Feuille d'exercices n°1 : Suites réelles

Suites usuelles

Exercice 1. (★)
Pour chacune des suites suivantes, définies par récurrence, donner une expression explicite de u_n.

a. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 4u_n - 6$.

b. $u_0 = 1$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

c. $u_0 = 1$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

d. $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{2}$.

e. $u_0 = 2$; $u_1 = \dfrac{10}{3}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ 3u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$.

Exercice 2. (★)
On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n \end{cases}$

a. Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$ est une suite arithmético-géométrique.

b. En déduire une expression de u_n.

Exercice 3. (★)
Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4} \end{cases}$

On introduit la suite auxiliaire (t_n) de terme général :

$$t_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$$

a. Montrer que (t_n) est une suite géométrique.

b. En déduire une expression de t_n puis de u_n.

Exercice 4. (★★) *(des suites récurrentes croisées)*
Soient $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et $(v_n)_{n \geqslant 1}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} u_1 = 12 \\ v_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

a. Pour tout entier n strictement positif, on pose : $w_n = v_n - u_n$.
Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. Pour tout entier n strictement positif, on pose : $t_n = 3u_n + 8v_n$.
Démontrer que la suite (t_n) est constante.

c. Exprimer w_n en fonction de n.

d. En déduire une expression explicite de u_n et v_n en fonction de n.

e. Calculer u_2, v_2, u_3 et v_3 à l'aide de la relation de récurrence, puis en utilisant le résultat de la question précédente.

Exercice 5. (★★)
On cherche à déterminer toutes les suites (u_n) vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 3$$

a. Déterminer deux réels a et b tels que la suite (v_n) définie par $v_n = an + b$ vérifie la relation ci-dessus.

b. Montrer que la suite (z_n) définie par $z_n = u_n - v_n$ est d'un type bien connu, en déduire la valeur de z_n et celle de u_n.

Exercice 6. (★)

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n - 2} + 2 \end{cases}$

a. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2$.

b. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \ln(u_n - 2)$.
Justifier que (v_n) est bien définie.

c. De quel type est la suite (v_n) ?

d. En déduire la formule explicite de u_n.

Exercice 7. (★★)

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} \end{cases}$

a. Vérifier que cette suite est bien définie.

b. Donner une expression explicite de u_n. Comme dans les exercices précédents, on pourra introduire une suite auxiliaire (v_n) bien choisie.

Définition de la convergence

Exercice 8. (★★) *Vrai ou Faux ?*

a. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors (u_n) n'est pas majorée.

b. Une suite croissante à partir d'un certain rang est minorée.

c. Si $(|u_n|)$ converge alors (u_n) converge.

d. Si $(|u_n|)$ tend vers 0 alors (u_n) tend vers 0.

e. Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.

f. Une suite convergente et majorée est croissante.

g. Une suite divergeant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.

h. Une suite strictement croissante diverge vers $+\infty$.

i. Une suite strictement décroissante diverge vers $-\infty$.

j. Si (u_n) est croissante et $u_n \leqslant v_n$ alors (v_n) est croissante.

k. Si (u_n) tend vers 0 et (v_n) tend vers $+\infty$, alors on ne peut conclure sur la limite du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ (*F.I.*).

l. Si (u_n) est divergente, alors la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+1} - u_n$ est divergente.

m. Si (u_n) tend vers $\ell \neq 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} - u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

Exercice 9. (★★) *(propriété de recouvrement)*
Soit (u_n) une suite telle que :

× $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$,

× $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que (u_n) converge vers ℓ.

Calculs de limites

Exercice 10. (★★)

a. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-3n^7+5n-n^3}{n^2+1}$

b. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n\ n^2+3n}{n^2+\sqrt{n}}$

c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}+2}{\mathrm{e}^{\ln n+3}-5}$

d. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\mathrm{e}^n-n\mathrm{e}^{2n}}{n^3\ln n-n\,(\ln n)^3}$

e. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^2+3n+1}{\ln n+5}$

f. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-5n\sqrt{n}+n-\ln n+n^{-1}}{\mathrm{e}^{3n}-\mathrm{e}^n+1-\mathrm{e}^{-n}}$

g. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2}-n$

h. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}$

i. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

j. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3^n\ \mathrm{e}^{-3n}$

k. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{n!}$

Exercice 11. (★★)

a. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

b. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)}$

c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (2n-3)\ln\left(\frac{n+3}{n+2}\right)$

d. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

Exercice 12. (★★)

a. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (2^{\frac{1}{n}}+5^{\frac{1}{n}})^n$

b. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+n^2\right)^{1/n}$

c. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (\mathrm{e}^n+\sqrt{2})^{\frac{1}{n^2}}$

d. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\mathrm{e}^{n^2})^{\frac{1}{n}}}{n\ \ln n-\sqrt{n}}$

Théorème de convergence monotone / d'encadrement

Exercice 13. (★★) *(d'après* `EDHEC 2001`*)*
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

a. Montrer que la suite est bien définie et à termes strictement positifs.

b. En déduire que (u_n) est monotone.

c. Pour tout k de $\mathbb{N}$, exprimer ${u_{k+1}}^2-{u_k}^2$ en fonction de ${u_k}^2$.

d. En déduire que pour tout $n>0$, on a :

$${u_n}^2 = 2n+1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{{u_k}^2}$$

e. En déduire que pour n non nul, ${u_n}^2 \geqslant 2n+1$ puis la limite de (u_n).

Exercice 14. (★)

a. Démontrer : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n!}\leqslant\dfrac{1}{2^{n-1}}$.

b. Démontrer que la suite (S_n) de terme général $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ converge vers un réel $\ell\in\,]2,3]$.

Exercice 15. (★)

a) Démontrer : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{n^2}\leqslant\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\leqslant 1+\dfrac{1}{2n}$.

b) En déduire un équivalent simple de $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$.

c) Déduire de ***a)*** la limite de la suite $\left(\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}-n\right)$.

Exercice 16. (★) *(d'après* `EDHEC 2006 (S)`*)*

1) ***a.*** Montrer que l'on définit bien une unique suite $(u_n)_{n\geq 1}$, à termes strictement positifs, en posant : $u_1 = 1$ et, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :

$$u_n = \frac{1}{2n-1} \sum_{j=1}^{n-1} u_j$$

b. Vérifier que $u_2 = \frac{1}{3}$, puis calculer u_3.

c. Écrire en **Scilab** une fonction de paramètre n qui calcule le terme u_n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2) ***a.*** Etablir : $\forall n \geqslant 2, \quad u_{n+1} = \dfrac{2n}{2n+1}\, u_n$.

b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

c. Donner un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$, puis déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

d. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n)$, puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3) Montrer : $\forall n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{4^n}{4n\binom{2n}{n}}$.

Exercice 17. (★★)

On considère la suite (S_n) définie pour $n \geqslant 1$ par : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

a. Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \leqslant 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

b. En déduire la limite de la suite (S_n).

c. On pose $T_n = S_n - 2\sqrt{n}$. Démontrer à l'aide du théorème de convergence monotone que (T_n) converge.

d. Donner un équivalent simple de la suite (S_n).

Exercice 18. (★★★)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$.

Déterminer sa limite.

Suites adjacentes

Exercice 19. (★★)

On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
En déduire que la suite (S_n) converge.

Exercice 20. (★★)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n\,n!}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

Exercice 21. (★)

Soient (u_n) et (v_n) définies par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} u_0 & = & 3 & \text{et} & v_0 & = & 11 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n + v_n}{4} & \text{et} & v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{array} \right.$$

a. Étudier la suite $(v_n - u_n)$. Calculer son terme général en fonction de n, quel est son signe ? Donner sa limite.

b. Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
Que peut-on en déduire ?

c. Étudier la suite $(u_n + v_n)$. Que conclure ?

Suites de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 22 ($\bigstar$)*(d'après* `ECRICOME 2015`*)*
On considère la fonction F définie pour tout réel x par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel non nul n par : $u_{n+1} = F(u_n)$.

a. Montrer que pour tout réel x : $e^x \geqslant x + 1$.
Montrer que l'égalité a lieu **si et seulement si** $x = 0$.

b. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.

c. Recopier et compléter le programme **Scilab** suivant qui permet de représenter les cent premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$:

```
U = zeros(1,100)
U(1) = 1
for n = 1 : 99
    U(n+1) = ------------
end
plot(U,"+")
```

d. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$.

e. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

f. À l'aide de la question ***a.***, montrer successivement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} \geqslant \frac{u_n}{1 + u_n} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{u_n}$$

g. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.

h. À l'aide de la question ***g.***, établir la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 23 ($\bigstar$)
Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie.
(<u>indication</u> : on montrera en particulier que $u_n > 0$ pour tout n)

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est monotone.

d. Démontrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 24 ($\bigstar$)*(d'après* `EML 2016`*)*
On considère l'application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0, +\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet : $0,\ 69 < \ln(2) < 0,\ 70$.
On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0, +\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

6. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
(on pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$)

7. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_N < 10^{-4}$.

Exercice 25 (★★)*(d'après* `EDHEC 2003`*)*
On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}$.

1) ***a.*** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

2) ***a.*** Écrire une fonction **Scilab** qui prend en paramètre un entier n et renvoie la valeur de u_n.

b. Écrire un programme, rédigé en **Scilab**, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle : $0 < 1 - u_n < 10^{-3}$.

3) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a. Pour tout entier naturel k , exprimer $v_k - v_{k+1}$ en fonction de v_k.

b. Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (v_k - v_{k+1})$.

c. Donner la nature de la série $\sum\ {v_n}^2$ ainsi que la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} {v_n}^2$.

Exercice 26 (★)*(d'après* `ESC 2009`*)*

1) ***a.*** Étudier les variations de la fonction $h : x \mapsto x^4 - 4x + 1$.
On précisera les limites de h aux bornes de son ensemble de définition.

b. En déduire que l'équation $x^4 - 4x + 1 = 0$ admet exactement deux solutions réelles α et β, avec $\alpha \leqslant \beta$.

c. Montrer : $\alpha \in [0, 1[$ et que $\beta > 1$.

2) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ \forall n,\ u_{n+1} = \frac{(u_n)^4+1}{4} \end{array}\right.$

a. Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto \frac{x^4+1}{4}$.

b. Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

c. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

d. Écrire un programme en **Scilab** qui demande un entier n puis qui calcule et affiche la valeur de u_n.

Exercice 27 (★)*(d'après* `EML 1995`*)*
Soit $f : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \mapsto & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(1+x) \end{array}$

On considère la suite définie par : $u_0 \in \,]0, +\infty[$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1) ***a.*** Montrer que f est de classe C^2 sur $[0, +\infty[$, et calculer, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b. Étudier les variations de f', puis celles de f.

c. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

2) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in [0, +\infty[$.

3) On suppose dans cette question : $u_0 \in \,]\mathrm{e} - 1, +\infty[$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{e} - 1 < u_n \leqslant u_{n+1}$.

b. En déduire que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4) On suppose dans cette question que $u_0 \in \,]0, \mathrm{e} - 1[$.
Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 28. (★★)
On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \exp(u_n) - 1 \end{array}\right.$

On note f la fonction définie par : $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

a. Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution qui est 0.
Déterminer le signe de $f(x) - x$. Préciser le sens de variation de f.

On suppose maintenant que $u_0 = 1$**.**

b. Montrer que pour tout entier n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$.

c. Montrer que (u_n) n'est pas majorée et en déduire sa limite.

d. Monter que si $x \geqslant 1$ alors $f(x) \geqslant (\mathrm{e} - 1)x$.

e. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant (\mathrm{e} - 1)^n$ et retrouver la limite de la suite.

On suppose maintenant que $u_0 < 0$**.**

f. Montrer que pour tout entier n, $u_n < 0$.

g. En déduire que (u_n) est croissante puis qu'elle converge vers 0.

Exercice 29 (★)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (1-u_n)^2 \end{cases}$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto (1-x)^2$.

1) ***a.*** Etudier les variations de la fonction f.

b. Vérifier que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.

c. Déterminer les points fixes de la fonction f.

d. Préciser le sens de variation de la fonction $g = f \circ f$ sur $[0,1]$.

2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

3) ***a.*** Démontrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs dans $[0,1]$.

b. Démontrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. Préciser leur monotonie.

c. Justifier que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. On note respectivement ℓ_1 et ℓ_2 les limites des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

d. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

e. Déterminer ℓ_1 et ℓ_2.

Exercice 30. (☆)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Montrer que tout point fixe de f est un point fixe de $f \circ f$.

2. L'implication réciproque est-elle vérifiée ?

Exercice 31. (★)

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(2u_n + 1) \end{cases}$

a. Montrer que (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N} : 1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

b. Étudier le sens de variation de (u_n)

c. En déduire que (u_n) est convergente vers une limite ℓ telle que : $1 \leqslant \ell \leqslant 2$.

IAF pour l'étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 32. (★★)

Soit la suite la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

On pose $f(x) = \sqrt{x+1}$.

a. Montrer que $[0,2]$ est stable par f et : $\forall x \in [0,2], |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

b. Déterminer les points fixes de f. Notons r l'unique point fixe dans $[0,2]$.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

d. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{|u_n - r|}{2}$ puis que $|u_n - r| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$

e. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

f. Déterminer un entier N tel que $|u_N - r| \leqslant 10^{-9}$.

g. Écrire un programme **Scilab** donnant une valeur approchée de r à 10^{-9} près.

Exercice 33. (★★)

On considère la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$.

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,1]$, que l'on notera α.

2. Montrer que l'intervalle $[0,1]$ est stable par f.
En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$.

3. ***a)*** Montrer : $\forall x \in [0,1],\ |f'(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}$

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}} |u_n - \alpha|$.

c) Puis : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n$.

d) En déduire enfin que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4. Écrire un programme **Scilab** donnant une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

Exercice 34 (★★)

Soit $f : x \mapsto x^2 + \frac{3}{16}$ et (u_n) la suite définie par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = \frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$

a. Calculer u_1.

b. Déterminer les limites possibles de la suite.

c. Démontrer que $f\left(\left[0, \frac{7}{16}\right]\right) \subset \left[0, \frac{7}{16}\right]$.

d. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in \left[0, \frac{7}{16}\right]$.

e. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| u_{n+1} - \frac{1}{4} \right| \leqslant \frac{7}{8} \left| u_n - \frac{1}{4} \right|$.

f. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| u_n - \frac{1}{4} \right| \leqslant \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} \frac{7}{16}$.

g. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 35 (★★)*(d'après* `EML 2001`*)*

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$ sur $]0, +\infty[$.

a) Calculer $f'(x)$.

b) Montrer : $\forall x \in \,]0, +\infty[\,, f''(x) = \dfrac{e^x}{(e^x - 1)^3}\ (xe^x - 2e^x + x + 2)$.

c) Étudier les variations de la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $[0, +\infty[$, par : $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$.
En déduire : $\forall x \in \,]0; +\infty[\,, f''(x) > 0$.

d) En déduire le sens de variation de f (on admettra que $f'(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$).

On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

e) On considère la suite (u_n) par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array} \right.$

Montrer : $\forall x \in \,]0, +\infty[\,, |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

f) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \,]0, +\infty[$.

g) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ln(2)| \leqslant \dfrac{1}{2}\, |u_n - \ln(2)|$.

h) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ln(2)| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ln(2)|$.

i) Établir que la suite $(u_n)_{n>0}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 36 (★)*(d'après* `EML 2014`*)*

On considère l'application $\varphi : x \mapsto e^x - xe^{\frac{1}{x}}$ sur $]0, +\infty[$.
On admet : $2 < e < 3$.

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0, +\infty[$.
Calculer pour tout x de $]0, +\infty[$, $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$, et montrer :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[,\ \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x + 1}{x^5}\ e^{\frac{1}{x}}$$

2. Étudier le sens de variation de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.
En déduire le sens de variations de φ', et montrer :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[,\ \varphi'(x) \geqslant e$$

3. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

4. Déterminer la limite de $\dfrac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$, et la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. On admet : $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer : $\forall x \in [3, +\infty[,\ \varphi(x) \geqslant ex$.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \varphi(u_n)$$

6. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n evxiste et $u_n \geqslant 3e^n$.

7. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et que u_n tend vers $+\infty$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.

8. Écrire un programme **Scilab** qui calcule et affiche le plus petit entier entier naturel tel que : $u_n \geqslant 10^3$.

9. Quelle est la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$?

Suites implicites

Exercice 37. (★★)
On définit sur $\mathbb{R}^{+*}$ la fonction f par : $f(x) = x + \ln x$.

a. Dresser le tableau de variations de f.

b. Montrer que l'équation $f(x) = n$ a une unique solution dans $\mathbb{R}^{+*}$.
On la note u_n.

c. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 38 (★)
Pour tout entier naturel n, on définit l'équation (E_n) par :

$$\ln(x+n) = \frac{n}{x}$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'équation (E_n) admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée u_n.

b. Déterminer u_0.

c. Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n : x \mapsto \ln(x+n) - \dfrac{n}{x}$.
Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

d. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, puis montrer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 0$$

e. En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 39 (★★)*(d'après* `EDHEC 2008`*)*
Pour tout entier naturel n non nul, on considère $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} + nx$. On appelle $(\mathscr{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) ***a.*** Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.

b. En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) ***a.*** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

b. Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n, de $(\mathscr{C}_n)$.

c. Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ en A_1 puis tracer la droite (T_1) ainsi que l'allure de la courbe $(\mathscr{C}_1)$.

3) ***a.*** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.

b. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.

c. En déduire la limite de la suite (u_n).

d. En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

Exercice 40. (★★★)
On considère les fonctions $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$.
On s'intéresse maintenant à la suite (x_n).

b. Démontrer que, pour tout $n > 0$: $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.
En déduire : $\forall n > 0,\ x_n < x_{n+1}$.

c. Démontrer que (x_n) converge et que sa limite ℓ est telle que $0 < \ell \leqslant 1$.

d. Démontrer : $\forall n > 0,\ x_n \leqslant \ell$.

e. En procédant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

Exercice 41 (★★★)*(d'après* `EML 1994`*)*

1) On considère la fonction f définie sur $[0,\dfrac{1}{2}]$ par $f(x)=2\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}$.

a. Etudier les variations de la fonction f.

b. Montrer que f admet une fonction réciproque que l'on notera g.

c. Dresser le tableau de variations de g.

d. La fonction g est-elle dérivable en 0 ? En $\sqrt{\dfrac{2}{\mathrm{e}}}$?

2) ***a.*** Pour tout entier n tel que $n \geq 2$, montrer que l'équation, d'inconnue x : $f(x)=\dfrac{1}{n}$, admet une unique solution dans le segment $[0,\dfrac{1}{2}]$.
On notera a_n cette solution.

b. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

c. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers 0.

Exercice 42. (★★)
On définit pour tout $n\in\mathbb{N}$ la fonction f_n par : $f_n(x)=x^5+n\times x-1$.

a. Faire l'étude de la fonction f_n.

b. Montrer que pour tout $n\geqslant 1$, il existe une unique solution à l'équation $f_n(x)=0$. On la notera u_n.

c. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leqslant u_n\leqslant \frac{1}{n}$.