CH XII : Comparaisons de fonctions et développements limités

Notations et définitions utiles

Définition *(notion d'adhérence)*

- On appelle adhérence de l'intervalle I, et on note $\overline{I}$, l'intervalle I auquel on a rajouté ses bornes finies. Plus précisément, on a :
  1) si I à bornes finies $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (avec $a < b$) : alors $\overline{I} = I \cup \{a,b\} = [a,b]$.
  ($\hookrightarrow$ vrai pour $I =]a,b[$, $I =]a,b]$, $I = [a,b[$, $I = [a,b]$)
  2) si I à borne(s) infinie(s) :
  × si $I =]-\infty, b[$ ou $I =]-\infty, b]$, alors $\overline{I} =]-\infty, b]$,
  × si $I =]a, +\infty[$ ou $I = [a, +\infty[$, alors $\overline{I} = [a, +\infty[$,
  × si $I =]-\infty, +\infty[$, alors $\overline{I} =]-\infty, +\infty[$.

Définition *(notion de voisinage d'un point)*

Voisinage d'un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \overline{I}$.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (f est une fonction définie sur I).

- On appelle **voisinage** (fermé) de x_0 tout segment de la forme :
  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ où α est un réel tel que $\alpha > 0$.
- On appelle **voisinage épointé** (fermé) de x_0 tout ensemble de la forme $V \setminus \{x_0\}$ où V est un voissinage de x_0.
  Autrement dit, un voisinage épointé de x_0 est un ensemble de la forme : $[x_0 - \alpha, x_0[\cup]x_0 + \alpha]$ où α est un réel tel que $\alpha > 0$.
- On dit qu'une propriété relative à f est vraie **au voisinage** de x_0 s'il existe $\alpha > 0$ tel que la propriété est vraie sur $I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Remarque
On ne considère ici que des voisinages centrés en x_0. En général, un voisinage (fermé) de x_0 est un segment $[x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_2]$ avec $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$.
Autrement dit, c'est un segment qui contient x_0 et non réduit à $\{x_0\}$.

Définition *(notion de voisinage de l'infini)*

Voisinage de $+\infty$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémité $+\infty$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur I.

- On appelle **voisinage** (fermé) de $+\infty$ tout intervalle de la forme :
  $[A, +\infty[$ où A est un réel (tel que $A > 0$).
- On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage** de $+\infty$ s'il existe A (> 0) tel que la propriété est vraie sur $I \cap [A, +\infty[$.

Voisinage de $-\infty$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémité $-\infty$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur I.

- On appelle **voisinage** (fermé) de $-\infty$ tout intervalle de la forme :
  $]-\infty, -B]$ où B est un réel (tel que $B > 0$).
- On dit qu'une propriété est vraie **au voisinage** de $-\infty$ s'il existe B (> 0) tel que la propriété est vraie sur $I \cap]-\infty, -B]$.

Remarque

- La notion de voisinage permet de formaliser l'idée de propriété vérifiée « à proximité » d'un point x_0 ou « à proximité » de l'infini.
- On trouve naturellement la notion de voisinage lorsque l'on s'intéresse au comportement local d'une fonction. Par exemple, dire que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie sur un intervalle I) admet la limite ℓ en $x_0 \in I$, c'est dire que $f(x)$ peut approcher ℓ aussi près que l'on veut pour peu que x soit suffisamment proche de x_0. Cela s'exprime comme suit :

$$\forall v \in \mathcal{V}_\ell, \exists U \in \mathcal{V}_{x_0}, \forall x \in I \cap U, \ f(x) \in V$$

ou encore : $\boxed{\forall v \in \mathcal{V}_\ell, \exists U \in \mathcal{V}_{x_0}, \forall x \in I, x \in U \ \Rightarrow \ f(x) \in V}$.

Il est à noter que cette définition est valable pour x_0 (resp. ℓ) fini ou non.

I. Relations de comparaisons et théoème des croissances comparées

I.1. Négligeabilité

Définition

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de x_0.

- On dit que f **est négligeable devant** g **en** x_0 si :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

- Si c'est le cas, on dit que « f est un petit o de g en x_0 » (o = 15$^{\text{ème}}$ lettre de l'alphabet) et on note : $f(x) = \underset{x \to x_0}{o}\, g(x)$.

- On utilise aussi parfois la notation : $f(x) \underset{x_0}{<<} g(x)$.

  Cette notation trompeuse (à ne surtout pas confondre avec $f(x) \leqslant g(x)$!) est réservée à l'écriture d'échelles de comparaison asymptotiques.

I.2. Croissances comparées

Théorème 1.

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0}$$

et

$$\boxed{\forall a > 0, \forall q > 1, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{q^x} = 0}$$

Remarque

- On peut écrire le résultat de ce théorème sous la forme d'une échelle de comparaison asymptotique :

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, \forall q > 1, \ (\ln x)^b \underset{+\infty}{<<} x^a \underset{+\infty}{<<} q^x}$$

- Cela signifie que la croissance asymptotique (*i.e.* en $+\infty$) logarithmique est beaucoup plus faible que la croissance asymptotique polynomiale qui est elle-même beaucoup plus faible que la croissance asymptotique exponentielle.

- Il faut savoir lire ce théorème dans l'autre sens :

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, q > 1, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b} = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{q^x}{x^a} = +\infty}$$

- Classiquement, on pourra choisir $q = \mathrm{e}^1$ ou $q = \mathrm{e}^2$, ou $q = \mathrm{e}^c$ avec $c > 0$ (on a bien $\mathrm{e}^c > 1$). Ceci permet de comparer le comportement asymptotique de $\mathrm{e}^{c\,x}$ et x^a. Plus précisément : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{c\,x}}{x^a} = +\infty$.

- On en déduit aussi que : $\boxed{\forall a > 0, \forall r \in]0,1[, \quad \lim_{x \to +\infty} x^a\, r^x = 0}$

  Il suffit de remarquer que si $r \in]0,1[$, alors $q = \dfrac{1}{r} > 1$.

  On a alors : $x^a\, r^x = x^a \left(\dfrac{1}{q}\right)^x = \dfrac{x^a}{q^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

- Ainsi que : $\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, \quad \lim_{x \to 0^+} x^a\, (\ln x)^b = 0}$

  La démonstration se fait grâce au changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$.

I.3. Équivalence

I.3.a) Définition

Définition

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de x_0.

- On dit que f **est équivalente à** g **en** x_0 et on note $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ si :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$$

Remarque

- Trouver une fonction g équivalente à une fonction f en x_0 c'est trouver une fonction qui a le même comportement que f à proximité de x_0. Ainsi, si l'on se place à proximité de x_0, les courbes représentatives de f et de g apparaîtront comme confondues.
- Le but est de trouver une fonction g dont l'expression est plus simple que la fonction f (penser par exemple aux fonctions polynomiales).
- En première année, on parle plutôt de recherche de termes dominants. Rappelons brièvement ce procédé. Lorsque l'on cherche la limite d'une `SOMME` de termes, on met en facteur celui qui a la plus forte croissance (on le repère souvent à l'aide du théorème des croissances comparées). Ce faisant, le deuxième facteur obtenu a pour limite 1.
  Voici un exemple de recherche de terme dominant en $+\infty$:

$$\frac{-4x^2\,\mathrm{e}^x + 2\ln(x) + 5x^7\,\ln(x)}{2x^3+5} = \frac{-4\cancel{x^2}\,\mathrm{e}^x}{2x^{\cancel{3}}}\;\frac{1 + \frac{2\ln(x)}{-4x^2\,\mathrm{e}^x} + \frac{5x^7\,\ln(x)}{-4x^2\,\mathrm{e}^x}}{1+\frac{5}{2x^3}}$$

avec $1 + \dfrac{2\ln(x)}{-4x^2\,\mathrm{e}^x} + \dfrac{5x^7\,\ln(x)}{-4x^2\,\mathrm{e}^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $1 + \dfrac{5}{2x^3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

I.3.b) Propriétés générales

Théorème 2.

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, des fonctions.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$). (lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de x_0)

La relation $\underset{x \to x_0}{\sim}$ vérifie les propriétés suivantes.

1) Réflexivité :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)}$$

2) Symétrie :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \;\Rightarrow\; g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)}$$

3) Transitivité :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x) \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x)}$$

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire : $\dfrac{f(x)}{f(x)} = 1 \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1$.

2) Il suffit d'écrire : $\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1} = 1$.

3) Il suffit d'écrire : $\dfrac{f(x)}{h(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \times \dfrac{g(x)}{h(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$. □

Remarque

- La relation $\underset{x \to x_0}{\sim}$ est une relation binaire réflexive, symétrique, transitive.
  Les relations vérifiant ce type de propriétés sont appelées des **relations d'équivalence**.

- Nous avons déjà rencontré ce type de relations binaires :
  - × $\underset{x \to x_0}{\sim}$ est une relation d'équivalence sur les fonctions définies au voisinage du point x_0.
  - × $\Leftrightarrow$ est une relation d'équivalence sur les propriétés mathématiques.
  - × la relation de similitude est une relation d'équivalence sur les matrices.

I.3.c) Équivalents et limites

Théorème 3.

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, des fonctions.
Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).
(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de x_0)

1) *Calcul de limites à l'aide d'un équivalent :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell}$$

(avec ℓ limite éventuellement infinie)

2) *Calcul d'équivalents à l'aide d'une limite :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \ell}$$

(avec ℓ limite finie)

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)}$$

(avec ℓ limite finie)

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire : $f(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \times g(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 1 \times \ell = \ell$.

2) Il suffit d'écrire : $\dfrac{f(x)}{\ell} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell} = 1$.

3) Il suffit d'écrire : $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \dfrac{\ell}{\ell} = 1$. □

Remarque

- L'hypothèse $\ell \neq 0$ est primordiale pour les propriétés du point *2*.
  Par exemple :
  $$\frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{mais} \quad \cancel{\frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}}$$
- Au passage, précisons que l'on ne doit `JAMAIS` écrire : $\cancel{f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} 0}$.
  - × car la définition établie dans ce cours ne nous permet tout simplement pas de définir correctement cette écriture.
  - × car c'est un cas qui a peu d'intérêt pratique puisqu'il signifie que f est nulle dans un voisinage de 0.
- Comme on l'a vu précédemment, la recherche d'équivalents (ou de termes dominants) ne se fait que lorque l'on considère une `SOMME` de termes. Cependant, on peut parfois aussi simplifier les produits lorsque l'un des termes admet une limite finie **non nulle** au voisinage du point considéré.
  Par exemple :
  - × $e^x \ln(x) \underset{x \to 0}{\sim} 1 \times \ln(x) = \ln(x)$.
  - × $\dfrac{\ln(x)}{2\,e^{\frac{1}{x}}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{2\,e^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{2} \ln(x)$.
  - × $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+x}} \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1}} = e^{\frac{1}{x}}$.

  (on se sert ici de la compatibilité de $\underset{x \to x_0}{\sim}$ avec le produit : cf théorème suivant)

I.3.d) Calculs d'équivalents en pratique : compatibilité avec le produit, le quotient, l'élévation à la puissance α

Théorème 4.

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, des fonctions.
Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).
(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de x_0)

1) *Compatibilité avec le produit :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\times h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\times t(x)}$$

2) *Compatibilité avec le quotient :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \frac{g(x)}{t(x)}}$$

3) *Compatibilité avec l'élévation à la puissance $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \quad \Rightarrow \quad \big(f(x)\big)^n \underset{x\to x_0}{\sim} \big(g(x)\big)^n}$$

4) *Compatibilité avec l'élévation à la puissance $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ g > 0 \text{ dans un voisinage de } x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \big(f(x)\big)^\alpha \underset{x\to x_0}{\sim} \big(g(x)\big)^\alpha}$$

5) *Compatibilité avec la valeur absolue :*

$$\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \quad \Rightarrow \quad \big|f(x)\big| \underset{x\to x_0}{\sim} \big|g(x)\big|}$$

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire :

$$\frac{f(x)\times h(x)}{g(x)\times t(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{h(x)}{t(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1\times 1 = 1$$

2) Il suffit d'écrire :

$$\frac{\frac{f(x)}{h(x)}}{\frac{g(x)}{t(x)}} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{t(x)}{h(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 1\times 1 = 1$$

3) Deux cas se présentent.

× si $n = 0$: $\big(f(x)\big)^0 = 1 \underset{x\to x_0}{\sim} 1 = \big(g(x)\big)^0$.

× si $n > 0$: alors, par compatibilité avec le produit :

$$\big(f(x)\big)^n = f(x)\times \ldots \times f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\times \ldots \times g(x) = \big(g(x)\big)^n$$

4) Comme $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$, f et g ont même signe (strictement positif) au voisinage de x_0. D'autre part, pour tout x au voisinage de x_0 :

$$\frac{\big(f(x)\big)^\alpha}{\big(g(x)\big)^\alpha} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^\alpha = \exp\left(\alpha \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\right) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \exp(\alpha\times 0) = e^0 = 1$$

5) Il suffit d'écrire :

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} |1| = 1$$

□

Exemple

- $e^x + \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$.
- $e^x \times \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x \times \ln(x)$.
  (on ne risque pas de simplifier un produit si aucun des deux termes de ce produit ne se simplifie)
- $(e^x+1)\ \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x \ln(x)$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{e^x}} = \dfrac{1}{e^{\frac{x}{2}}}$.
- $\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}$.
- Limite en $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{(3x+4)^3(8x^{-2}+2x^{-4})}{9x+10}$?
  Tout d'abord :
  $$\frac{(3x+4)^3\,(8x^{-2}+2x^{-4})}{9x+10} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{(3x)^3\,(8x^{-2})}{9x} = \frac{3^3x^3\times 8x^{-2}}{9x} = \frac{3^{\cancel{3}}\ 8\cancel{x}}{\cancel{9}\cancel{x}} = 24$$
- Limite en $+\infty$ de $\ln\left(\dfrac{e^x+x^2}{e^x-1}\right)$?
  Tout d'abord :
  $$\frac{e^x+x^2}{e^x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^x} = 1$$
  Donc, par composition des limites :
  $$\ln\left(\frac{e^x+x^2}{e^x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
  Par contre : $\cancel{\ln\left(\dfrac{e^x+x^2}{e^x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(1) = 0}$.

Remarque

Le théorème précédent stipule que l'opérateur $\underset{x\to x_0}{\sim}$ est compatible avec les opérations de produit et quotient.
Il faut faire attention, ce n'est pas le cas de toutes les opérations.

1) Considérons l'exemple suivant.
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x+\sqrt{x} \\ g(x) = x+\ln(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$$
$$\left.\begin{array}{l} h(x) = -x \\ t(x) = -x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} t(x)$$
mais $\sqrt{x} \ = \ \cancel{f(x)+h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)+t(x)} \ = \ \ln(x)$.

$$\boxed{\text{On ne peut sommer des équivalents !}}$$

2) Considérons l'exemple suivant.
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x+1 \\ g(x) = x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$$
mais $e^{x+1} \ = \ \cancel{e^{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{g(x)}} \ = \ e^x$ puisque $\dfrac{e^{x+1}}{e^x} = e \ \cancel{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}} \ 1$

De manière générale, on en peut appliquer de fonction de part et d'autre d'une équivalence !

Ici, on avait en fait le résultat suivant :

$$\boxed{\begin{array}{rl} e^{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{g(x)} & \Leftrightarrow \ \dfrac{e^{f(x)}}{e^{g(x)}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \ \Leftrightarrow \ e^{f(x)-g(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \\ & \Leftrightarrow \ f(x)-g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}}$$

II. Notion de développement limité

II.1. Rappel : taux d'accroissement et dérivabilité

II.1.a) Taux d'accroissement

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On appelle **taux d'accroissement** de f en x_0 la fonction :

$$\tau_{x_0}(f) \quad : \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array} \right.$$

Interprétation physique

Un taux d'accroissement peut être pensé comme une **vitesse moyenne** : la quantité $f(x) - f(x_0)$ représente un déplacement effectué sur un laps de temps $x - x_0$.

- La vitesse moyenne de déplacement d'une voiture entre deux moments t_1 et t_2, est définie par un taux d'accroissement :

$$\text{Vitesse moyenne} = \frac{km(t_2) - km(t_1)}{t_2 - t_1}$$

  où $km(t)$ désigne le nombre de kilomètres effectués du temps 0 jusqu'à la date t. Sauf à considérer que l'on peut effectuer des kilomètres négatifs, cette vitesse moyenne est toujours positive.

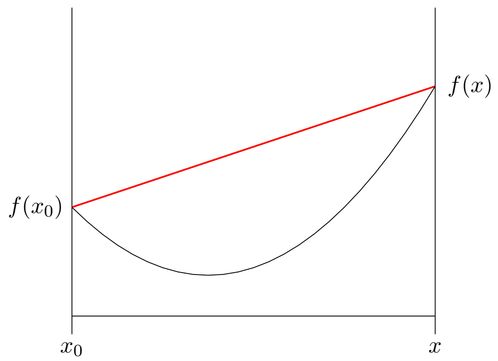
- On peut aussi citer le taux d'accroissement d'une population :

$$\text{Accroissement démographique} = \frac{pop(t_2) - pop(t_1)}{t_2 - t_1}$$

  où $pop(t)$ désigne la taille de la population du temps 0 jusqu'à la date t. Notez que l'on peut avoir un taux d'accroissement négatif : cela signifie que la population a diminué.

Interprétation graphique

Notons $M(x, f(x))$ et $M_0(x_0, f(x_0))$ points de la courbe représentative de f. Alors $\tau_{x_0}(f)(x)$ est la pente de la corde M_0M.



II.1.b) Dérivée d'une fonction en un point

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

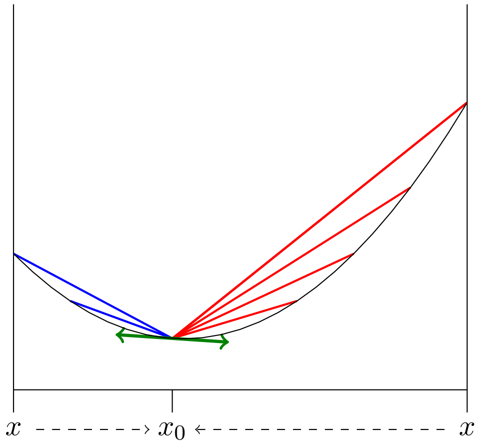
- On dit que f **est dérivable en** x_0 lorsque la fonction $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie en x_0.
- Lorsque cette limite existe, elle est appelée **nombre dérivé de** f **en** x_0 et est noté $f'(x_0)$. Autrement dit :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Interprétation physique

- Le taux d'accroissement s'interprétant comme une vitesse moyenne, sa limite en un point s'interprète comme une vitesse instantanée.
- Par exemple, si une voiture a effectué 200 km en 2H, c'est qu'elle a roulé en moyenne à 100 km/H. Mais elle a pu effectuer des pointes à 130 km/H.

Interprétation graphique



Remarque

- Si f est dérivable en x_0, en effectuant le changement de variable $h = x - x_0$, on obtient :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$$

(c'est une définition équivalente)

- Dire qu'une fonction f est dérivable en x_0 c'est dire que la fonction taux d'accroissement $\tau_{x_0}(f)$ est continue en x_0 (on peut alors prolonger cette fonction par continuité en posant $\tau_{x_0}(f)(x_0) = f'(x_0)$).

II.2. Développement limité à l'ordre 1 au voisinage d'un point

II.2.a) $\mathrm{DL}_1(x_0)$ et approximation affine de f en x_0

Définition $\mathrm{DL}_1(x_0)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

- On dit que f possède **un développement limité d'ordre** 1 **en** x_0 s'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie au voisinage de x_0) tels que, au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = a + b\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0}$$

Remarque

- Si f admet un $\mathrm{DL}_1(x_0)$ alors on a : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - (a + b\,(x - x_0)) = 0$.
  Ainsi, les courbes représentatives de f et de la droite d'équation $y = a + b\,(x - x_0)$ ont tendance à se confondre à proximité de x_0.
- C'est pourquoi on dit que la droite d'équation $y = a + b\,(x - x_0)$ est une **approximation affine** de f en x_0.
  $\hookrightarrow$ c'est la droite qui représente le mieux la fonction f au voisinage de x_0.

Théorème 5.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ est dérivable} \\ \text{en } x_0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} f \text{ admet un développement limité} \\ \text{d'ordre } 1 \text{ en } x_0 \end{array}}$$

Lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont : $\left\{ \begin{array}{l} a = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \end{array} \right.$

Ainsi, si f est dérivable en x_0, il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \quad \textit{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0}$$

Démonstration.

(⇒) Supposons f dérivable en x_0.

Notons $\varepsilon(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{array} \right.$

(c'est le ε donné par la formule finale)

On a alors $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$ et de plus, pour tout $x \neq x_0$:

$$\begin{array}{lrcl} & \varepsilon(x) & = & \tau_{x_0}(f)(x) - f'(x_0) \\ \text{donc} & \varepsilon(x) + f'(x_0) & = & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ \text{et} & f(x) - f(x_0) & = & f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \end{array}$$

Cette formule est aussi valable pour $x = x_0$. Finalement, on a bien :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0) + (x - x_0)\ \varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

(⇐) Si f possède un développement limité d'ordre 1 alors :

× $a = f(x_0)$ (le développement est vérifié en x_0 !)

× $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b + \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} b$

Comme $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie en x_0, on en conclut que f est dérivable en x_0. De plus, d'après le point précédent :

$$b = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

□

Remarque

- D'après ce théorème, il y a unicité (lorsqu'il existe) du développement limité de f d'ordre 1 en x_0.
- Un développement limité établit une égalité vérifiée au voisinage de x_0. Cela signifie qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x)$$

II.2.b) Tangente de f en x_0

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

- Si f est dérivable en x_0, on appelle **tangente de f en x_0** la droite passant par $(x_0, f(x_0))$ de coefficient directeur $f'(x_0)$.
- Autrement dit, c'est la droite d'équation : $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0)}$

Remarque

Il arrive parfois que la fonction f possède une dérivée à gauche et à droite en x_0 sans pour autant être dérivable en x_0. Plus précisément, c'est le cas lorsque $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$. On introduit alors les notions suivantes.

- La demi-tangente à gauche de f en x_0 est la droite d'équation : $y = f(x_0) + f'_g(x_0)\,(x - x_0)$.
- La demi-tangente à gauche de f en x_0 est la droite d'équation : $y = f(x_0) + f'_d(x_0)\,(x - x_0)$.

Définition *(Tangente de la forme $x = x_0$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

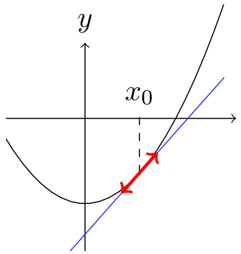
Supposons que :

× f est continue en x_0

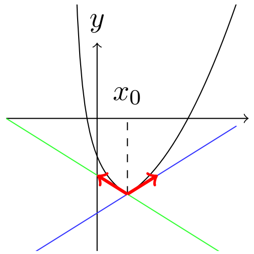
× $\lim\limits_{x \to x_0} \tau_{x_0}(f)(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) *(f est donc non dérivable en x_0)*

- On appelle **tangente verticale de f en x_0** la droite verticale passant par le point $(x_0, f(x_0))$.
- Autrement dit, c'est la droite d'équation $x = x_0$.

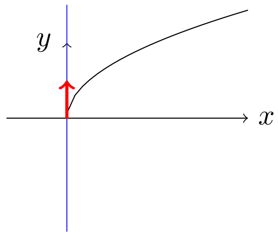
Représentation graphique



Tangente



Demi-tangentes



Tangente verticale

II.2.c) $\mathrm{DL}_1(x_0)$ et négligeabilité / équivalence

Dans l'écriture du $\mathrm{DL}_1(x_0)$ de f, on a introduit l'écriture $(x - x_0)\,\varepsilon(x)$ où la fonction ε est telle que $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- La fonction $x \mapsto (x - x_0)\ \varepsilon(x)$ est négligeable devant $x \mapsto (x - x_0)$ en x_0.
  En effet :
  $$\frac{(\cancel{x - x_0})\,\varepsilon(x)}{\cancel{x - x_0}} \ = \ \varepsilon(x) \ \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \ 0$$
- C'est une écriture générique d'une fonction négligeable devant $x \mapsto (x - x_0)$ en x_0. Cette écriture étant un peu lourde, on utilisera généralement la notation $\underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)$.

Formule de Taylor-Young (à l'ordre 1)
Si f est dérivable en x_0, son $\mathrm{DL}_1(x_0)$ s'écrit sous la forme :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)}$$

Exemple
Avec cette notation, au voisinage de 0, on a :

$$\boxed{\ln(1+x) = x + \underset{x \to 0}{o}(x)} \qquad \boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \underset{x \to 0}{o}(x)}$$

$$\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}\,x + \underset{x \to 0}{o}(x)} \qquad \boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + \underset{x \to 0}{o}(x)}$$

Remarque

- Il est à noter que le premier terme non nul de ces développements fournit un équivalent de la fonction considérée.
  On retrouve ainsi : $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x \quad$ (*i.e.* $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$).
  (ce n'est qu'une écriture rigoureuse du fait que $y = \ln(1+x)$ peut-être confondue avec sa tangente $y = x$ à proximité de 0)
- D'autre part, on a aussi : $\mathrm{e}^x \underset{x \to 0}{\sim} 1 + x$.
  (ce n'est qu'une écriture rigoureuse du fait que $y = e^x$ peut-être confondue avec sa tangente $y = 1 + x$ à proximité de 0)
- Enfin, on peut aussi écrire que : $\mathrm{e}^x - 1 = x + \underset{x \to 0}{o}(x)$.
  On retrouve alors : $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x \to x_0}{\sim} x \quad$ (*i.e.* $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$).
  (ce n'est qu'une écriture rigoureuse du fait que $y = e^x - 1$ peut-être confondue avec sa tangente $y = x$ à proximité de 0)

II.3. Développement limité à l'ordre 2 au voisinage d'un point

II.3.a) Définition

Définition $\mathrm{DL}_2(x_0)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

- On dit que f possède **un développement limité d'ordre** 2 **en** x_0 s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$ une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie au voisinage de x_0) tels que, au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = a + b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\,\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0}$$

- Ce que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{f(x) = a + b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^2\big)}$$

Remarque

- Si f admet un $\mathrm{DL}_2(x_0)$ alors : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - (a + b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2) = 0$.
  Ainsi, les courbes représentatives de f et $g : x \mapsto a + b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2$ ont tendance à se confondre à proximité de x_0.
- Un $\mathrm{DL}_2(x_0)$ fournit une **approximation quadratique** de f en x_0.
- Dans le programme ECE, on se limite aux développements limités à l'ordre 2. Mais on pourrait définir de même la notion de développement limité en x_0 à tout ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

II.3.b) Formule de Taylor-Young

Théorème 6.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

f est deux fois dérivable en x_0	$\Rightarrow$	*f admet un développement limité d'ordre 2 en x_0*

- *Lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont :*

$$\begin{cases} a = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \\ c = \dfrac{f''(x_0)}{2} \end{cases}$$

- *Ainsi, si f est deux fois dérivable en x_0, il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie au voisinage de x_0) telle que, au voisinage de x_0 :*

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\,\varepsilon(x)}$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- *Ce que l'on peut encore écrire :*

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^2\big)}$$

Démonstration.
Admis. □

Remarque

- D'après ce théorème, il y a unicité (lorsqu'il existe) du développement limité de f d'ordre 2 en x_0.
- Ce théorème est énoncé avec l'hypothèse : f deux fois dérivable en x_0. Évidemment, ce théorème est vérifié avec l'hypothèse plus forte : f est de classe $\mathcal{C}^2$ en x_0. C'est l'hypothèse que l'on utilisera aux concours.
- Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) en x_0, on peut écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre n :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}\big((x-x_0)^n\big)}$$

II.3.c) Développements limités usuels en 0

Théorème 7.
Rappelons que si f est deux fois dérivable en 0 alors son $\mathrm{DL}_2(0)$ s'écrit :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)$$

- $\boxed{e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)}$
- $\boxed{\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)}$ *et* $\boxed{\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)}$
- $\boxed{\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)}$ *et* $\boxed{\dfrac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)}$
- $\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)}$

On en déduit notamment : $\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)}$

II.3.d) Calcul pratique des développements limités

Somme et produit de développement limités

On l'a déjà dit : un développement limité établit une égalité vérifiée au voisinage de x_0. Ainsi, toutes les opérations raisonnables sur les égalités sont envisageables sur les développements limités. On pourra notamment réaliser des **sommes** (ce qui n'autorise toujours pas à sommer des équivalents !) et des **produits** de développements limités.

Exercice

1) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+x} + x$.

2) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $x \mapsto e^x - e^{-x}$.

3) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $x \mapsto (1+x)\,e^x$.

Théorème 8. *(manipulation pratique des $\underset{x\to 0}{o}(.)$)*
Afin de déterminer de matnière mécanique le $\mathrm{DL}_2(0)$ d'une somme ou d'un produit de fonctions, on pourra utiliser les propriétés suivantes.
Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

1) $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) + \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big)}$ *2)* $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) - \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big)}$

3) Si on suppose de plus $m < n$: $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\big(x^m\big) + \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^m\big)}$

4) $\boxed{x^m \times \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^{m+n}\big)}$

5) $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\big(x^m\big) \times \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^{m+n}\big)}$

6) Pour tout $c \in \mathbb{R}$: $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\big(c\,x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big)}$

Développement limités et composition

On peut aussi, sous certaines hypothèses, agir par composition. Considérons une fonction f définie dans un voisinage de 0 et deux fois dérivable en 0.

- D'après la formule de Taylor-Young, pour tout u au voisinage de 0, on a :

$$f(u) = f(0) + f'(0)\,u + \frac{f''(0)}{2}\,u^2 + u^2\,\varepsilon(u)$$

  où ε est une fonction définie au voisinage de 0 et telle que : $\lim\limits_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0$.

  Soit x dans un voisinage de 0. Alors $u = 2x$ est lui aussi dans un voisinage de 0. En appliquant l'égalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(0) + f'(0)\,(2x) + \frac{f''(0)}{2}\,(2x)^2 + (2x)^2\,\varepsilon(2x) \\ &= f(0) + 2\,f'(0)x + 2\,f''(0)\,x^2 + x^2\,\big(4\,\varepsilon(2x)\big) \end{aligned}$$

  Et comme, par composition de limite : $\lim\limits_{x\to 0} 4\,\varepsilon(2x) = 4 \times 0 = 0$, l'égalité au-dessus est bien le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $g : x \mapsto f(2x)$.

- On peut procéder de même pour $u = \psi(x)$ si l'on sait que $\psi(x)$ est dans un voisinage de 0 lorsque x l'est (autrement dit pour une fonction ψ telle que : $\psi(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$). On définit alors le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $g : x \mapsto f\big(\psi(x)\big)$.
- Il est conseillé, lorsque l'on souhaite écrire un $\mathrm{DL}_2(0)$ à l'aide d'une composition, de repasser par l'écriture à l'aide des fonctions ε.

Exercice

1) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $x \mapsto \ln(1+2x)$.

2) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1-2x}$.

3) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

4) Déterminer le développement asymptotique (c'est à dire lorsque x est au voisinage de $+\infty$) de la fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

II.3.e) Position locale d'une courbe par rapport à sa tangente

Théorème 9.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

On supppose de plus que f est deux fois dérivable en x_0.

On a alors, dans un voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x-x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}\big((x-x_0)^2\big)$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)\big) &= \frac{f''(x_0)}{2}\,(x-x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}\big((x-x_0)^2\big) \\ &\underset{x\to x_0}{\sim} \frac{f''(x_0)}{2}\,(x-x_0)^2 \end{aligned}$$

La position locale de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en x_0 est donnée par le signe de $f''(x_0)$. Plus précisément :

× *si $f''(x_0) > 0$, alors, au voisinage de x_0, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de sa tangente.*

× *si $f''(x_0) < 0$, alors, au voisinage de x_0, $\mathcal{C}_f$ est située en-dessus de sa tangente.*