infini*

Soit (u_n) une suite de réels.

- On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si :

$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n > A)}$$

  Ce que l'on peut écrire, avec l'abus de notation habituel :

$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n > A}$$

  Ceci signifie que les termes de la suite deviennent, à partir d'un certain rang, aussi grands que souhaités.
- Lorsque (u_n) diverge vers $+\infty$, on utilise les notations suivantes :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

- On dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$ si :

$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n < -A)}$$

  Ce que l'on peut écrire, avec l'abus de notation habituel :

$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n < -A}$$

Remarque

- Une suite (u_n) qui tend vers $+\infty$ est une suite **divergente**. La notion de convergence est réservée aux suites admettant une limite **finie**.
- Il n'est pas nécessaire, dans la définition de suite divergente, de supposer $A > 0$. Plus précisément, on a :

$$\boxed{u_n \to +\infty \ \Leftrightarrow\ \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n > A}$$

$$\boxed{u_n \to -\infty \ \Leftrightarrow\ \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n < A}$$

- Qu'elle soit finie ou non, il y a unicité de la limite.

Théorème 4. *Propriété d'unicité de la limite*

Soit (u_n) une suite réelle.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}} \\ u_n \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}} \end{array}\right\} \Rightarrow\ \ell_1 = \ell_2}$$

III.4. Quelques propriétés issues des définitions

Propriété *des suites convergentes*

Soit (u_n) une suite réelle.

1) $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ell \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow\ (u_n - \ell) \text{ converge vers } 0}$

2) $\boxed{(u_n) \text{ convergente } \ \Rightarrow\ (u_n) \text{ bornée}}$

3) $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0 \ \Leftrightarrow\ (|u_n|) \text{ converge vers } 0}$

4) Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

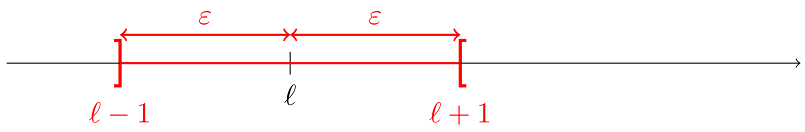
$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ u_{\varphi(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

Ainsi, si (u_n) est convergente de limite ℓ, alors il en est de même de toutes ses suites extraites.

Démonstration.

On ne démontre ici que la propriété *2)*. On pourra se reporter au cours de première année pour les autres démonstrations.

2) Soit (u_n) une suite convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Choisissons une précision $\varepsilon = 1$.
Par définition de la convergence, on sait qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$: $|u_n - \ell| < 1$. Autrement dit : $\forall n \geqslant n_0,\ \ell - 1 < u_n < \ell + 1$.



La suite (u_n) est donc bornée à partir d'un certain rang (n_0 en l'occurrence). Il reste à montrer qu'elle est bornée tout court.
Pour ce faire, considérons les éléments de la suite précédant le rang n_0 :

$$u_0,\ u_1,\ \ldots,\ u_{n_0 - 1}$$

Ces éléments sont en nombre fini et possèdent donc :
- × un minimum : $a = \min\{u_n \mid n \in [\![0, n_0 - 1]\!]\}$,
- × et un maximum $A = \max\{u_n \mid n \in [\![0, n_0 - 1]\!]\}$.

Si on note $m = \min(a, \ell - 1)$ et $M = \max(A, \ell + 1)$, on a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ m \ \leqslant\ u_n \ \leqslant\ M$$

□

Remarque

- Ce résultat n'est pas une équivalence. Une suite bornée n'est pas forcément convergente. *Considérer par exemple la suite* $((-1)^n)$
Par contre, par contraposée, une suite non bornée ne peut converger.
- La propriété *3)* fournit un critère de divergence :
  - × si (u_n) admet une sous-suite divergente, alors (u_n) diverge.
  - × si (u_n) admet deux sous-suites tendant vers deux limites distinctes, alors (u_n) diverge.

  On peut en déduire que la suite $((-1)^n)$ est divergente.

Exercice *(propriété de recouvrement)*
Soit (u_n) une suite telle que :

× $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$,

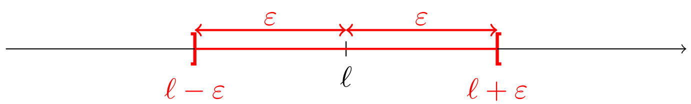
× $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration.

Démonstration formelle « avec les ε »
Soit $\varepsilon > 0$.

- On sait que : $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
  Ainsi, il existe un rang n_1 à partir duquel : $|u_{2n} - \ell| \ < \ \varepsilon$.
  (ceci signifie qu'à partir du rang n_1, tous les éléments de (u_{2n}) sont dans l'intervalle rouge)



- On sait que : $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
  Ainsi, il existe un rang n_2 à partir duquel : $|u_{2n+1} - \ell| \ < \ \varepsilon$.
  (ceci signifie qu'à partir du rang n_2, tous les éléments de (u_{2n+1}) sont dans l'intervalle rouge)

Noton $N = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$. Ces deux inégalités permettent d'affirmer que :

$$\forall n \geqslant N, \ |u_n - \ell| \ \leqslant \ \varepsilon$$

(ceci signifie qu'à partir du rang N, tous les éléments de (u_n) sont dans l'intervalle rouge)

Ainsi (u_n) est convergente de limite ℓ.

Le programme officiel précise « [qu'] aucune démonstration concernant les résultats [du chapitre convergence] n'est exigible ».

- Ce type de démonstration, dite « avec les ε », est de ce fait considéré comme très technique.
- Dans une copie de concours, on attend plutôt un raisonnement comme celui qui suit.

Démonstration formelle « sans les ε »
Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.

- Comme $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_{2n}) (*i.e.* tous les termes d'indice pair de la suite (u_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.
- Comme $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_{2n+1}) (*i.e.* tous les termes d'indice impair de la suite (u_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.

On en déduit que l'intervalle I contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux. □

Remarque

- La propriété *3)* et la propriété de recouvrement (que l'on peut voir comme une sorte de réciproque) restent vraies pour des limites infinies. La démonstration est similaire.
- Ce résultat n'est pas dans le programme officiel de la ECE. Il faut savoir le démontrer si on souhaite l'utiliser. On ne pourra donc pas, dans une copie, rédiger comme suit « par la propriété de recouvrement ».

Propriété *des suites divergeant vers l'infini*

Soit (u_n) une suite réelle.

1) $\boxed{(u_n \to -\infty) \Leftrightarrow (-u_n \to +\infty)}$

2) Si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.
(réciproque fausse ! Considérer $((-1)^n n)$)

3) Si (u_n) diverge vers $+\infty$ (réciproquement $-\infty$) alors elle est positive (réciproquement négative) à partir d'un certain rang.

$$\boxed{u_n \to +\infty \ \Rightarrow \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \ u_n \geqslant 0}$$

$$\boxed{u_n \to -\infty \ \Rightarrow \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \ u_n \leqslant 0}$$

IV. Compatibilité avec la relation d'ordre

IV.1. Démontrer des inégalités pour les suites convergentes

Théorème 5. *(« Passage à la limite » dans les inégalités)*

Soit (u_n) une suite convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

a) *S'il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \geqslant a$ alors on a : $\ell \geqslant a$.*

b) *S'il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \leqslant b$ alors on a : $\ell \leqslant b$.*

c) *S'il existe un rang n_0 à partir duquel $a \leqslant u_n \leqslant b$ alors on a : $a \leqslant \ell \leqslant b$.*

On peut résumer ces propriétés comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell \\ u_n \geqslant a \end{array}\right\} \Rightarrow \ \ell \geqslant a} \qquad \boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell \\ u_n \leqslant b \end{array}\right\} \Rightarrow \ \ell \leqslant b}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell \\ a \leqslant u_n \leqslant b \end{array}\right\} \Rightarrow \ a \leqslant \ell \leqslant b}$$

Remarque

- On parle parfois de « passage à la limite » dans les inégalités. On rappelle que ce passage n'est possible que si on a prouvé au préalable que la suite (u_n) est convergente.
- En particulier, il ne faut pas confondre ce résultat avec le théorème d'encadrement présenté plus loin.
- Il est facile d'écrire un énoncé similaire avec des inégalités strictes.
En effet, comme : $u_n > a \ \Rightarrow \ u_n \geqslant a$ (inégalité stricte implique large) :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell \\ u_n > a \end{array}\right\} \Rightarrow \ \ell \geqslant a} \qquad \boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell \\ u_n < b \end{array}\right\} \Rightarrow \ \ell \leqslant b}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell \\ a < u_n < b \end{array}\right\} \Rightarrow \ a \leqslant \ell \leqslant b}$$

- Par exemple, par passage à la limite, on obtient le résultat suivant :

$$\frac{1}{n} > 0 \ \Rightarrow \ 0 \geqslant 0$$

- Si l'on sait que la suite (u_n) est convergente de limite $\ell \in \mathbb{R}$, le résultat peut se résumer comme suit :

$$(\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in I) \ \Rightarrow \ \ell \in \overline{I}$$

où I est un intervalle et $\overline{I}$ est l'adhérence de I (intervalle I auquel on a ajouté ses bornes finies). Par exemple :

  × $(\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in]-3, 2[) \ \Rightarrow \ \ell \in [-3, 2]$

  × $(\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in]0, 2]) \ \Rightarrow \ \ell \in [0, 2]$

  × $(\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in]0, +\infty[) \ \Rightarrow \ \ell \in [0, +\infty[$

Théorème 6. *(Théorème de comparaison des limites)*

Soit (u_n) une suite convergente, de limite $\ell_1 \in \mathbb{R}$.

Soit (v_n) une suite convergente, de limite $\ell_2 \in \mathbb{R}$.

Supposons de plus que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$.

On a alors : $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

On peut résumer cette propriété comme suit.

$$\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell_1 \\ v_n \to \ell_2 \\ u_n \leqslant v_n \end{array}\right\} \Rightarrow \ \ell_1 \leqslant \ell_2 \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} u_n \to \ell_1 \\ v_n \to \ell_2 \\ u_n > v_n \end{array}\right\} \Rightarrow \ \ell_1 \geqslant \ell_2$$

(la remarque sur les inégalités strictes s'applique ici aussi)

Remarque

Les suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, on peut encore parler de « passage à la limite » dans les inégalités.

Exercice

a. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Cette propriété est-elle vraie pour $n = 0$?

Démontrons par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $\dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$

1) **Initialisation** :

- D'une part : $1! = 1$.
- D'autre part : $2^{1-1} = 2^0 = 1$.

D'où : $\dfrac{1}{1!} \leqslant \dfrac{1}{2^{1-1}}$ et $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** : soit $n \geqslant 1$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence : $\dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

On en déduit que : $\dfrac{1}{n!}\ \dfrac{1}{(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}\ \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$

En effet : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ car $n+1 \geqslant 2$. Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

Enfin, la propriété est vraie pour $n = 1$ puisque $1! = 1$ et $2^{1-1} = 2^0 = 1$.

b. Démontrer que la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ converge vers un réel $S \in\ ]2, 3]$.

- Soit $n \geqslant 0$. $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$.

  Ainsi, la suite (S_n) est croissante.

- D'après la question précédente, pour tout $k \geqslant 1$, $\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$.

  On en déduit par sommation que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

  Et ainsi, $S_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3$.

- La suite (S_n) est croissante et majorée par 3 donc convergente vers un réel S tel que $S \leqslant 3$.
- Enfin, si $n \geqslant 3$: $S_n = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{n!} = \frac{5}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{n!} > \frac{5}{2}$.

  On en déduit, par passage à la limite, que : $S \geqslant \dfrac{5}{2} > 2$.

IV.2. Démontrer de la convergence

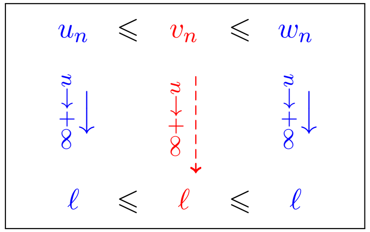
Théorème 7. *(Théorème d'encadrement)*

Soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites réelles telles que :

- *(u_n) est convergente, de limite ℓ.*
- *(w_n) est convergente, de même limite ℓ.*
- *Il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.*

Alors la suite (v_n) est convergente de limite ℓ.

On peut résumer ce théorème comme suit.

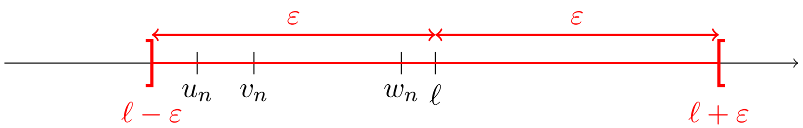


Démonstration.
Considérons un intervalle ouvert contenant ℓ.

- Tous les termes de (u_n) (sauf un nombre fini) sont dans cet intervalle.
- Tous les termes de (w_n) (sauf un nombre fini) sont dans cet intervalle.
- Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

On en conclut que tous les termes de (v_n) (sauf un nombre fini) sont dans cet intervalle.

On peut rédiger cette démonstration « avec les ε » en s'appuyant sur la représentation graphique ci-dessous :



□

Remarque

- Dans cet énoncé, on ne suppose pas (v_n) convergente mais on le **démontre**.
- Ainsi, rédiger en argumentant par « un passage à la limite » serait une erreur logique (et donc sanctionnée comme telle). On ne peut « passer à la limite » que si l'on sait que la suite est convergente.
- Ce théorème est aussi appelé « théorème des gendarmes ».
L'idée est la suivante : deux gendarmes viennent d'attraper un voleur et l'encadrent en lui saisissant chacun un bras. Les gendarmes convergent (*i.e.* se dirigent) vers le poste de police. Ainsi encadré, le voleur n'a d'autre choix que se diriger lui aussi vers le poste de police.

  Dans une copie de concours, on préférera la terminologie « théorème d'encadrement ».

Exercice *(appliquer le théorème d'encadrement)*

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n^2} \leqslant \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2n}$.

- Rappelons que pour $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, on a : $a \leqslant b \ \Leftrightarrow\ a^2 \leqslant b^2$. D'où :

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} \leqslant 1 + \frac{1}{2n} \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{n} \ \leqslant\ 1 + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}n} + \frac{1}{4n^2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \ \leqslant\ \frac{1}{4n^2}$$

  Ainsi, l'inégalité de droite est vérifiée.

- De même, on a :

$$\begin{aligned} & & 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} & \leqslant \sqrt{1+\frac{1}{n}} \\ \Leftrightarrow & & \left(1+\frac{1}{2n}\right)^2 - \frac{2}{n^2}\left(1+\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{n^4} & \leqslant 1 + \frac{1}{n} \\ \Leftrightarrow & & 1 + \frac{1}{n} - \frac{7}{4n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} & \leqslant 1 + \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^4} \ \leqslant\ \frac{7}{4n^2} + \frac{1}{n^3} \end{aligned}$$

  Enfin, on a : $\dfrac{1}{n^4} \leqslant \dfrac{7}{4n^2} + \dfrac{1}{n^3} \ \Leftrightarrow\ 1 \leqslant \dfrac{7}{4}n^2 + n$.
  Cette dernière égalité est vérifiée car $n \geqslant 1$.
  Ainsi, l'inégalité initiale est aussi vérifiée.

b) En déduire un équivalent simple de $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$.

En divisant par $1+\frac{1}{2n}$ (>0) de part et d'autre de l'inégalité ***a)***, on obtient :

$$\frac{1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{2n}} \leqslant \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{2n}} \leqslant \frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{2n}}$$

Ainsi : $1-\dfrac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{2n}} \leqslant \dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{2n}} \leqslant 1$. Or :

× $1-\dfrac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{2n}} = 1-\dfrac{1}{n^2+\frac{n}{2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,

× $1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que la suite $\left(\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{2n}}\right)$ est convergente, de limite 1. Ainsi : $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1+\dfrac{1}{2n}$.

c) Déduire de ***a)*** la limite de la suite $\left(\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}-n\right)$.

En multipliant l'inégalité ***a)*** par n (>0), on obtient :

$$n+\frac{1}{2}-\frac{1}{n} \leqslant \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} \leqslant n+\frac{1}{2}$$

D'où, en retirant n de chaque côté :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{n} \leqslant \sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n \leqslant \frac{1}{2}$$

On remarque alors que :

× $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$,

× $\dfrac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que la suite $\left(\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}-n\right)$ est convergente, de limite $\dfrac{1}{2}$.

IV.3. Démontrer de la divergence vers l'infini

Théorème 8.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$$

a) *Si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$.*
On peut résumer cette propriété comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \leqslant v_n \\ u_n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad v_n \to +\infty}$$

b) *Si $v_n \to -\infty$, alors $u_n \to -\infty$.*
On peut résumer cette propriété comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \leqslant v_n \\ v_n \to -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_n \to -\infty}$$

V. Les théorèmes de monotonie

V.1. Théorème de convergence monotone

Théorème 9. *(Croissance et majoration)*
Soit $M \in \mathbb{R}$.

1)
$$\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ croissante} \\ (u_n) \text{ majorée par } M\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}(u_n) \text{ converge vers une} \\ \text{limite finie } \ell \leqslant M\end{array}$$

2)
$$\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ croissante} \\ (u_n) \text{ non majorée}\end{array}\right\} \Rightarrow u_n \to +\infty$$

Démonstration.

1) Il s'agit de démontrer que : (u_n) converge vers sa borne supérieure.

- Par hypothèse, la suite (u_n) est majorée. Elle admet donc une infinité de majorants. On s'intéresse au meilleur de ces majorants *i.e.* au plus petit, qui est appelé borne supérieure de la suite (u_n). Notons $\ell = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$.
  (en réalité, il faudrait faire la démonstration qu'un tel « meilleur des majorants » existe bien mais on laisse de côté cette difficulté)
- Soit $\varepsilon > 0$.
  Comme ℓ est le meilleur des majorants, $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de la suite (u_n). On en déduit que la propriété :
  $$\texttt{NON}(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell - \varepsilon)$$
  est vérifiée ce qui signifie qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell - \varepsilon$.
  La suite (u_n) étant croissante, on en déduit que :
  $$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant u_{n_0} > \ell - \varepsilon \tag{1}$$
- D'autre part, ℓ étant un majorant de (u_n) :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell < \ell + \varepsilon \tag{2}$$
- Il n'y a plus qu'à regrouper les deux inégalités (1) et (2).
  On obtient que, pour tout $n \geqslant n_0$:
  $$\ell - \varepsilon \ < \ u_n \ < \ \ell + \varepsilon$$
  ce qui signifie : $-\varepsilon \ < \ u_n - \ell \ < \ \varepsilon$.
  En résumé :
  $$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| \ < \ \varepsilon$$
  ce qui achève la démonstration.

2) Supposons que (u_n) est croissante et non majorée.

- La suite (u_n) n'ayant pas de majorant, c'est que la propriété :
  $$\texttt{NON}(\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant M)$$
  est vérifiée. Autrement dit :
  $$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ u_n > M \tag{3}$$
- Soit $A > 0$.
  On déduit de la propriété (3) qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $u_{n_0} > A$.
  La suite (u_n) étant croissante, on en déduit que :
  $$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant u_{n_0} > A$$
  ce qui achève la démonstration. □

Remarque

- La démonstration du théorème de convergence monotone est hors programme en ECE. Elle est donnée ici simplement pour le plaisir du lecteur.
- On a mis en évidence lors de la démonstration que la suite (u_n) (croissante et majorée) convergeait vers sa borne supérieure. Cela semble assez naturel : la suite croît jusqu'à atteindre (seulement asymptotiquement parlant !) le plus petit de ses majorants. On en conclut alors :
  $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$$

- La notion de borne supérieure / inférieure n'étant pas au programme de la section ECE, une telle propriété ne peut être utilisée directement. On peut cependant avoir à la démontrer dans un énoncé.

Propriété
Soit (u_n) une suite de réels. Alors on a :

$$\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ croissante} \\ u_n \to \ell\end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$$

Démonstration.

- On suppose par l'absurde que :
  - × la suite (u_n) croissante,
  - × la suite (u_n) convergente vers ℓ,
  - × et que `NON`$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell)$ est vérifiée.
    Autrement dit, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell$.
- La suite (u_n) étant croissante, on a :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant u_{n_0}$$

  Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant u_{n_0}$.
- En combinant avec l'inégalité de l'hypothèse, on a alors : $\ell \geqslant u_{n_0} > \ell$.

Ce qui est absurde ! □

Théorème 10. *(Décroissance et minoration)*
Soit $m \in \mathbb{R}$.

1)

$$\left.\begin{array}{l}(u_n) \textit{ décroissante} \\ (u_n) \textit{ minorée par } m\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}(u_n) \textit{ converge vers une} \\ \textit{limite finie } \ell \geqslant m\end{array}$$

2)

$$\left.\begin{array}{l}(u_n) \textit{ décroissante} \\ (u_n) \textit{ non minorée}\end{array}\right\} \Rightarrow u_n \to +\infty$$

Démonstration.

1)
- Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite (v_n) de terme général $v_n = -u_n$. En effet :
  - × (u_n) décroissante $\Leftrightarrow$ $(-u_n)$ croissante,
  - × (u_n) minorée $\Leftrightarrow$ $(-u_n)$ majorée.
- Ainsi, si l'on suppose (u_n) décroissante et minorée par m, on obtient que (v_n) est croissante et majorée par $-m$ *($u_n \geqslant m \ \Leftrightarrow\ -u_n \leqslant -n$)*.
- D'après le théorème précédent, la suite (v_n) est donc convergente ver une limite finie ℓ_1 telle que : $\ell_1 \leqslant -m$.
- Et donc (u_n) est convergente de limite $\ell = -\ell_1$ et cette limite vérifie :

$$\ell = -\ell_1 \geqslant m$$

2) Pour procéder comme précédemment, il suffit de remarquer que comme :

$$(u_n) \text{ minorée } \Leftrightarrow\ (v_n) \text{ majorée}$$

on a :

$$\texttt{NON}((u_n) \text{ minorée}) \ \Leftrightarrow\ \texttt{NON}((v_n) \text{ majorée})$$

□

V.2. Suites adjacentes

Définition

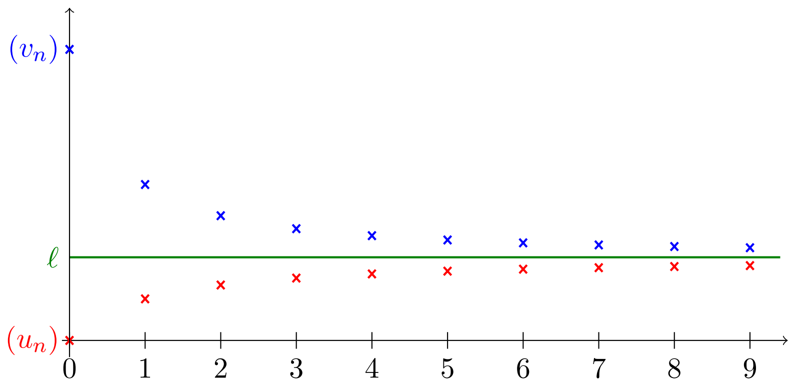
Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si :

1) (u_n) est croissante,

2) (v_n) est décroissante,

3) $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Représentation graphique



Théorème 11.

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles sont convergentes et admettent la même limite.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{1) } (u_n) \textit{ est croissante,} \\ \textit{2) } (v_n) \textit{ est décroissante,} \\ \textit{3) } u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (u_n) \textit{ et } (v_n) \textit{ sont convergentes} \\ \textit{et admettent la même limite} \end{array}$$

Ne pas confondre définition (l'une croissante, l'autre décroissante et l'écart tend vers 0) et le résultat (convergentes de même limite).

Démonstration.

Il s'agit essentiellement de démontrer que la représentation graphique précédente est correcte.

a) La suite $(v_n - u_n)$ est décroissante

Soit $n \in \mathbb{N}$. $(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = \underbrace{v_{n+1} - v_n}_{\leqslant 0} + \underbrace{u_n - u_{n+1}}_{\leqslant 0} \leqslant 0$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n$

Par hypothèse, $(v_n - u_n)$ est convergente.

Par théorème, elle est donc bornée.

Cette suite étant décroissante et minorée, le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n - u_n \ \geqslant\ \inf_{n\in\mathbb{N}} (v_n - u_n) = 0$$

(comme précisé dans la remarque suivant le théorème de convergence monotone, il faudrait faire cette démonstration par l'absurde)

c) La suite (u_n) est majorée et la suite (v_n) est minorée

On peut maintenant démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_0$.

- En effet, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leqslant v_0$ puisque (v_n) est décroissante.
- Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.

De manière analogue, on démontre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leqslant v_n$.

d) Les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite

- (u_n) est croissante et majorée (par v_0) donc convergente vers $\ell_1 \in \mathbb{R}$.
- (v_n) est décroissante et minorée (par u_0) donc convergente vers $\ell_2 \in \mathbb{R}$.

Ainsi, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell_1 - \ell_2$.

(la première égalité est seulement vérifiée pour des suites convergentes)

Or par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

On en conclut que : $\ell_1 = \ell_2$. □

Exercice

On considère la suite (S_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a) Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

b) En déduire que la suite (S_n) converge.

Démonstration.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- La suite (S_{2n}) est croissante. En effet :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \ \geqslant\ 0 \end{aligned}$$

- La suite (S_{2n-1}) est décroissante. En effet :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)-1} - S_{2n-1} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} \ \leqslant\ 0 \end{aligned}$$

- $S_{2n} - S_{2n-1} = \dfrac{(-1)^{2n}}{2n} = \dfrac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Ainsi, les suites (S_{2n}) et (S_{2n-1}) sont adjacentes.
Elles sont donc convergentes vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

b) Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.

- Comme $S_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes d'indice pair de la suite (S_n) sauf un nombre fini d'entre eux.
- Comme $S_{2n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, l'intervalle I contient tous les termes d'indice impair de la suite (S_n) sauf un nombre fini d'entre eux.

Ainsi, I contient tous les termes de (S_n) sauf un nombre fini d'entre eux.
Ceci démontre que la suite (S_n) est convergente de limite ℓ. □

Prenons un peu de recul `(CULTURE)`

Cet exercice est une illustration d'un résultat (classique en maths sup) nommé le critère des séries alternées.

- Une série $\sum u_n$ est dite alternée si $(-1)^n\ u_n$ est de signe constant.
  C'est une manière formelle de dire que tous les termes d'indice pair de la suite (u_n) sont positifs et que tous les termes d'indice impair de la suite (u_n) sont négatifs. Ou l'inverse.

  C'est bien le cas dans l'exercice. On considère en effet la série $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.
  On remarque en effet que :

  $$\frac{(-1)^{n+1}}{n} \leqslant 0 \quad \text{pour tout entier } n \text{ pair}$$

  $$\frac{(-1)^{n+1}}{n} \geqslant 0 \quad \text{pour tout entier } n \text{ impair}$$

- Le critère des séries alternées s'énonce comme suit.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{1)}\ \text{La série } \sum u_n \text{ est alternée} \\ \textit{2)}\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}| \ \leqslant\ |u_n| \\ \textit{3)}\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{La série } \sum u_n \text{ est} \\ \text{convergente} \end{array}$$

  La démonstration (qui consiste à démontrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes) est laissée au lecteur. Il ne s'agit que d'une généralisation de la démonstration faite dans l'exercice.

VI. Suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

On s'intéresse ici à des suites définies par des relations de récurrence :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction.
L'étude de telles suites se fait généralement en commençant par l'étude des propriétés de la fonction f puis en en déduisant des propriétés de la suite (u_n). On dresse ici un catalogue de ces propriétés.

Avant tout, commençons par donner un exemple d'une telle suite.

VI.0. Un premier exemple

On considère la fonction f définie, pour tout réel $x \in [0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

Commençons par étudier la fonction f.

- La fonciton f est dérivable sur $[0, +\infty[$ car est le quotient de :
  - × $x \mapsto x$ dérivable sur $[0, +\infty[$ car polyomiale.
  - × $x \mapsto (x+1)^2$ dérivable sur $[0, +\infty[$ car polyomiale et qui `NE S'ANNULE PAS` sur $[0, +\infty[$.

  Soit $x \in [0, +\infty[$.

  $$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 2\,x\,(1+x)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1) - 2\,x}{(x+1)^3} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$$

  Comme $(x+1)^3 \geqslant 0$ (on rappelle qu'on a supposé $x \geqslant 0$) le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.

- On en déduit le tableau de variations de la fonction f.

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

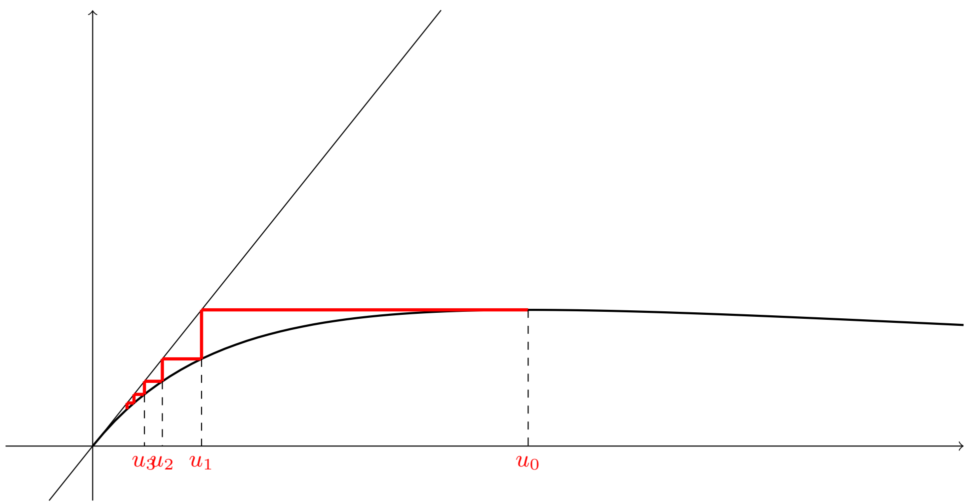
La limite de f en $+\infty$ est obtenue en remarquant que :

$$f(x) = \frac{1-x}{(1+x)^3} = \frac{1-x}{1+3x+3x^2+x^3} = \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{x^3} = -\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On considère la suite :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$$

Représentation graphique



Observations issues de la représentation graphique

- Les éléments de la suite (u_n) semblent tous se retrouver dans $[0,1]$.
- La suite (u_n) semble décroissante.
- La suite (u_n) semble converger vers 0.

Toutes ces propriétés sur la suite (u_n) peuvent se déduire de propriétés de la fonction f. Listons toutes ces propriétés.

VI.1. Présence d'un intervalle I stable par f

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

- L'intervalle I est stable par f si $f(I) \subset I$.
- Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in I \ \Rightarrow\ f(x) \in I$.
  Ce que l'on peut encore écrire : $\forall x \in I, f(x) \in I$.

Cette propriété de f permet d'obtenir le résultat suivant sur (u_n).

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_0 \in I \\ f(I) \subset I \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I}$$

Remarque

Cette propriété se montre par récurrence, type de raisonnement adapté puisque la suite (u_n) est définie par une relation de récurrence.

Illustration sur notre exemple

- Démontrons tout d'abord que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.

1) En déterminant précisément $f([0,1])$

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0,1]$.
On en déduit que :

$$f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0, \tfrac{1}{4}] \ \subset\ [0,1]$$

On en déduit que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.

Tableau récapitulatif.

Profitons-en pour rappeler comment déterminer l'image d'un intervalle I par une fonction f dans le cadre idéal où f est **continue** et **strictement monotone** sur I.

	Nature de l'intervalle $f(I)$	
I	Cas f strictement croissante sur I	Cas f strictement décroissante sur I
$[a,b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a,b[$	$[f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b} f(x), f(a)]$
$]a,b]$	$]\lim\limits_{x\to a} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim\limits_{x\to a} f(x)[$
$]a,b[$	$]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$	$]\lim\limits_{x\to b} f(x), \lim\limits_{x\to a} f(x)[$

2) En raisonnant sur des inégalités

Soit $x \in [0,1]$.

Autrement dit	$0 \leqslant x \leqslant 1$	
ainsi	$f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$	*(car la fonction f est croissante sur $[0,1]$)*
donc	$0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$	

On en déduit que $f(x) \in [0,1]$. Ainsi, l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.

- On en déduit alors que tous les termes de (u_n) sont dans $[0,1]$.

  Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
  où $\mathcal{P}(n)$: u_n bien défini et $u_n \in [0,1]$.

  - **Initialisation** :
    Par définition : $u_0 = 1 \in [0,1]$.
    On en déduit $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.
    (*i.e.* u_{n+1} bien défini et $u_{n+1} \in [0,1]$)
    Par hypothèse de récurrence, u_n bien défini et $u_n \in [0,1]$.
    Comme $u_n \geqslant 0$, alors $u_n \neq -1$. Ainsi, $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini.
    Comme $u_n \in [0,1]$ et comme $[0,1]$ est stable par f, on en déduit que :
    $$u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$$
    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

  Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

Remarque

- Dans la propriété $\mathcal{P}(n)$, on fait apparaître : u_n est bien défini. Ce point est important ici car la fonction f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout en entier. Il est donc possible, a priori, de tomber sur un rang n_0 tel que $u_{n_0} = -1$. Dans ce cas, la suite (u_n) ne serait pas bien définie. La partie présentée en rouge dans la démonstration permet de s'assurer de cette bonne définition.
- Lorsque la fonction f qui définit (u_n) est définie sur tout l'ensemble $\mathbb{R}$, cette précaution est inutile. On retire alors de la démonstration tout ce qui apparaît en rouge.
- Dans un énoncé, le terme d'intervalle stable (pas officiellement au programme) ne sera certainement pas présent. Dans ce cas, on démontre à la volée la stabilité de l'intervalle par f dans la démonstration par récurrence. Plus précisément, on écrit ce qui suit.

Par hypothèse de récurrence	$0 \leqslant u_n \leqslant 1$	
ainsi	$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$	*(car f croissante sur $[0,1]$)*
donc	$0 \leqslant f(u_n) \leqslant \frac{1}{4}$	

D'où $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$.

VI.2. La fonction f est croissante

On considère un intervalle I stable par f.
La monotonie de f permet d'obtenir le résultat suivant sur (u_n).

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_1 \geqslant u_0 \\ f \text{ croissante sur } I \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n) \text{ est croissante}}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_1 \leqslant u_0 \\ f \text{ croissante sur } I \end{array}\right\} \Rightarrow (u_n) \text{ est décroissante}}$$

Illustration sur notre exemple
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation** :
  $u_1 = \dfrac{1}{(1+1)^2} = \dfrac{1}{4} \leqslant 1 = u_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$).
  Par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
  En appliquant de part et d'autre la fonction croissante f, on obtient :
  $$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) = u_{n+1}$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$.
Autrement dit, la suite (u_n) est décroissante.

Remarque

- La position de u_0 par rapport à u_1 est primordiale.
  La croissance de f signifie que f respecte l'ordre des inégalités.
  Ainsi, si $u_0 \geqslant u_1$ (resp. $u_0 \leqslant u_1$), cet ordre sera respecté par applications successives de f, ce qui permet d'obtenir que $u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} \leqslant u_n$).
- Si la fonction f est décroissante sur I, la suite (u_n) n'est pas monotone.
  Supposons par exemple que $u_0 < u_1$ (l'autre cas se traite similairement).
  Par application de f décroissante, on obtient :

  $$u_1 = f(u_0) \geqslant f(u_1) = u_2$$

  Ainsi, (u_n) n'est ni croissante ni décroissante (les termes u_1 et u_2 ne sont pas rangés dans le même ordre que les termes u_0 et u_1).
- Afin de pouvoir quand même utiliser le résultat dans le cas où f est décroissante, il suffit de remarquer que la fonction $f \circ f : I \to I$ est alors croissante. Ceci se démontre facilement.

  Soit $(x, y) \in I^2$.

Supposons	$x \leqslant y$	
alors	$f(x) \geqslant f(y)$	*(car f est décroissante)*
donc	$f(f(x)) \leqslant f(f(y))$	*(car f est décroissante)*

  On peut alors étudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) en utilisant le résultat de ce paragraphe puisqu'elles sont définies par :

  $$\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1}) \end{array}\right.$$

- On pensera à l'utilisation de la propriété de recouvrement ou au théorème des suites extraites pour obtenir de l'information sur la suite (u_n) à partir des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Exercice

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (1 - u_n)^2 \end{array}\right.$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto (1 - x)^2$.

1) ***a.*** Etudier les variations de la fonction f.

b. Vérifier que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f.

c. Déterminer les points fixes de la fonction f.

d. Préciser le sens de variations de la fonction $g = f \circ f$ sur $[0, 1]$.

2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

3) ***a.*** Démontrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs dans $[0, 1]$.

b. Démontrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. Préciser leur monotonie.

c. Justifier que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. On note respectivement ℓ_1 et ℓ_2 les limites des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

d. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

e. Déterminer ℓ_1 et ℓ_2.

VI.3. Si on sait que : $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant x$

On considère un intervalle I stable par f.
Cette propriété sur f permet d'obtenir le résultat suivant sur (u_n).

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) \geqslant x \quad \Rightarrow \quad (u_n) \text{ est croissante}}$$

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) \leqslant x \quad \Rightarrow \quad (u_n) \text{ est décroissante}}$$

Remarque

La démonstration est directe (ne demande pas de raisonner par récurrence).
Soit $n \in \mathbb{N}$. En remplaçant x par u_n (valide car $u_n \in I$), on obtient que :

$$\begin{array}{ccc} f(u_n) & \geqslant & u_n \\ \shortparallel & & \\ u_{n+1} & & \end{array}$$

Illustration sur notre exemple

- On démontre dans un premier temps que :

$$\forall x \geqslant 0, \ \frac{x}{(1+x)^3} \leqslant x$$

Pour ce faire, on peut opérer de deux manières différentes.

1) Par un argument de convexité

La fonction f est C^∞ sur $[0, +\infty[$ (par le même argument que pour la dérivabilité). Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-(1+x)^3 - (1-x)3(1+x)^2}{(1+x)^6} \\ &= \frac{-(1+x) - 3(1-x)}{(1+x)^4} = \frac{2(x-2)}{(1+x)^4} \end{aligned}$$

Comme $(1+x)^4 > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de $x - 2$. D'où :

× si $x \in [0, 2]$ alors $f''(x) \leqslant 0$.
Ainsi, f est concave sur $[0, 2]$.

× si $x \in [2, +\infty[$ alors $f''(x) \geqslant 0$.
Ainsi, f est convexe sur $[2, +\infty[$.

La fonction f étant concave sur $[0, 2]$, elle est située sous ses tangentes et notamment sous sa tangente en 0 qui est la droite d'équation :

$$y = f(0) + f'(0)\ (x - 0) = x$$

2) Par un argument direct

Si $x = 0$, l'inégalité est même une égalité.
Si $x > 0$, on raisonne par équivalence :

$$\frac{x}{(1+x)^3} \leqslant x \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{(1+x)^3} \leqslant 1$$

Or cette dernière égalité est vérifiée car pour $x > 0$, $(1+x)^3 > 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. En remplaçant x par $u_n \in [0, 1] \subset [0, 2]$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} f(u_n) & \leqslant & u_n \\ \shortparallel & & \\ u_{n+1} & & \end{array}$$

La suite (u_n) est donc décroissante.

VI.4. Continuité de f et point fixe

Théorème 12. *(Théorème de composition des limites)*

Soit (u_n) une suite réelle de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet en ℓ une limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Alors la suite $(f(u_n))$ admet la limite a.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell \\ f(x) \underset{x \to \ell}{\longrightarrow} a \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \lim_{n \to +\infty} f(u_n) \ = \ \lim_{x \to \ell} f(x) \ = \ a}$$

On considère un intervalle I stable par f.
Cette propriété sur f permet d'obtenir le résultat suivant sur (u_n).

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = f(u_n) \\ u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell \\ f \text{ continue en } \ell \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ \ \ell = f(\ell)}$$

Autrement dit, la limite de la suite (u_n) (si elle existe), se trouve parmi les points fixes de f.

Illustration sur notre exemple

- On commence par déterminer les points fixes de la fonction f.

  0 est un point fixe de f puisque $f(0) = 0$.
  Si $x > 0$, alors :

$$\begin{array}{rcll} f(x) = x & \Leftrightarrow & \dfrac{x}{(1+x)^3} = x & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{(1+x)^3} = 1 & \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & (1+x)^3 = 1 & \\ & \Leftrightarrow & \cancel{1} + 3x + 3x^2 + x^3 = \cancel{1} & \\ & \Leftrightarrow & x\,(3 + 3x + x^2) = 0 & \end{array}$$

  Déterminons alors les racines du polynôme $P(X) = 3 + 3X + X^2$.
  Son discriminant est $\Delta = 9 - 4 \times 3 = -3$.
  Ainsi, le polynôme P n'a aucune racine réelle.

  On en déduit que f n'admet que 0 pour point fixe.

- La suite (u_n) est :
  - × décroissante,
  - × minorée par 0.

  Elle est donc convergente de limite $\ell \in [0, 1]$ (car : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, 1]$).
  La fonction f étant continue en ℓ, on obtient :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & f(u_n) \\ {\scriptstyle n \to +\infty}\downarrow & & {\scriptstyle n \to +\infty}\downarrow \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

  On en déduit que ℓ est un point fixe de f et donc que $\ell = 0$.

Remarque

- On dispose maintenant de la chaîne complète d'étude afin de réaliser l'étude d'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
  1) On démontre d'abord que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.
  2) On démontrer ensuite que la suite (u_n) est croissante (ou décroissante).
  3) Si I est un intervalle borné (*i.e.* si I a des extrémités finies), on en déduit que la suite (u_n) est convergente (car croissante majorée) de limite finie ℓ.

  On obtient de plus que $\ell \in \bar{I}$, adhérence de l'intervalle I (intervalle dans lequel on a ajouté ses bornes finies).
  Par exemple, si $I =]0, 2[$, on obtient que : $\ell \in [0, 2]$.

  4) Enfin, on démontre que ℓ est un point fixe de f.
  Ainsi, s'il n'y a qu'un point fixe de f dans $\bar{I}$ (c'est le cas le plus simple), c'est forcément la valeur de ℓ cherchée.
- L'exercice suivant illustre un cas classique. On cherche à démontrer qu'un des points listés au-dessus n'est pas vérifié. Pour ce faire, on suppose par l'absurde qu'il l'est. Ce qui permet de conclure que les points suivants sont aussi vérifiés. On peut ainsi aboutir à une contradiction.

Exercice

On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \exp(u_n) - 1 \end{array}\right.$

On note f la fonction définie par : $f(x) = e^x - 1$.

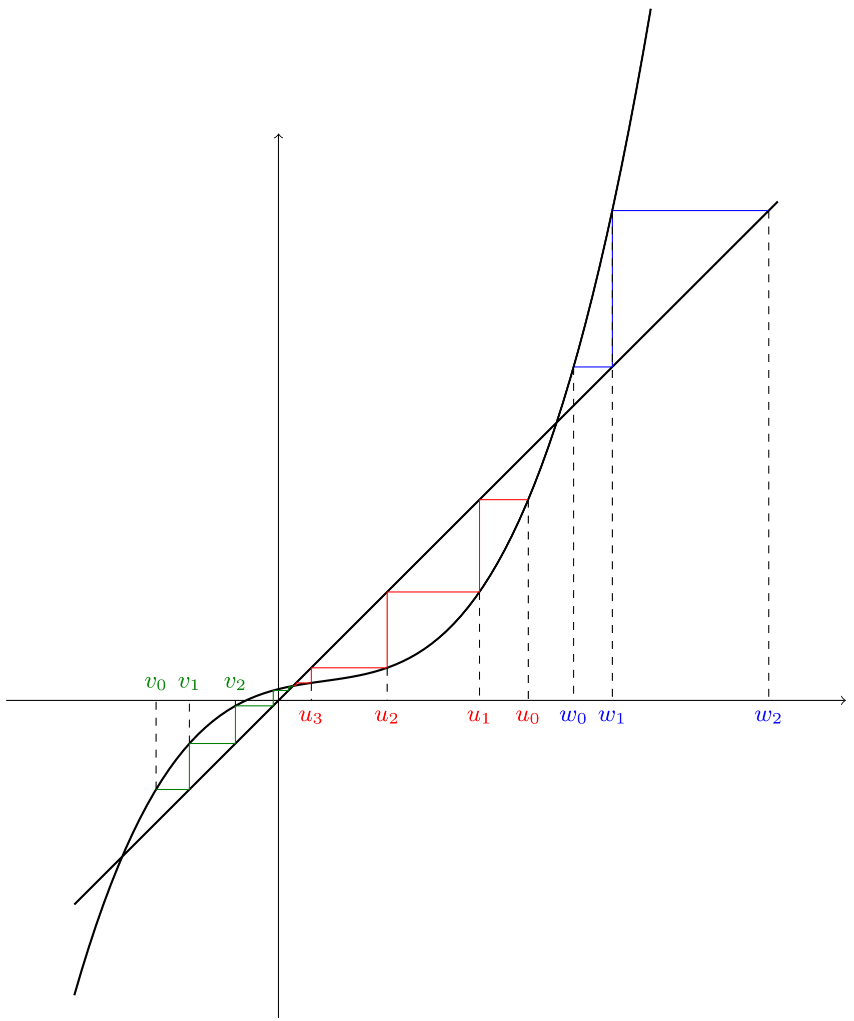
1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution qui est 0.
Déterminer le signe de $f(x) - x$. Préciser le sens de variation de f.

2. Montrer que pour tout entier n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.

3. Montrer que (u_n) n'est pas majorée et en déduire sa limite.

Il faut toujours penser à raisonner par l'absurde quand on demande de démontrer qu'une propriété n'est pas vérifiée.

Représentation graphique



Remarque

Les propriétés évoquées précédemment se lisent sur ce graphique.

- Les points fixes de f se situent à l'intersection de la courbe représentative de f et de la droite d'équation $y = x$. La limite (éventuelle) de (u_n) est l'un de ces points fixes.

  Il y en a ici 3 que nous notons (dans l'ordre croissant) ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3.
- Les intervalles $]-\infty, \ell_1]$, $[\ell_1, \ell_2]$, $[\ell_2, \ell_3]$, $[\ell_3, +\infty[$ sont des intervalles de stabilité par f. Ainsi, si u_0 est dans l'un de ces intervalles, tous les éléments de la suite (u_n) seront dans cet intervalle.
- Si l'on choisit $v_0 \in I = [\ell_1, \ell_2]$, la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} v_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f(v_n) \end{array}\right.$ est croissante. En effet : $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant x$ (la courbe représentative de f est située au-dessus de la droite d'équation $y = x$).
  La suite (v_n) est convergente (car majorée) de limite ℓ_2.
- Si l'on choisit $u_0 \in J = [\ell_2, \ell_3]$, la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$ est décroissante. En effet : $\forall x \in J,\ f(x) \leqslant x$ (la courbe représentative de f est située au-dessous de la droite d'équation $y = x$).
  La suite (u_n) est convergente (car minorée) de limite ℓ_2.
- Si l'on choisit $w_0 \in K =]\ell_3, +\infty[$, la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} w_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = f(w_n) \end{array}\right.$ est croissante. Démontrons qu'elle est non majorée.
  Supposons par l'absurde qu'elle est majorée.
  Elle est alors convergente et sa limite ℓ est un point fixe de f.
  Or : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n \geqslant w_0$ (par croissance de (w_n)).
  D'où, par passage à la limite : $\ell \geqslant w_0 > \ell_3$. C'est impossible : ℓ ne peut être strictement plus grand que le plus grand point fixe de f.
  Ainsi (w_n) et divergente vers $+\infty$.

VI.5. Utilisation de l'inégalité des accroissements finis

Théorème 13.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $(x,y) \in I^2$ où I est un intervalle.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ dérivable sur l'intervalle } I \\ \bullet \text{ il existe } M \geqslant 0, \\ \quad \forall u \in I,\ |f'(u)| \leqslant M \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \forall (x,y) \in I^2, \\ |f(y) - f(x)| \leqslant M\ |y-x| \end{array}$$

Interprétation physique

Réécrivons le résultat de cette inégalité. Si $t_1 \neq t_2$:

$$\left| \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \right| \leqslant \max_{t \in [t_1,t_2]} (\ |f'(t)|\ )$$

- On fait apparaître un taux d'accroissement. Une telle quantité doit être pensée comme une **vitesse moyenne** : la quantité $f(t_2) - f(t_2)$ représente alors le déplacement effectué par une voiture (par exemple) sur le laps de temps $t_2 - t_1$.
- Par définition, la dérivée d'une fonction en un point est obtenu comme limite d'un taux d'accroissement. Le taux d'accroissement s'interprétant comme une vitesse moyenne, sa limite en un point s'interprète comme une vitesse instantanée.
- Revenons à l'idée du déplacement de la voiture. Considérons que la voiture a effectué 200 km en 2H. Elle a donc roulé en moyenne à 100 km/H. Mais elle a eu des vitesses instantanées différentes durant le trajet.
  Le résultat de l'IAF est alors assez naturel : la vitesse moyenne de la voiture entre les instants t_1 et t_2 est plus faible que la plus grande pointe de vitesse qu'elle a effectué.

On considère un intervalle I stable par f.
D'autre part, on note $\alpha \in I$ un point fixe de la fonction f.
L'utilisation de l'IAF permet d'obtenir plusieurs propriétés sur (u_n). Les exercices d'étude de suites (u_n) à l'aide de l'IAF suivent la trame suivante.

1) On démontre tout d'abord que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.

2) En appliquant l'inégalité à $x = u_n \in I$ et $y = \alpha \in I$, on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant M\ |u_n - \alpha|}$$

3) D'où, par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant M^n\ |u_0 - \alpha|}$

4) Si on sait de plus que $0 \leqslant M < 1$, alors $M^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, par théorème d'encadrement, on obtient que : $|u_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et ainsi que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

5) Il est aussi souvent demander d'écrire un programme **Scilab** permettant de trouver une valeur approchée à 10^{-4} près de α.

Exercice

Soit la suite la suite (u_n) par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{array} \right.$

On pose $f(x) = \sqrt{x+1}$.

1. Montrer que $[0,2]$ est stable par f et que : $\forall x \in [0,2], |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

2. Déterminer les points fixes de f. Notons r l'unique point fixe dans $[0,2]$.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - r| \leqslant \frac{1}{2}\ |u_n - r|$.

5. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - r|$.

6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

7. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

8. Déterminer un entier N tel que $|u_N - r| \leqslant 10^{-5}$.

9. Écrire un programme donnant une valeur approchée de r à 10^{-5} près.

Démonstration.

1. • Soit $x \in [0,2]$.

$$\begin{array}{lcl} \text{Alors} & 0 \leqslant x \leqslant 2 & \\ \text{et} & 1 \leqslant x+1 \leqslant 3 & \\ \text{donc} & \sqrt{1} \leqslant \sqrt{x+1} \leqslant \sqrt{3} & \textit{(car } \sqrt{\cdot} \textit{ est croissante)} \end{array}$$

Enfin, $\sqrt{1} = 1 \geqslant 0$ et comme $3 \leqslant 4$, on obtient $\sqrt{3} \leqslant \sqrt{4} = 2$.
Ainsi, l'intervalle $[0,2]$ est stable par f.

• La fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ car est la composée $f = h \circ g$ des fonctions :

× $g : x \mapsto x+1$ dérivable sur $]-1,+\infty[$,
et telle que $g(\,]-1,+\infty[\,) \subset\ ]0,+\infty[$.

× $h : x \mapsto \sqrt{x}$, dérivable sur $]0,+\infty[$.

Soit $x \in [0,2]$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \geqslant 0$$

On en déduit que :

$$|f'(x)| = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} \leqslant \frac{1}{2}$$

car $x+1 \geqslant 1$ et donc $\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{1} = 1$.

2. Procédons par disjonction de cas.

– Si $x \in\ ]-1,0[$:
l'équation $0 \leqslant \sqrt{x+1} = x < 0$ n'admet pas de solution.

– Si $x \geqslant 0$, on a alors :

$$\begin{array}{cl} & \sqrt{x+1} = x \\ \Leftrightarrow & x+1 = x^2 \\ \Leftrightarrow & x^2 - x - 1 = 0 \end{array}$$

Considérons le polynôme $P(X) = X^2 - X - 1$.
Il admet pour discriminant $\Delta = 1 - 4\,(-1) = 5$.
Ainsi, P admet pour racines :

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Or comme $\sqrt{5} \geqslant 2$, alors $1 - \sqrt{5} \leqslant -1 < 0$. Ainsi : $x_2 < 0$.
D'autre part : $0 \leqslant \sqrt{5} \leqslant 3$ donc $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leqslant \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

On en conclut que : $r = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in [0,2]$.

▸ **Initialisation** :
Par définition : $u_0 = 0 \in [0,2]$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \in [0,2]$).
Par hypothèse de récurrence, $u_n \in [0,2]$.
Comme $u_n \in [0,2]$ et comme $[0,2]$ est stable par f, on en déduit que :

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [0,2]$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

4. D'après les questions précédentes :

× f est dérivable sur $[0,2]$,

× $\forall x \in [0,2],\ |f'(x)| \ \leqslant\ \frac{1}{2}$.

On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (x,y) \in [0,2]^2,\ |f(y) - f(x)| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\ |y - x|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [0,2]$ et $x = r \in [0,2]$, on obtient :

$$|f(u_n) - f(r)| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\ |u_n - r|$$

Et ainsi : $|u_{n+1} - r| \ \leqslant\ \dfrac{1}{2}\ |u_n - r|$.

5. Démontrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $|u_n - r| \ \leqslant\ \left(\frac{1}{2}\right)^n\ |u_0 - r|$.

▸ **Initialisation** :
Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, on a bien : $|u_0 - r| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0\ |u_0 - r|$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.
(*i.e.* $|u_{n+1} - r| \ \leqslant\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\ |u_0 - r|$)
D'après la question précédente :

$$|u_{n+1} - r| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\ |u_n - r|$$

Or par hypothèse de récurrence : $|u_n - r| \ \leqslant\ \left(\frac{1}{2}\right)^n\ |u_0 - r|$.
On en déduit donc :

$$|u_{n+1} - r| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\ |u_n - r| \ \leqslant\ \frac{1}{2}\ \left(\frac{1}{2}\right)^n\ |u_0 - r|$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi, par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

6. Comme $u_0 \in [0,2]$ et $r \in [0,2]$, alors : $|u_0 - r| \leqslant 2$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, à l'aide de la question précédente :

$$|u_n - r| \ \leqslant\ \left(\frac{1}{2}\right)^n\ |u_0 - r| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n\ 2 = \frac{1}{2^{n-1}}$$

7. D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r| \ \leqslant\ \frac{1}{2^{n-1}}$$

Or $\dfrac{1}{2^{n-1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc, par théorème d'encadrement : $|u_n - r| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui équivaut à $u_n - r \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et démontre ainsi que (u_n) est convergente de limite r.

8. • Il suffit de trouver $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\frac{1}{2^{N-1}} \leqslant 10^{-5}$$

• En effet, d'après la question précédente, on aura alors :

$$|u_N - r| \ \leqslant\ \frac{1}{2^{N-1}} \ \leqslant\ 10^{-5}$$

• On remarque alors que :

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \ \leqslant\ 10^{-5} \ &\Leftrightarrow\ (n-1)\ \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) \ \leqslant\ \ln(10^{-5}) && \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln\textit{)} \\
&\Leftrightarrow\ n - 1 \ \geqslant\ \frac{-5\ \ln(10)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} && \textit{(car } \ln\left(\tfrac{1}{2}\right) < 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow\ n \ \geqslant\ \frac{\cancel{-}5\ln(10)}{\cancel{-}\ln(2)}
\end{aligned}$$

En choisissant $N = \left\lceil \dfrac{5\ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$ (ou tout entier supérieur), on obtient bien que : $|u_N - r| \leqslant 10^{-5}$.

9. Le programme **Scilab** suivant stocke les valeurs successives de u_n dans une variable `u`. Après N itérations, on obtient la valeur attendue u_N qui est alors affichée.

```
N = ceil(5 * log(10) / log(2))
u = 0
for i = 1:N
    u = sqrt(u+1)
end
disp(u)
```

□

VII. Suites implicites

La suite (u_n) est dite implicite lorsque son terme général n'est pas donné sous forme explicite mais comme solution d'une équation dont on ne peut déterminer directement la solution. Dans les énoncés, l'introduction d'une suite implicite se fait généralement de l'une des deux manières suivantes.

1) « Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle I. »
(où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction indépendante de n)

Par définition, on a alors : $\boxed{f(u_n) = n}$.
Cette égalité est souvent fondamentale dans la suite de l'exercice.

Exercice
On définit sur $\mathbb{R}^{+*}$ la fonction f par : $f(x) = x + \ln(x)$.

a. Dresser le tableau de variations de f.

b. Montrer que l'équation $f(x) = n$ a une unique solution dans $\mathbb{R}^{+*}$.
On la note u_n.

c. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Démonstration.

a. • La quantité $\ln(x)$ est définie pour $x > 0$.
Ainsi, $\mathscr{D}_f =]0, +\infty[$.

• De plus, la fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Ainsi, f est dérivable sur cet ensemble.
Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$f'(x) \;=\; 1 + \frac{1}{x} > 0$$

On obtient le tableau de variations suivant.

x	0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	
Variations de f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

b. • La fonction f est :

× continue sur $]0, +\infty[$,

× strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

Elle est donc bijective de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[)$. Or :

$$f(]0, +\infty[) \;=\;]\lim_{x \to 0} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)[\;=\;]-\infty, +\infty[$$

• On en déduit que tout $y \in]-\infty, +\infty[$ admet un unique antécédent $x \in]0, +\infty[$ par la fonction f.

• On note alors u_n $(\in]0, +\infty[)$ l'unique antécédent de $n \in \mathbb{N}$.
(on a donc $f(u_n) = n$)

c. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Par définition, on a $f(u_n) = n$ et $f(u_{n+1}) = n + 1$.
  On en déduit que : $n = f(u_n) < f(u_{n+1}) = n + 1$.
- Or, d'après le théorème de la bijection, la fonction $f^{-1} :]-\infty, +\infty[\mapsto]0, +\infty[$ est strictement croissante.
- En appliquant f^{-1} de part et d'autre de l'inégalité, on obtient :

$$f^{-1}(f(u_n)) = u_n < u_{n+1} = f^{-1}(f(u_{n+1}))$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

□

2) « Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n dans l'intervalle I. »
(où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction qui dépend de n)

Par définition, on a alors : $\boxed{f_n(u_n) = 0}$.

Exercice
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n par : $f_n(x) = x^5 + n \times x - 1$.

a. Faire l'étude de la fonction f_n.

b. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$. On la notera u_n.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$.

Démonstration.
À vous de jouer ! □

VIII. Croissances comparées

VIII.1. Négligeabilité

Définition *Négligeabilité*

Soit (u_n) une suite réelle.

Soit (v_n) une suite telle que $v_n \neq 0$ (à partir d'un certain rang).

- On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) (ou **dominée** par (v_n)) si :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0}$$

- Lorsque (u_n) est négligeable devant (v_n), on note $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.
- À l'oral, on dit que « u_n est un petit o de v_n ».
  (o = $15^{\text{ème}}$ lettre de l'alphabet)

Remarque

- On s'intéresse ici au comportement asymptotique (à l'infini) des suites. Plus précisément, on cherche ici à les classer suivant leur dominance, ce dont on se sert lors de la « mise en facteur du terme dominant ».
- Lorsque $u_n = o(v_n)$, on pourra utiliser, la notation $u_n << v_n$.
- Cette notation est parfois trompeuse.
  Il ne faut surtout pas confondre : $u_n << v_n$ et $u_n \leqslant v_n$.
  (d'ailleurs $(u_n << v_n) \not\Rightarrow (u_n \leqslant v_n)$ et $(u_n \leqslant v_n) \not\Rightarrow (u_n << v_n)$)
- On réservera donc cette notation pour l'écriture d'échelles asymptotiques (*cf* théorème 16).

Théorème 14.

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, \ \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^b}{n^a} = 0} \qquad \boxed{\forall a > 0, \forall q > 1, \ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{q^n} = 0}$$

Remarque

- Ceci signifie que pour tout $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$: $(\ln(n))^b << n^a << q^n$
  ce qui s'écrit : $(\ln(n))^b = \underset{n\to+\infty}{o}(n^a)$ et $n^a = \underset{n\to+\infty}{o}(q^n)$.
- On dira que la croissance logarithmique est beaucoup plus faible que la croissance polynomiale qui est elle-même beaucoup plus faible que la croissance exponentielle.
- Il faut savoir lire ce théorème dans l'autre sens :

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, q > 1, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{(\ln(n))^b} = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n^a} = +\infty}$$

- On en déduit aussi que : $\boxed{\forall a > 0, \forall |q| < 1, \quad \lim_{n\to+\infty} n^a \ q^n = 0}$

On en profite pour rappeler le comportement asymptotique des suites géométriques.

Théorème 15.
Soit q un réel tel que $q \neq 0$.

1) Si $q = 1$, alors (q^n) est constante $(= 1)$ et converge donc vers 1.

2) Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

3) Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

4) Si $q \leqslant -1$, alors (q^n) n'admet pas de limite.

Théorème 16. *(Échelle de comparaison asymptotique)*
Pour tout $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$, on a :

$$\boxed{(\ln(n))^b \quad << \quad n^a \quad << \quad q^n \quad << \quad n! \quad << \quad n^n}$$

i.e. $(\ln(n))^b = \underset{n\to+\infty}{o}(n^a)$, $n^a = \underset{n\to+\infty}{o}(q^n)$, $q^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$, $n! = \underset{n\to+\infty}{o}(n^n)$

Exercice
Déterminer la limite des suites $(\frac{e^{n^2}}{n})$ et $(\frac{e^{\sqrt{n}}}{n})$.

VIII.2. Équivalence

Définition *Équivalence*

Soit (u_n) une suite réelle.

Soit (v_n) une suite telle que $v_n \neq 0$ (à partir d'un certain rang).

- On dira que (u_n) est **équivalente** à (v_n) et on notera $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1}$$

Remarque

- On s'intéresse encore au comportement asymptotique (à l'infini) des suites. Plus précisément, dire que (u_n) est (v_n) sont équivalentes, c'est dire que ces deux suites ont même comportement asymptotique.
- Trouver un équivalent (v_n) à une suite (u_n) c'est trouver une suite (v_n) possédant le même comportement asymptotique que (v_n) et dont l'expression est plus simple.

  ↪ c'est la démarche suivie en première année lors de la recherche de limite d'une suite (u_n) par mis en facteur le terme dominant.
  Ce terme dominant n'est rien d'autre qu'un équivalent de u_n.

Théorème 17.

Soient (u_n), (v_n), (w_n), (z_n) des suites réelles.
(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang)

La relation d'équivalence $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ vérifie les propriétés suivantes.

1) Réflexivité :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$$

2) Symétrie :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \ \Rightarrow\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$$

3) Transitivité :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \end{array}\right\} \Rightarrow\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n}$$

4) Compatibilité avec le produit :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n \end{array}\right\} \Rightarrow\ u_n \times w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \times z_n}$$

5) Compatibilité avec le quotient :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n \end{array}\right\} \Rightarrow\ \frac{u_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{z_n}}$$

6) Équivalent et limites :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \to \ell \ (\in \overline{\mathbb{R}}) \end{array}\right\} \Rightarrow\ u_n \to \ell}$$

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n}{u_n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

2) Il suffit d'écrire : $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{\frac{u_n}{v_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1} = 1$.

3) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$.

4) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n \times w_n}{v_n \times z_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{w_n}{z_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$.

5) Il suffit d'écrire : $\dfrac{\frac{u_n}{w_n}}{\frac{v_n}{z_n}} = \dfrac{u_n}{w_n} \times \dfrac{z_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$.

6) Il suffit d'écrire : $u_n = \dfrac{u_n}{v_n}\, v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times \ell = \ell$. $\square$

Remarque

- La propriété ***6)*** peut s'exprimer comme suit.
  Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui admettent chacune une limite (éventuellement infinie). On a alors :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n}$$

- Ce résultat n'est pas une équivalence dans le cas général. En effet :
  × si $u_n = n$ et $v_n = n^2$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ mais $\cancel{u_n \sim v_n}$.
  × si $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ mais $\cancel{u_n \sim v_n}$.
- Dans le cas où (u_n) et (v_n) sont convergentes de même limite $\ell \neq 0$, la réciproque est bien vérifiée. En effet :

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell} = 1$$

- En particulier : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}^* \ \Rightarrow\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$ (c'est même une équivalence). Cet énoncé est faux lorsque $\ell = 0$.

Au passage, on n'écrira `JAMAIS` $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$. En effet :

× la définition que l'on a donné sur les équivalents n'englobe pas ce cas ((v_n) doit être non nulle à partir d'un certain rang),

× la définition avec les ε de la notion d'équivalents (non fournie ici) permet d'affirmer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ équivaut au fait que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.

Remarque

Le théorème précédent stipule que l'opérateur $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ est compatible avec les opérations de produit et quotient.
Il faut faire attention, ce n'est pas le cas de toutes les opérations.

1) Considérons l'exemple suivant.

$$\left.\begin{array}{l} u_n = n + \sqrt{n} \\ v_n = n + \ln(n) \end{array}\right\} \ \Rightarrow\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \text{et} \quad w_n = -n \underset{n\to+\infty}{\sim} -n = z_n$$

mais $\sqrt{n} = \cancel{u_n + w_n \sim v_n + z_n} = \ln(n)$.

$$\boxed{\text{On ne peut sommer des équivalents !}}$$

2) Considérons l'exemple suivant.

$$\left.\begin{array}{l} u_n = n + 1 \\ v_n = n \end{array}\right\} \ \Rightarrow\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

mais $\mathrm{e}^{n+1} = \cancel{\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}} = \mathrm{e}^n$ puisque $\dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^n} = \mathrm{e} \ \cancel{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}}\ 1$

De manière générale, on ne peut appliquer de fonction de part et d'autre d'une relation d'équivalence !

Ici, on avait en fait le résultat suivant :

$$\boxed{\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{v_n} \ \Leftrightarrow\ \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^{v_n}} \to 1 \ \Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{u_n - v_n} \to 1 \ \Leftrightarrow\ u_n - v_n \to 0}$$

Exercice

1) Limite de la suite (u_n) de terme général : $u_n = \dfrac{(3n+4)^3(8n^{-2}+2n^{-4})}{9n+10}$?

- $3n+4 \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n$ car $\dfrac{3n+4}{3n} = 1 + \dfrac{4}{3n} \to 1$
  Ainsi : $(3n+4)^3 = (3n+4)(3n+4)(3n+4) \underset{n\to+\infty}{\sim} (3n)(3n)(3n) = 3^3 n^3$.

- $8n^{-2}+2n^{-4} \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^{-2}$ car $\dfrac{8n^{-2}+2n^{-4}}{8n^{-2}} = 1 + \dfrac{2n^{-4}}{8n^{-2}} = 1 + \dfrac{1}{4n^2} \to 1$

  On en déduit que : $(3n+4)^3(8n^{-2}+2n^{-4}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^3 n^3 \times 8n^{-2} = 3^3\ 8n$

- $9n+10 \underset{n\to+\infty}{\sim} 9n$ car $\dfrac{9n+10}{9n} = 1 + \dfrac{10}{9n} \to 1$

  On en déduit que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3^{\cancel{3}}\ 8\cancel{n}}{\cancel{9}\cancel{n}} = 3 \times 8 = 24$.
  Ainsi : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 24$.

2) Limite de la suite (v_n) de terme général : $v_n = \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$?

3) Limite de la suite (w_n) de terme général : $w_n = \sqrt{n^2+2} - n$?

Propriété

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_n \neq 0$ (à partir d'un certain rang).
Soit (v_n) une suite réelle.
Supposons que $v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$.

Alors : $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que :

$$\frac{u_n+v_n}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} + \frac{v_n}{u_n} = 1 + \frac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \square$$

Exercice

Limite de la suite (u_n) de terme général : $u_n = \dfrac{n^2\,\mathrm{e}^n + n\,\mathrm{e}^{2n}}{n^3\,(\ln(n)) + n\,(\ln(n))^3}$?

- $n^2\,\mathrm{e}^n + n\,\mathrm{e}^{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\mathrm{e}^{2n}$. En effet :

  $n^2\,\mathrm{e}^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n\,\mathrm{e}^{2n})$ puisque $\dfrac{n^2\,\mathrm{e}^n}{n\,\mathrm{e}^{2n}} = \dfrac{n}{\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

- $n^3\,(\ln(n)) + n\,(\ln(n))^3 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3\,(\ln(n))$. En effet :

  $n\,(\ln(n))^3 = \underset{n\to+\infty}{o}(n^3\,(\ln(n)))$ puisque $\dfrac{n\,(\ln(n))^3}{n^3\,(\ln(n))} = \dfrac{(\ln(n))^2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n\,\mathrm{e}^{2n}}{n^3\,(\ln(n))} = \dfrac{\mathrm{e}^{2n}}{n^2\,(\ln(n))}$.

Or : $\dfrac{\mathrm{e}^{2n}}{n^2\,(\ln(n))} = \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^2}\,\dfrac{\mathrm{e}^n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

D'où $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

> Cette propriété n'autorise en aucun cas à sommer des équivalents.
> La sommation d'équivalents est, rappelons-le, interdite !

Remarque

- Cette propriété signifie simplement que si (v_n) est négligeable devant (u_n), le terme dominant de $u_n + v_n$ n'est autre que u_n.
- Dans l'exercice précédent, on peut rédiger sans utiliser cette propriété.
  On a $n^2\,\mathrm{e}^n + n\,\mathrm{e}^{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,\mathrm{e}^{2n}$ car :

$$\frac{n^2\,\mathrm{e}^n + n\,\mathrm{e}^{2n}}{n\,\mathrm{e}^{2n}} = \frac{n^2\,\mathrm{e}^n}{n\,\mathrm{e}^{2n}} + \frac{n\,\mathrm{e}^{2n}}{n\,\mathrm{e}^{2n}} = \frac{n}{\mathrm{e}^n} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Quelques équivalents usuels

Théorème 18.
Soit I un intervalle.
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in I$ alors, **par définition**, *on a :*

a) $\boxed{\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$

b) $\boxed{\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)}$ *(formulation équivalente)*

On a notamment :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1} \qquad \boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1} \qquad \boxed{\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1}$$

D'où, par le théorème de composition des limites :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1} \qquad \boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1}$$

En particulier, on en tire :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}, \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}, \quad \ln\left(1 + e^{-n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{-n}$$

Et de manière plus générale :

$$\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(1+u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n}$$

Exercice
Déterminer les limites, lorsqu'elles existent, des suites suivantes.

a) $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$

b) $\left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n\right)$

c) $\left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^5}\right)$

d) $\left((2n-3)^2 \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)\right)$

Démonstration.

a) Remarquons tout d'abord que :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n \, \ln(1+\frac{1}{n})}$$

Or : $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
D'où : $n \, \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} n \, \frac{1}{n} = 1$.

Ainsi : $n \, \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, et par théorème de composition des limites :

$$\mathrm{e}^{n \, \ln(1+\frac{1}{n})} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$$

Comme déjà énoncé, on ne peut pas composer par la fonction exp de part et d'autre de l'équivalence.

b) Remarquons tout d'abord que :

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \mathrm{e}^{n \, \ln(1+\frac{1}{n^2})}$$

Or : $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.
D'où : $n \, \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi : $n \, \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, et par théorème de composition des limites :

$$\mathrm{e}^{n \, \ln(1+\frac{1}{n^2})} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1$$

c) Remarquons tout d'abord que :

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^5} = \mathrm{e}^{n^5\ \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

Or : $n^5\ \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Ainsi : $n^5\ \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et par théorème de composition des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{n^5\ \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

d) $\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n+2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+2}$.

Ainsi : $(2n-3)^2\ \ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(2n-3)^2}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n^2}{n} = 4n$ □

IX. Opérations - formes indéterminées (POLY)

Dans la suite, on parle de *forme indéterminée* (et on note F.I.) quand on ne peut déterminer, de manière générale, la limite d'une opération sur les suites. Dans ce cas, il faudra faire une étude au cas par cas.

IX.1. Somme de deux suites

Somme $u_n + v_n$			
v_n \ u_n	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$
ℓ_2	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Le cas de la somme de deux suites apporte une F.I. : $\boxed{\infty - \infty}$

IX.2. Produit de deux suites

Produit $u_n \times v_n$					
v_n \ u_n	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1 \ell_2$	$\ell_1 \ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\ell_1 \ell_2$	$\ell_1 \ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

Le cas du produit de deux suites apporte une F.I. : $\boxed{0 \times \infty}$

IX.3. Passage à l'inverse

On suppose ici que l'on peut former le quotient $\frac{1}{u_n}$, ce qui revient à dire que $u_n \neq 0$, au moins à partir d'un certain rang.

Inverse $\frac{1}{u_n}$				
u_n	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
Si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	0	
Si $u_n < 0$ à partir d'un certain rang	$\frac{1}{\ell}$	$-\infty$		0

IX.4. Quotient

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="5">Quotient $\frac{u_n}{v_n}$</th></tr>
<tr><td colspan="2">v_n \ u_n</td><td>$\ell_1 > 0$</td><td>$\ell_1 < 0$</td><td>$\ell_1 = 0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\ell_2 > 0$</td><td>$\frac{\ell_1}{\ell_2}$</td><td>$\frac{\ell_1}{\ell_2}$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\ell_2 < 0$</td><td>$\frac{\ell_1}{\ell_2}$</td><td>$\frac{\ell_1}{\ell_2}$</td><td>0</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\ell_2 = 0$</td><td>$v_n>0$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td rowspan="2">F.I.</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr>
<tr><td>$v_n<0$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$+\infty$</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>F.I.</td><td>F.I.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$-\infty$</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>F.I.</td><td>F.I.</td></tr>
</table>

Le cas du quotient de deux suites apporte deux F.I. : $\boxed{\frac{0}{0} \; ; \; \frac{\infty}{\infty}}$

IX.5. Techniques pour lever une F.I.

Tout d'abord résumons les F.I. rencontrées lors de l'étude des différentes opérations algébriques :

$$\boxed{\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}}$$

Afin de lever un F.I., on pourra penser à utiliser l'une des méthodes (plus généralement une combinaison des méthodes) suivantes.

a) Factoriser par le terme dominant (*i.e.* celui ayant la plus forte croissance). Autrement dit, trouver un équivalent simple de la suite.

b) Penser à la quantité conjuguée.

c) Pour les fonctions puissances : retour à la définition à l'aide des fonctions exp et ln.

d) Penser aux croissances comparées.

e) Utilisation du taux d'accroissement.

f) Utilisation d'inégalités. Le théorème d'encadrement est souvent utilisé pour déterminer un équivalent ou pour montrer qu'une suite tend vers 0.