# Feuille d'exercices n°13 : Fonctions réelles de deux variables réelles

**Exercice 15.** (★) *(*`EDHEC 2017`*)*
On considère la fonction $f$ qui à tout couple $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2\ (x-y)^2$$

***1.*** Justifier que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

*Démonstration.*

$$\boxed{\text{La fonction } f : (x,y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2 \text{ car c'est une fonction polynomiale.}}$$

□

***2. a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $f$.

*Démonstration.*
La fonction $f$ étant $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, elle admet des dérivées partielles en tout point de l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- Tout d'abord :
$$\partial_1(f)(x,y) = 4x^3 - 4\ (x-y) = 4x^3 - 4x + 4y$$
- D'autre part :
$$\partial_2(f)(x,y) = 4y^3 - 4\ (x-y)\ (-1) = 4y^3 + 4x - 4y$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)(x,y) = 4\ (x^3 - x + y) \ \text{ et } \ \partial_2(f)(x,y) = 4\ (y^3 + x - y).}$$

□

***b)*** Montrer que le gradient de $f$ est nul si, et seulement si, on a : $\left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right.$.

*Démonstration.*
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \partial_1(f)(x,y) & = & 0 \\ \partial_2(f)(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4\ (x^3 - x + y) & = & 0 \\ 4\ (y^3 + x - y) & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \ \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right.}$$

□

***c)*** En déduire que $f$ possède trois points critiques : $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

*Démonstration.*
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- Par définition d'un point critique :

$$\begin{array}{c}(x,y) \text{ est un point} \\ \text{critique de } f\end{array} \Leftrightarrow \nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{c}(x,y) \text{ est un point} \\ \text{critique de } f\end{array} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y &=& 0 \\ y^3 + x - y &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y &=& 0 \\ y^3 &=& -x^3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y &=& 0 \\ y^3 &=& (-x)^3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y &=& 0 \\ y &=& -x \end{array}\right.$$

*(car la fonction $t \mapsto t^3$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$)*

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - 2x &=& 0 \\ y &=& -x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x\ (x^2 - 2) &=& 0 \\ y &=& -x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x\ (x - \sqrt{2})\ (x + \sqrt{2}) &=& 0 \\ y &=& -x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \ \texttt{OU} \ x = \sqrt{2} \ \texttt{OU} \ x = -\sqrt{2} \\ y = -x \end{array}\right.$$

$$\iff (x,y) \in \left\{(0,0),\ (\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\right\}$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ possède trois points critiques : } (0,0),\ (\sqrt{2},-\sqrt{2}) \text{ et } (-\sqrt{2},\sqrt{2}).}$$

**Commentaire**

- La difficulté de cette question réside dans le fait qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre l'équation $\nabla(f)(x, y) = 0_{\mathbb{R}^2}$.
  On est donc confronté à une question bien plus complexe qu'une résolution de système d'équations linéaires (que l'on résout aisément à l'aide de la méthode du pivot de Gauss).
- Lors de la recherche de points critiques, on doit faire appel à des méthodes ad hoc. Il est par exemple assez fréquent de faire apparaître une équation du type :
  $$\varphi(x) = \varphi(y)$$
  où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction bijective. En réalité, c'est le caractère injectif ($\varphi$ est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ par exemple) qui nous intéresse ici puisqu'il permet de conclure :
  $$x = y$$
  En injectant cette égalité dans la seconde équation, on obtient une nouvelle équation qui ne dépend plus que d'une variable et qu'il est donc plus simple de résoudre.
- Enfin, vérifier que $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont des points critiques ne démontre pas que ce sont les seuls et ne constitue donc pas une réponse à la question.

□

***3. a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de $f$.

*Démonstration.*

- La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynomiale.
  Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tout d'abord :
  $$\partial^2_{11}(f)(x, y) = 4\ (3x^2 - 1)$$
- Ensuite :
  $$\partial^2_{12}(f)(x, y) = 4 = \partial^2_{21}(f)(x, y)$$
  La dernière égalité est obtenue en vertu du théorème de Schwarz puisque la fonction $f$ est $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
- Enfin :
  $$\partial^2_{22}(f)(x, y) = 4\ (3y^2 - 1)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial^2_{11}(f)(x, y) = 4\ (3x^2 - 1),\ \partial^2_{12}(f)(x, y) = 4 = \partial^2_{21}(f)(x, y) \\ \text{et } \partial^2_{22}(f)(x, y) = 4\ (3y^2 - 1)\end{array}}$$

**Commentaire**

- Il faut penser à utiliser le théorème de Schwarz dès que la fonction à deux variables considérée est $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.
- Ici, le calcul de $\partial^2_{12}(f)(x, y)$ et $\partial^2_{21}(f)(x, y)$ est aisé. Il faut alors concevoir le résultat du théorème de Schwarz comme une mesure de vérification : en dérivant par rapport à la $1^{\text{ère}}$ variable puis par rapport à la $2^{\text{ème}}$, on doit obtenir le même résultat que dans l'ordre inverse.

□

***b)*** Écrire la matrice hessienne de $f$ en chaque point critique.

*Démonstration.*
On rappelle que la matrice hessienne de $f$ en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est :

$$\nabla^2(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{11}(f)(x,y) & \partial^2_{12}(f)(x,y) \\ \partial^2_{21}(f)(x,y) & \partial^2_{22}(f)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\ (3x^2-1) & 4 \\ 4 & 4\ (3y^2-1) \end{pmatrix}$$

- On en déduit :

$$\nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (0)^2-1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (0)^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

- Ensuite :

$$\nabla^2(f)\big(\sqrt{2},-\sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (\sqrt{2})^2-1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (-\sqrt{2})^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$\nabla^2(f)\big(-\sqrt{2},\sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (\sqrt{2})^2-1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (-\sqrt{2})^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2(f)\big(\sqrt{2},-\sqrt{2}\big) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} = \nabla^2(f)\big(-\sqrt{2},\sqrt{2}\big)}$$

□

***c)*** Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que $f$ admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

*Démonstration.*
Rappelons tout d'abord que, pour toute matrice $H \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est une valeur propre de } H & \Leftrightarrow & H - \lambda\ I \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(H - \lambda\ I) = 0 \end{array}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} \det\Big(\nabla^2(f)(0,0) - \lambda\ I\Big) & = & \det\left(\begin{pmatrix} -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & = & (-4-\lambda)^2 - 4^2 \\ & = & (4+\lambda)^2 - 4^2 \\ & = & (4+\lambda-4)\ (4+\lambda+4) \ = \ \lambda\ (\lambda+8) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \nabla^2(f)(0,0) \text{ admet pour valeurs propres } 0 \text{ et } -8.}$$

- Et :

$$\begin{array}{rcl} \det\Big(\nabla^2(f)(\sqrt{2},-\sqrt{2}) - \lambda\ I\Big) & = & \det\left(\begin{pmatrix} 20-\lambda & 4 \\ 4 & 20-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ & = & (20-\lambda)^2 - 4^2 \\ & = & (20-\lambda-4)\ (20-\lambda+4) \ = \ (16-\lambda)\ (24-\lambda) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \nabla^2(f)(\sqrt{2},-\sqrt{2}) \text{ et } \nabla^2(f)(-\sqrt{2},\sqrt{2}) \text{ admettent pour valeurs propres } 16 \text{ et } 24.}$$

Ces deux matrices admettent deux valeurs propres strictement positives.
On en déduit que $f$ admet un minimum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Enfin :

$$\begin{array}{rcl} f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) & = & (\sqrt{2})^4 + (-\sqrt{2})^4 - 2\ (\sqrt{2} - (-\sqrt{2}))^2 \\ & = & 4 + 4 - 2\ (2\ \sqrt{2})^2 \\ & = & 8 - 2 \times 4 \times 2 \\ & = & 8 - 16 \ = \ -8 \end{array}$$

Ce minimum local a pour valeur $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8 = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

$\square$

***d)*** Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$.
Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de $f$.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Tout d'abord :

$$f(x, x) = x^4 + x^4 - 2\ (x - x)^2 = 2\ x^4 \geqslant 0$$

- Par ailleurs :

$$\begin{array}{rcl} f(x, -x) & = & x^4 + (-x)^4 - 2\ (x - (-x))^2 \\ & = & 2x^4 - 2\ (2\ x)^2 \\ & = & 2x^4 - 8x^2 \\ & = & 2x^2\ (x^2 - 4) = 2x^2\ (x - 2)\ (x + 2) \end{array}$$

  Comme $x^2 \geqslant 0$, la quantité $f(x, -x)$ est du signe de de $(x - 2)\ (x + 2)$.
  Ainsi, $f(x, -x) < 0$ si $x \in ]-2, 2[\setminus\{0\}$, et $f(x, -x) \geqslant 0$ sinon.

- Enfin, $f(0, 0) = 0$.
  On déduit de ce qui précède que pour tout $x$ au voisinage de $0$ (exclu), on a :

$$f(x, -x) < f(0, 0) < f(x, x)$$

On en conclut qu'au point $(0, 0)$, la fonction $f$ n'admet ni un minimum local, ni un maximum local. Il n'y a pas d'extremum au point $(0, 0)$.

$\square$

***4. a)*** Pour tout $(x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.

*Démonstration.*
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rl} & f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2 \\ = & f(x, y) - (x^4 - 4x^2 + 4) - (y^4 - 4y^2 + 4) - 2\ (x^2 + 2xy + y^2) \\ = & (\cancel{x^4} + \cancel{y^4} - 2\ (x - y)^2) - \cancel{x^4} - \cancel{y^4} + 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8 \\ = & -2x^2 + 4xy - 2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8 \\ = & -8 \end{array}$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2 = -8$.

**Commentaire**

- Il y avait une erreur dans le sujet initial. Il était en effet demandé de calculer :

$$f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2) - 2(x+y)^2$$

Le carré du terme $(y^2-2)^2$ n'était donc pas présent dans les énoncés distribués.

- Il est globalement rare que les sujets contiennent des erreurs. Malheureusement, malgré la relecture soignée des concepteurs, il peut arriver que certaines coquilles subsistent. Un candidat repérant une coquille peut le signaler sur sa copie. Attention cependant au faux positif : signaler qu'on a repéré une coquille alors qu'il n'y en a pas fait plutôt mauvais effet.
- Quand la coquille est avérée, la question sort généralement du barème.
- Ici, on pouvait se douter qu'il y avait un problème car, dans l'expression de $f$, $x$ et $y$ jouent des rôles symétriques ($\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = f(y,x)$). La coquille introduisait une dissymétrie des rôles de $x$ et $y$, ce qui pouvait mettre la puce à l'oreille.

$\square$

***b)*** Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de $f$ ?

*Démonstration.*
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

- D'après la question précédente :

$$\begin{array}{rcl} f(x,y) & = & -8 + \Big((x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2\Big) \\ & \geqslant & -8 \end{array}$$

car on ajoute à $-8$ une somme de carrés.

- On rappelle que $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$. Ainsi :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \leqslant f(x,y)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet aux points } (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ et } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ un minimum global.}}$$

$\square$

***5. a)*** Compléter la deuxième ligne du script suivant afin de définir la fonction $f$.

```
1 function z = f(x,y)
2     z = ---
3 endfunction
4 x = linspace(-2,2,101)
5 y = x
6 fplotd3d(x,y,f)
```

*Démonstration.*
Il suffit de recopier la définition de la fonction $f$.

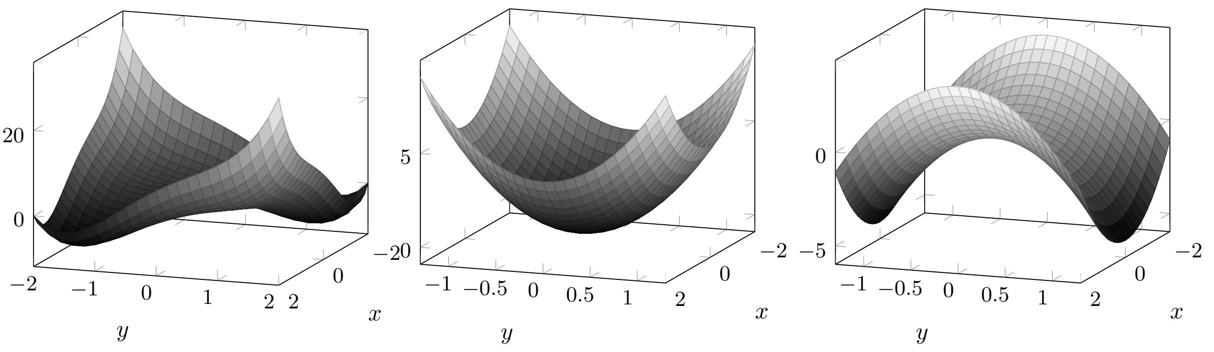
```
2     z = x^4 + y^4 - 2 ⋆ (x - y)^2
```

**Commentaire**

On rappelle qu'il n'est pas obligatoire de recopier tout le programme lorsqu'il est demandé de compléter un programme à trou.

□

***b)*** Le script précédent, une fois complété, renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.




Nappe 1 Nappe 2 Nappe 3

*Démonstration.*

- D'après l'étude précédente, la fonction $f$ possède un minimum global réalisé en les deux points $((\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}))$.
- On peut écarter la deuxième nappe qui représente une fonction n'admettant un minimum global qu'en un point.
- On peut écarter la troisième nappe qui représente une fonction n'admettant pas de minimum global (elle admet par contre un point selle).
- Seule la première nappe représente une fonction admettant un minimum global réalisé en deux points. C'est donc la représentation de la fonction $f$ considéré.

$$\boxed{\text{Le script précédent renvoie la première nappe.}}$$

**Commentaire**

Il était difficile de lire les coordonnées des deux points atteignant le minimum sur l'énoncé original. Pour être certain d'avoir des points (même si la photocopie en noir et blanc rend le graphique peut lisible), il est conseillé de lister les propriétés que doit avoir la nappe représentant $f$.

□

**Exercice 16.** (★) *(*`ECRICOME 2017`*)*
Dans tout l'exercice, $a$ est un réel strictement positif.

## Partie A

On considère la fonction $\varphi$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0$, $\varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

***1.*** Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.

*Démonstration.*

- Déterminons la limite de $\varphi$ en $0^+$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^{2a} = 0$ car $a > 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = -\infty$.

- Déterminons la limite de $\varphi$ en $+\infty$.

  Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\varphi(x) = x^{2a}\left(\frac{\ln(x)}{x^{2a}} - a\right) = x^{2a}\left(\frac{1}{2a}\frac{2a\ln(x)}{x^{2a}} - a\right) = x^{2a}\left(\frac{1}{2a}\frac{\ln(x^{2a})}{x^{2a}} - a\right)$$

  On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2a} = +\infty$ car $a > 0$. Donc, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^{2a})}{x^{2a}} = 0$.

  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty$ car $-a < 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = -\infty.}$$

□

*2.* Étudier les variations de la fonction $\varphi$ et dresser son tableau de variations.

On fera apparaître dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.

*Démonstration.*

- La fonction $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a^2x^{2a-1} = \frac{1}{x} - 2a^2\frac{x^{2a}}{x} = \frac{1-2a^2x^{2a}}{x}$$

- Le dénominateur de $\varphi'(x)$ est toujours positif, car $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour déterminer le signe de $\varphi'(x)$, on étudie celui de son numérateur.

$$\begin{array}{rcll} 1-2a^2x^{2a} \geqslant 0 & \Leftrightarrow & 1 \geqslant 2a^2x^{2a} & \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{2a^2} \geqslant x^{2a} & \\ & \Leftrightarrow & \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}} \geqslant x & \textit{(car, comme } a>0\textit{,} \\ & & & x \mapsto x^{\frac{1}{2a}} \textit{ est strictement} \\ & & & \textit{croissante sur } \mathbb{R}_+^*\textit{)} \end{array}$$

- On note $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$. On obtient donc le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $\varphi'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $\varphi$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\varphi(x_0)$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

**Commentaire**

On rappelle que la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si on a $\alpha > 0$.
Ici, $a > 0$, donc $\dfrac{1}{2a} > 0$, d'où $x \mapsto x^{\frac{1}{2a}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

□

*3.* Démontrer que si $a < \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions $z_1$ et $z_2$, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.
Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$ ? Si $a > \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$ ?

*Démonstration.*

- Déterminons le signe de $\varphi(x_0)$ lorsque $a < \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$.

$$\begin{aligned} \varphi(x_0) &= \ln(x_0) - a x_0^{2a} \\ &= \ln\left(\left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}\right) - a\left(\left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}\right)^{2a} \\ &= -\frac{1}{2a}\ln(2a^2) - a\frac{1}{2a^2} \\ &= -\frac{1}{2a}\ln(2a^2) - \frac{1}{2a} \\ &= -\frac{1}{2a}(\ln(2a^2)+1) \end{aligned}$$

Or $0 < a < \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$, donc $a^2 < \frac{1}{2\mathrm{e}}$, donc $2a^2 < \frac{1}{\mathrm{e}}$.
D'où $\ln(2a^2) < \ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = -\ln(\mathrm{e}) = -1$ car la fonction ln est strictement croissante.
Donc $\ln(2a^2) + 1 < 0$, d'où $-\frac{1}{2a}(\ln(2a^2)+1) > 0$ car $-\frac{1}{2a} < 0$. Finalement, $\varphi(x_0) > 0$.

- La fonction $\varphi$ est :
  × continue sur $]0, x_0]$
  × strictement croissante $]0, x_0]$
  Ainsi $\varphi$ réalise une bijection de $]0, x_0]$ dans $\varphi(]0, x_0])$.

$$\varphi(]0,x_0]) = \left]\lim_{x\to 0} \varphi(x), \varphi(x_0)\right] = ]-\infty, \varphi(x_0)]$$

  Or $0 \in ]-\infty, \varphi(x_0)]$ car $\varphi(x_0) > 0$.
  Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement une solution sur $]0, x_0]$ que l'on notera $z_1$.
  La fonction $\varphi$ est :
  × continue sur $[x_0, +\infty[$
  × strictement décroissante sur $[x_0, +\infty[$
  Ainsi $\varphi$ réalise une bijection de $[x_0, +\infty[$ dans $\varphi([x_0, +\infty[)$.

$$\varphi([x_0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to +\infty} \varphi(x), \varphi(x_0)\right] = ]-\infty, \varphi(x_0)]$$

  Or $0 \in ]-\infty, \varphi(x_0)]$ car $\varphi(x_0) > 0$.
  Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement une solution sur $[x_0, +\infty[$ que l'on notera $z_2$.

$$\boxed{\text{L'équation } \varphi(x) = 0 \text{ admet exactement deux solutions } z_1 \text{ et } z_2 \text{ vérifiant } 0 < z_1 < x_0 < z_2.}$$

- Si $a = \sqrt{\frac{1}{2\mathrm{e}}}$, alors $\varphi(x_0) = 0$.

  La fonction $\varphi$ admet un maximum en $x_0$, donc pour tout $x \in ]0, x_0[ \cup ]x_0, +\infty[$, on a :

$$\varphi(x) < \varphi(x_0) \quad \text{donc} \quad \varphi(x) < 0$$

Donc si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution : $x_0$.

- Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, alors $\varphi(x_0) < 0$.

  La fonction $\varphi$ admet toujours un maximum en $x_0$, donc pour tout $x \in ]0, +\infty[$, on a :

$$\varphi(x) < \varphi(x_0) < 0$$

Donc si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{R}_+^*$.

**Commentaire**

Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection.
En particulier, la fonction $\varphi$ doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0, +\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs intervalles plus petits sur lesquels $\varphi$ est strictement monotone (ici $]0, x_0]$ et $[x_0, +\infty[$).

□

## Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\dfrac{1}{2e}}$. On rappelle alors que la fonction $f$ admet exactement deux points critiques : $(z_1, z_1)$ et $(z_2, z_2)$, où $z_1$ et $z_2$ sont les réels définis dans la partie **A**.

***8.*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction $f$.

*Démonstration.*
La fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U$ d'après la question *4*.
Donc elle admet des dérivées partielles d'ordre 2.
Soit $(x, y) \in U$.

$$\partial_{11}^2(f)(x, y) = -\frac{\ln(y)}{x^2} - a(a-1)x^{a-2}y^a = -\frac{\ln(y) + a(a-1)(xy)^a}{x^2}$$

$$\partial_{22}^2(f)(x, y) = -\frac{\ln(x)}{y^2} - a(a-1)y^{a-2}x^a = -\frac{\ln(x) + a(a-1)(xy)^a}{y^2}$$

$$\partial_{12}^2(f)(x, y) = \frac{1}{xy} - a^2x^{a-1}y^{a-1} = \frac{1 - a^2(xy)^a}{xy} = \partial_{21}^2(f)(x, y) \quad \textit{(d'après le théorème de Schwarz)}$$

Pour tout $(x, y) \in U$, $\partial_{11}^2(f)(x, y) = -\dfrac{\ln(y) + a(a-1)(xy)^a}{x^2}$,

$\partial_{22}^2(f)(x, y) = -\dfrac{\ln(x) + a(a-1)(xy)^a}{y^2}$ et $\partial_{12}^2(f)(x, y) = \partial_{21}((f))(x, y) = \dfrac{1 - a^2(xy)^a}{xy}$.

□

***9.*** Calculer la matrice hessienne de $f$ au point $(z_1, z_1)$. Vérifier que cette matrice peut s'écrire de la forme :

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.*

- D'après la question précédente :

$$\partial^2_{11}(f)(z_1,z_1) = -\frac{\ln(z_1)+a(a-1)(z_1z_1)^a}{z_1^2} = -\frac{\ln(z_1)+a(a-1)z_1^{2a}}{z_1^2}$$

Or, par définition de $z_1$, $\varphi(z_1)=0$, *i.e.* $\ln(z_1) = az_1^{2a}$. Donc on obtient :

$$\partial^2_{11}(f)(z_1,z_1) = -\frac{\cancel{az_1^{2a}} + a^2z_1^{2a} - \cancel{az_1^{2a}}}{z_1^2} = -a^2z_1^{2a-2}$$

- Avec exactement le même calcul, on obtient $\partial^2_{22}(f) = -a^2z_1^{2a}$.
- Toujours d'après la question précédente :

$$\partial^2_{12}(f)(z_1,z_1) = \frac{1-a^2(z_1z_1)^a}{z_1z_1} = \frac{1-a^2z_1^{2a}}{z_1^2} = \frac{1}{z_1^2} - a^2z_1^{2a-2}$$

- Par définition de la matrice hessienne, on sait que :

$$\nabla^2(f)(z_1,z_1) = \begin{pmatrix} \partial^2_{11}(f)(z_1,z_1) & \partial^2_{12}(f)(z_1,z_1) \\ \partial^2_{21}(f)(z_1,z_1) & \partial^2_{22}(f)(z_1,z_1) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\nabla^2(f)(z_1,z_1) = \begin{pmatrix} -a^2z_1^{2a-2} & \dfrac{1}{z_1^2} - a^2z_1^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_1^2} - a^2z_1^{2a-2} & -a^2z_1^{2a-2} \end{pmatrix}.}$$

□

***10.*** On pose $M = \nabla^2(f)(z_1,z_1)$, $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
Calculer $MX_1$ et $MX_2$, et en déduire les valeurs propres de $M$.

*Démonstration.*

$$\boxed{MX_1 = \left(\frac{1}{z_1^2} - 2a^2z_1^{2a-2}\right)X_1 \text{ et } MX_2 = -\frac{1}{z_1^2}X_2.}$$

- $M$ est une matrice carrée de taille 2. Donc elle admet au plus 2 valeurs propres.
- On vient de vérifier que :

$$MX_1 = \left(\frac{1}{z_1^2} - 2a^2z_1^{2a-2}\right)X_1 \quad \text{et} \quad MX_2 = -\frac{1}{z_1^2}X_2$$

On obtient donc que $X_1$ est un vecteur propre de $M$ associé à la valeur propre $\left(\dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2z_1^{2a-2}\right)$.

Et $X_2$ est un vecteur propre de $M$ associé à la valeur propre $-\dfrac{1}{z_1^2}$.

Donc $\left(\dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2z_1^{2a-2}\right)$ et $-\dfrac{1}{z_1^2}$ sont des valeurs propres de $M$.

- Pour savoir si on a bien trouvé toutes valeurs propres de $M$, il faut savoir si les valeurs propres $\left(\dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2}\right)$ et $-\dfrac{1}{z_1^2}$ sont distinctes ou non.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} = -\frac{1}{z_1^2} \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - 2a^2 z_1^{2a} = -1 && \textit{(car } z_1 \neq 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad \cancel{2}a^2 z_1^{2a} = \cancel{2} \\
&\Leftrightarrow \quad a^2 z_1^{2a} = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad (a z_1^a)^2 = 1^2 \\
&\Leftrightarrow \quad a z_1^a = 1 && \textit{(car la fonction } x \mapsto \sqrt{x} \textit{ est bijective sur } \mathbb{R}_+^+\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad z_1^a = \frac{1}{a}
\end{aligned}$$

On sait de plus que $z_1 < x_0$. Donc $z_1^a < x_0^a$.

Or $x_0^a = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}\times a} = \sqrt{\dfrac{1}{2a^2}}$.

De plus $\dfrac{1}{2a^2} < \dfrac{1}{a^2}$, donc $\sqrt{\dfrac{1}{2a^2}} < \dfrac{1}{a}$, car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante.

D'où $x_0^a < \dfrac{1}{a}$. Donc $z_1^a < x_0^a < \dfrac{1}{a}$. Donc $z_1^a \neq \dfrac{1}{a}$. D'où $\dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \neq -\dfrac{1}{z_1^2}$.

Donc $M$ admet au moins 2 valeurs propres distinctes.

$$\boxed{M \text{ admet exactement 2 valeurs propres : } \frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} \text{ et } -\frac{1}{z_1^2}.}$$

**Commentaire**

Le sujet demande ici **les** valeurs propres de $M$. Il faut donc toutes les préciser.
L'énoncé nous fournit déjà 2 valeurs propres (éventuellement confondues) avec les vecteurs propres $X_1$ et $X_2$. On sait de plus qu'une matrice de taille 2 admet au plus 2 valeurs propres.
Pour être certain de bien avoir trouver **toutes** les valeurs propres de $M$, il ne faut donc pas oublier de montrer que les 2 valeurs propres trouvées sont bien distinctes.

□

***11.*** La fonction $f$ présente-t-elle un extremum local en $(z_1, z_1)$ ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

*Démonstration.*
Pour étudier la présence d'un extremum en $(z_1, z_1)$, il faut étudier le signe des valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(z_1, z_1)$.

- On remarque déjà que : $-\dfrac{1}{z_1^2} < 0$.
- Montrons que : $\dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 > 2a^2 z_1^{2a} && \textit{(car } z_1 > 0\textit{)} \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}} > z_1 \\
&\Leftrightarrow \quad x_0 > z_1
\end{aligned}$$

La dernière inégalité est vraie, donc, par équivalence, la première aussi.

On en déduit que : $\dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} > 0$.

$\nabla^2(f)(z_1, z_1)$ admet une valeur propre strictement négative et une strictement positive.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ ne présente pas d'extremum local en } (z_1, z_1).}$$

**Commentaire**

Les valeurs propres de la fonction $f$ sont de signes opposés, donc la fonction $f$ admet un point col en $(z_1, z_1)$.

□

***12.*** La fonction $f$ présente-t-elle un extremum local en $(z_2, z_2)$ ?
Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

*Démonstration.*
Avec les mêmes calculs qu'en questions ***9.*** et ***10.***, on obtient que :

$$\nabla^2(f)(z_2, z_2) = \begin{pmatrix} -a^2 z_2^{2a-2} & \dfrac{1}{z_2^2} - a^2 z_2^{2a-2} \\ \dfrac{1}{z_2^2} - a^2 z_2^{2a-2} & -a^2 z_2^{2a-2} \end{pmatrix}$$

et que $\nabla^2(f)(z_2, z_2)$ admet exactement 2 valeurs propres distinctes : $\dfrac{1}{z_2^2} - 2a^2 z_2^{2a-2}$ et $-\dfrac{1}{z_2^2}$.

Étudions le signe des valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2(f)(z_2, z_2)$.

- On remarque déjà que : $-\dfrac{1}{z_2^2} < 0$.
- Montrons que : $\dfrac{1}{z_2^2} - 2a^2 z_2^{2a-2} < 0$.

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{1}{z_2^2} - 2a^2 z_2^{2a-2} < 0 & \Leftrightarrow & 1 < 2a^2 z_2^{2a} & \textit{(car } z_2 > 0\textit{)} \\ & \Leftrightarrow & \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}} < z_2 & \\ & \Leftrightarrow & x_0 < z_2 & \end{array}$$

La dernière inégalité est vraie, donc, par équivalence, la première aussi.

On en déduit que : $\dfrac{1}{z_1^2} - 2a^2 z_1^{2a-2} < 0$.

La matrice $\nabla^2(f)(z_2, z_2)$ admet 2 valeurs propres strictement négatives.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ présente donc un maximum local en } (z_2, z_2).}$$

□

**Exercice 17.** (★) *(*`EML 2017`*)*
On considère la fonction $f : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x$ de $]0, +\infty[$, par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x).$$

On admet les encadrements numériques suivants :

$$2,7 < \mathrm{e} < 2,8 \qquad 7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4 \qquad 0,6 < \ln(2) < 0,7.$$

## Partie I : Étude de la fonction $f$

***1.*** ***a)*** Montrer que $f$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer, pour tout $x$ de $]0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

*Démonstration.*

- Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \ln(x)$ sont deux fois dérivables sur l'intervalle $]0,+\infty[$ en tant que fonctions usuelles.

$$\boxed{\text{En tant que somme de fonctions deux fois dérivables sur } ]0,+\infty[, \ f \text{ est deux fois dérivable sur } ]0,+\infty[.}$$

- $$\boxed{\forall x \in \ ]0,+\infty[, \ f'(x) = \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{x} \text{ et } f''(x) = \mathrm{e}^x + \frac{\mathrm{e}}{x^2}.}$$

□

***b)*** Dresser le tableau de variations de $f'$ avec la limite de $f'$ en 0 et la limite de $f'$ en $+\infty$ et préciser $f'(1)$.

*Démonstration.*

- Pour tout $x \in \ ]0,+\infty[$, $f''(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}}{x^2} > 0$.
  Donc la fonction $f'$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- Par ailleurs : $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = +\infty$.

  Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$.
- De plus : $\lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x} = 0$.

  Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = +\infty$.
- $f'(1) = \mathrm{e}^1 - \dfrac{\mathrm{e}}{1} = \cancel{\mathrm{e}} - \cancel{\mathrm{e}} = 0$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f''(x)$ | | $+$ | | $+$ | |
| Variations de $f'$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

□

***2.*** Dresser le tableau de variations de $f$ avec la limite de $f$ en 0 et la limite de $f$ en $+\infty$ et préciser $f(1)$.

*Démonstration.*

- La fonction $f'$ est croissante. Donc pour tout $x \in \ ]0,+\infty[$ :
  - × Si $x \in \ ]0,1]$, $f'(x) \leqslant f'(1) = 0$.
  - × Si $x \geqslant 1$, $f'(x) \geqslant f'(1) = 0$.

  Donc $f$ est strictement décroissante sur $]0,1]$ et strictement croissante sur $[1,+\infty[$.
- On sait que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$.

  Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$.

- Soit $x > 0$.
$$f(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}\ln(x) = \mathrm{e}^x \left(1 - \mathrm{e}\frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x}\right)$$
Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(1) = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}\ln(1) = \mathrm{e}$.

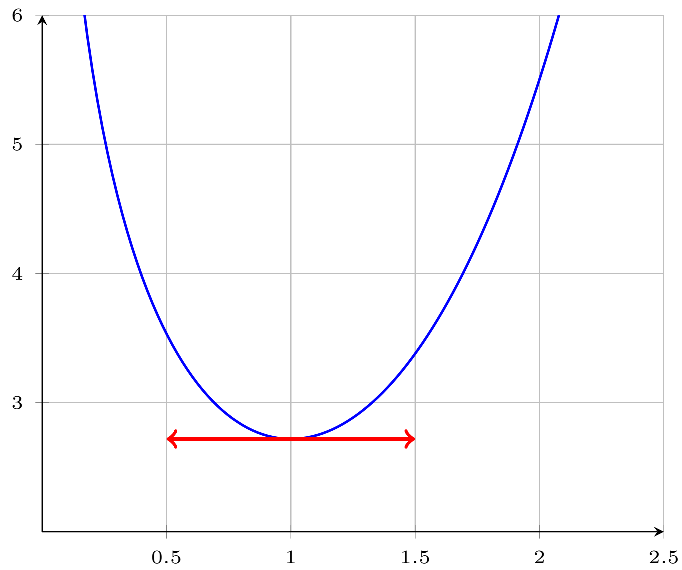
On obtient alors le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\mathrm{e}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

□

*3.* Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$.

*Démonstration.*




**Commentaire**

On s'efforcera de faire les questions de tracé de courbe.
En effet, tout le travail a été fait dans les questions précédentes.
Il ne faut pas oublier de faire apparaître les tangentes horizontales et les points d'inflexion si on les a déterminés auparavant.

□

*4.* ***a)*** Étudier les variations de la fonction $u : \left\{ \begin{array}{ccc} ]0,+\infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) - x \end{array} \right.$.

*Démonstration.*

- La fonction $f$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$, donc $f'$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.
De plus, la fonction $x \mapsto x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.
Donc la fonction $u$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que différence de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.

- Pour tout $x \in \,]0,+\infty[$, $u'(x) = f''(x) - 1 = \mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}}{x^2} - 1$.

$$\begin{array}{rrll} x > 0 & \text{donc} & \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 = 1 & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & \text{d'où} & \mathrm{e}^x - 1 > 0 & \\ & \text{alors} & \mathrm{e}^x - 1 + \dfrac{\mathrm{e}}{x^2} > 0 & \textit{(car } \dfrac{e}{x^2} > 0\textit{)} \\ & \text{ainsi} & u'(x) > 0 & \end{array}$$

  On en déduit que la fonction $u$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$.

  Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x) = -\infty$.
- Soit $x \in \,]0,+\infty[$.

$$u(x) = \mathrm{e}^x - \frac{\mathrm{e}}{x} - x = \mathrm{e}^x \left(1 - \frac{\mathrm{e}}{x\mathrm{e}^x} - \frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)$$

  Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$. De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{x\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.

  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$.

On obtient le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| Signe de $u'(x)$ | $+$ |
| Variations de $u$ | $-\infty \nearrow +\infty$ |

**Commentaire**

On ne demandait pas ici explicitement le tableau de variations complet.
On pouvait donc se contenter de répondre que la fonction $u$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ (et ne pas effectuer de calculs de limites).

□

***b)*** En déduire que l'équation $f'(x) = x$, d'inconnue $x \in ]0,+\infty[$, admet une solution et une seule, notée $\alpha$, et montrer : $1 < \alpha < 2$.

*Démonstration.*

- On commence par remarquer :

$$f'(x) = x \;\Leftrightarrow\; f'(x) - x = 0 \;\Leftrightarrow\; u(x) = 0$$

  On cherche donc à montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0,+\infty[$.
- La fonction $u$ est :
  × continue sur $]0,+\infty[$ (car dérivable sur $]0,+\infty[$ d'après la question ***4.a)***),
  × strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

  Ainsi la fonction $f$ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $u(]0,+\infty|)$.

$$u(]0,+\infty[) = \left] \lim_{x\to 0^+} u(x), \lim_{x\to+\infty} u(x) \right[ = ]-\infty,+\infty[$$

  Or $0 \in \,]-\infty,+\infty[$, donc l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0,+\infty[$.

- Tout d'abord :
  × $u(\alpha) = 0$
  × $u(1) = f'(1) - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$
  × $u(2) = f'(2) - 2 = \mathrm{e}^2 - \dfrac{\mathrm{e}}{2} - 2$
  D'après les encadrements donnés par l'énoncé, on obtient :
  - $7,3 < \mathrm{e}^2 < 7,4$, donc $5,3 < \mathrm{e}^2 - 2 < 5,4$
  - $2,7 < \mathrm{e} < 2,8$, donc $1,35 < \dfrac{\mathrm{e}}{2} < 1,4$, d'où $-1,4 < -\dfrac{\mathrm{e}}{2} < -1,35$
  Donc $3,9 < \mathrm{e}^2 - 2 - \dfrac{\mathrm{e}}{2} < 4,05$, d'où $u(2) > 3,9 > 0$.

  Ainsi : $u(1) < u(\alpha) < u(2)$.
  Or, d'après le théorème de la bijection, la bijection réciproque $u^{-1} : ]-\infty, +\infty[ \to ]0, +\infty[$ est strictement croissante. En composant par $u^{-1}$ dans l'encadrement précédent, on obtient :

$$1 < \alpha < 2$$

Finalement, l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0, +\infty[$. De plus $1 < \alpha < 2$.
On rappelle que $u(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x$.

> L'équation $f'(x) = x$ admet une unique solution $\alpha$ sur $]0, +\infty[$. De plus $1 < \alpha < 2$.

**Commentaire**

Si le tableau de variations a été dressé à la question ***4.a)***, on peut directement utiliser les calculs de limites.
Sinon, il faut les détailler dans cette question.

□

## Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère la fonction $F : ]1, +\infty[^2 \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $]1, +\infty[^2$, définie, pour tout $(x, y)$ de $]1, +\infty[^2$, par :

$$F(x, y) = f(x) + f(y) - xy.$$

***13.*** Montrer que $F$ admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de $(\alpha, \alpha)$, le réel $\alpha$ ayant été défini à la question **4.** de la partie **I**.

*Démonstration.*

- La fonction $F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty[^2$, donc, a fortiori, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[^2$.
- Soit $(x, y) \in ]1, +\infty[^2$.

$$\partial_1(F)(x, y) = f'(x) - y \quad \text{et} \quad \partial_2(F)(x, y) = f'(y) - x$$

- Donc $(x, y)$ est un point critique de $F$ si et seulement si :

$$\nabla(F)(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial_1(F)(x, y) = 0 \\ \partial_2(F)(x, y) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = f'(x) \\ x = f'(y) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = f'(x) \\ f'(f'(x)) = x \end{array} \right. \qquad (*)$$

- On pose la fonction $v : x \mapsto f'(f'(x)) - x$. La fonction $x \mapsto f'(f'(x))$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ en tant que composée $h_2 \circ h_1$ de :
  × $h_1 : x \mapsto f'(x)$ qui est dériable sur $]1, +\infty[$ et $h_1(]1, +\infty[) \subset ]0, +\infty[$ (d'après la question ***1.b)***),
  × $h_2 : x \mapsto f'(x)$ qui est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Soit $x \in ]1, +\infty[$.

$$v'(x) = f''(f'(x))f''(x) - 1$$

Or, $f''(x) = e^x + \dfrac{e}{x^2} > 1$. Donc $f''(f'(x)) > 1$.

D'où $f''(f'(x))\, f''(x) > 1$. Donc $v'(x) > 0$. Donc la fonction $v$ est strictement croissante.

La fonction $v$ est donc :

× continue sur $]1, +\infty[$

× strictement croissante $]1, +\infty[$.

Ainsi $v$ réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $v(]1, +\infty[)$.

$$v(]1, +\infty[) = \left] \lim_{x \to 1} v(x), \lim_{x \to +\infty} v(x) \right[ = ]-\infty, +\infty[$$

Or $0 \in ]-\infty, +\infty[$, donc l'équation $v(x) = 0$ admet une unique solution dans $]1, +\infty[$.
Or, on sait que le réel $\alpha$ solution de l'équation $f'(x) = x$ est solution de $v(x) = 0$. En effet :

$$v(\alpha) = f'(f'(\alpha)) - \alpha = f'(\alpha) - \alpha = \alpha - \alpha = 0$$

Donc $\alpha$ est l'unique solution de l'équation $f'(f'(x)) = x$.

- Reprenons alors le système $(*)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = f'(x) \\ f'(f'(x)) = x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = f'(x) \\ x = \alpha \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = f'(\alpha) = \alpha \\ x = \alpha \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \alpha \\ x = \alpha \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ admet un point critique et un seul et il s'agit de } (\alpha, \alpha).}$$

□

*14.* ***a)*** Déterminer la matrice hessienne de $F$ en $(\alpha, \alpha)$.

*Démonstration.*

- La fonction $F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1, +\infty[^2$.
- Soit $(x, y) \in ]1, +\infty[^2$.

$$\nabla^2(F)(x, y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(F)(x, y) & \partial^2_{1,2}(F)(x, y) \\ \partial^2_{2,1}(F)(x, y) & \partial^2_{2,2}(F)(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f''(x) & -1 \\ -1 & f''(y) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Donc } \nabla^2(F)(\alpha, \alpha) = \begin{pmatrix} f''(\alpha) & -1 \\ -1 & f''(\alpha) \end{pmatrix}.}$$

□

***b)*** La fonction $F$ admet-elle un extremum local en $(\alpha, \alpha)$ ? Si oui, s'agit-il d'un maximum local ou s'agit-il d'un minimum local ?

*Démonstration.*

Déterminons les valeurs propres de $\nabla^2(F)(\alpha, \alpha)$.

On cherche donc les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles $\nabla^2(F)(\alpha, \alpha) - \lambda\, I_2$ n'est pas inversible, c'est-à-dire pour lesquelles $\det(\nabla^2(F)(\alpha, \alpha) - \lambda\, I_2) = 0$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\det(\nabla^2(F)(\alpha, \alpha) - \lambda\, I_2) = \begin{vmatrix} f''(\alpha) - \lambda & -1 \\ -1 & f''(\alpha) - \lambda \end{vmatrix} = (f''(\alpha) - \lambda)^2 - 1 = (f''(\alpha) - \lambda - 1)(f''(\alpha) - \lambda + 1)$$

Donc les valeurs propres de $\nabla^2(F)(\alpha, \alpha)$ sont $f''(\alpha) - 1$ et $f''(\alpha) + 1$.

Or pour tout $x \in ]0, +\infty[$, $f''(x) = e^x + \dfrac{e}{x^2} > e^x \geqslant 1$. Donc $f''(\alpha) - 1 > 0$ et $f''(\alpha) + 1 > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi } F \text{ admet un minimum local en } (\alpha, \alpha).}$$

□

**Exercice 18.** (★) *(d'après* `EML 2018`*)*
Dans tout cet exercice, $f$ désigne la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \, ]0, +\infty[, \ f(x) = x - \ln(x)$$

## Partie I : Étude de la fonction $f$

*1.* Dresser le tableau de variations de $f$ en précisant ses limites en $0$ et en $+\infty$.

*Démonstration.*

- La fonction $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \, ]0, +\infty[$.
$$f'(x) \ = \ 1 - \frac{1}{x} \ = \ \frac{x-1}{x}$$
Alors, comme $x > 0$ :
$$f'(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ x - 1 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow \ x \geqslant 1$$
On obtient le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord : $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$.
  - Ensuite : $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.
$$\boxed{\text{Donc : } \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty.}$$
  - Enfin, soit $x \in \, ]0, +\infty[$ :
$$f(x) \ = \ x - \ln(x) \ = \ x\Big(1 - \frac{\ln(x)}{x}\Big)$$
De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.}$$

□

*2.* Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in \, ]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note $a$ et $b$, telles que $0 < a < 1 < b$.

*Démonstration.*

- La fonction $f$ est :
  × continue sur $]0, 1[$ (car dérivable sur $]0, 1[$),
  × strictement décroissante sur $]0, 1[$.

  Ainsi $f$ réalise une bijection de $]0, 1[$ dans $f(]0, 1[)$.
$$f(]0, 1[) \ = \ \Big] \lim_{x \to 1^-} f(x), \ \lim_{x \to 0} f(x) \Big[ \ = \ ]1, +\infty[$$
Or $2 \in \, ]1, +\infty[$.
Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]0, 1[$, notée $a$.

- La fonction $f$ est :
  - $\times$ continue sur $]1,+\infty[$ (car dérivable sur $]1,+\infty[$),
  - $\times$ strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

  Ainsi $f$ réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans $f(]1,+\infty[)$.

$$f(]1,+\infty[) \ = \left] \lim_{x\to 1^-} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x) \right[ = ]1,+\infty[$$

  Or $2 \in ]1,+\infty[$.
  Donc l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution sur $]1,+\infty[$, notée $b$.

Finalement, l'équation $f(x)=2$ admet exactement 2 solutions sur $]0,+\infty[$ notées $a$ et $b$ telles que $0 < a < 1 < b$.

**Commentaire**

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction $f$ doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0,+\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels $f$ est strictement monotone (ici $]0,1[$ et $]1,+\infty[$).

□

*3.* Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,\ 7$.

*Démonstration.*

- Tout d'abord : $f(2) = 2 - \ln(2) \leqslant 2$.
- Ensuite : $f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - \ln(2^2) = 4 - 2\ln(2) = 2(2-\ln(2))$.
  De plus, $\ln(2) \simeq 0,7$, donc : $2-\ln(2) \simeq 1,3$ et $2(2-\ln(2)) \simeq 2,6$.
  D'où : $f(4) \geqslant 2$.
- On rappelle : $f(b) = 2$.
  Ainsi : $f(2) \leqslant f(b) \leqslant f(4)$.
  On note $g$ la réciproque de $f$ sur $]1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $g$ est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

On en déduit : $2 \leqslant b \leqslant 4$.

**Commentaire**

L'indication de l'énoncé $\ln(2) \simeq 0,7$ ne permet pas de savoir s'il s'agit d'une sur ou d'une sous-approximation.
Un encadrement, tel que $0,6 \leqslant \ln(2) \leqslant 0,8$, permettrait de résoudre ce problème.

□

## Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables

On considère la fonction $H$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $U = ]0,+\infty[^2$ définie par :

$$\forall (x,y) \in ]0,+\infty[^2, \; H(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy - 2x + e^y$$

**Commentaire**

On peut remarquer que cette fonction $H$ est en fait définie sur $\mathbb{R}^2$. Cela sera d'ailleurs utile plus tard dans l'énoncé.
Elle est même de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Démontrons le.

- La fonction $(x,y) \mapsto \frac{x^2}{2} - xy - 2x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale.
- La fonction $(x,y) \mapsto e^y$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car elle est la composée $h_2 \circ h_1$ où :
  - × $h_1 : (x,y) \mapsto y$ est :
    - de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale,
    - telle que $h_1(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}$.
  - × $h_2 : u \mapsto e^u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $H$ est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

***13. a)*** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de $H$ en tout $(x,y)$ de $U$.

*Démonstration.*

- La fonction $H$ est de classe $\mathcal{C}^2$, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$.
  Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 1 sur $U$.
- Soit $(x,y) \in U$.

$$\partial_1(H)(x,y) \;=\; \frac{\cancel{2}\,x}{\cancel{2}} - y - 2 \;=\; x - y - 2$$

$$\partial_2(H)(x,y) \;=\; -x + e^y$$

$$\boxed{\forall (x,y) \in U, \; \partial_1(H)(x,y) = x - y - 2, \quad \partial_2(H)(x,y) = e^y - x}$$

**Commentaire**

On trouve bien sûr les mêmes dérivées premières sur $\mathbb{R}^2$.

□

***b)*** Montrer que la fonction $H$ admet exactement deux points critiques : $(a, \ln(a))$ et $(b, \ln(b))$, où les réels $a$ et $b$ sont ceux introduits dans la question ***2.***

*Démonstration.*
Soit $(x, y) \in U$.
Le couple $(x, y)$ est un point critique de $H$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\nabla(H)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \partial_1(H)(x,y) & = & 0 \\ \partial_2(H)(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x - y - 2 = 0 \\ \mathrm{e}^y - x = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ \mathrm{e}^y = x \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ \mathrm{e}^{x-2} = x \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ x - 2 = \ln(x) \end{array}\right. \qquad \textit{(car } x > 0\textit{)} \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ x - \ln(x) = 2 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ f(x) = 2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Or, d'après la question ***2.***, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement deux solutions sur $]0, +\infty[$ : les réels $a$ et $b$.
On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\nabla(H)(x,y) = 0_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})} \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ x = a \end{array}\right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{\begin{array}{l} y = x - 2 \\ x = b \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y = a - 2 \\ x = a \end{array}\right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{\begin{array}{l} y = b - 2 \\ x = b \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Or, comme $a$ et $b$ sont solutions de l'équation $f(x) = 2$, on a :

$$f(b) = 2 \ \Leftrightarrow \ b - \ln(b) = 2 \ \Leftrightarrow \ \ln(b) = b - 2$$

De même : $\ln(a) = a - 2$. D'où :

$$\begin{aligned}
(x, y) \text{ est un point critique de } H \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} y = \ln(a) \\ x = a \end{array}\right. \quad \texttt{OU} \quad \left\{\begin{array}{l} y = \ln(b) \\ x = b \end{array}\right. \\
& \Leftrightarrow \quad (x, y) = (a, \ln(a)) \quad \texttt{OU} \quad (x, y) = (b, \ln(b))
\end{aligned}$$

Or, comme $a \in \, ]0, 1[$, alors $\ln(a) < 0$. Donc $(a, \ln(a)) \notin U$.
On en déduit que le couple $(a, \ln(a))$ n'est pas un point critique de $H$ sur $U$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction } H \text{ admet un unique point critique } \underline{\text{sur } U} : (b, \ln(b)).}$$

**Commentaire**

- La réponse à cette question semble contredire l'énoncé.
  En fait, le couple $(a, \ln(a))$ est bien un point critique de $H$. Seulement, c'est un point critique de $H$ sur $\mathbb{R}^2$ et non sur $U$.
  Montrer que $(a, \ln(a))$ est bien un point critique de $H$ sur $\mathbb{R}^2$ demande peu d'adaptations dans la preuve précédente.
  Le seul point problématique est la composition par la fonction ln dans la première série d'équivalences :
  $$\left\{ \begin{array}{l} y = x-2 \\ e^{x-2} = x \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = x-2 \\ x-2 = \ln(x) \end{array} \right.$$
  En effet, il faut démontrer auparavant que $x > 0$ (a priori : $x \in \mathbb{R}$).
  Cependant, d'après le système $\left\{ \begin{array}{l} y = x-2 \\ e^{y} = x \end{array} \right.$, on en déduit en particulier que $x > 0$, et on peut donc continuer la preuve comme précédemment.
- Dans la suite, lorsque l'on étudiera le point critique $(a, \ln(a))$, on se placera donc sur $\mathbb{R}^2$ et non sur $U$.

□

***14. a)*** Écrire la matrice hessienne, notée $M_a$, de $H$ au point $(a, \ln(a))$.

*Démonstration.*

- La fonction $H$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^2$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\nabla^2(H)(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(H)(x,y) & \partial^2_{1,2}(H)(x,y) \\ \partial^2_{2,1}(H)(x,y) & \partial^2_{2,2}(H)(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & e^{y} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Donc : } M_a = \nabla^2(H)(a, \ln(a)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & e^{\ln(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}}$$

**Commentaire**

On rappelle que $(a, \ln(a)) \notin U$.
Il est donc indispensable de déterminer $\nabla^2(H)$ sur $\mathbb{R}^2$ et non sur $U$.

□

***b)*** Montrer que $M_a$ admet deux valeurs propres distinctes, notées $\lambda_1$ et $\lambda_2$, vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 + \lambda_2 & = & a+1 \\ \lambda_1 \, \lambda_2 & = & a-1 \end{array} \right.$$

*Démonstration.*

- La matrice $M_a$ est une matrice réelle symétrique. Donc elle est diagonalisable.
  On note $\lambda_1$ et $\lambda_2$ ses valeurs propres (éventuellement égales).
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \det(M_a - \lambda \cdot I_2) & = & \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & a-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(a-\lambda) - 1 \\ & = & \lambda^2 - (a+1)\lambda + (a-1) \end{array}$$

On en déduit que la matrice $M_a - \lambda \cdot I_2$ n'est pas inversible si et seulement si :

$$\lambda^2 - (a+1)\lambda + (a-1) = 0 \quad (*)$$

- Or $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont les valeurs propres de $M_a$, donc :

$$(M_a - \lambda \cdot I_2) \text{ n'est pas inversible } \Leftrightarrow \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$$

Ainsi les réels $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont les racines de l'équation $(*)$. D'où :

$$\lambda^2 - (a+1)\lambda + (a-1) \; = \; (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \; = \; \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1 \lambda_2$$

Par identification des coefficients de ces polynômes de degré 2 en $\lambda$,

on obtient le système suivant : $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = a+1 \\ \lambda_1 \lambda_2 = a-1 \end{array} \right.$

- Montrons maintenant que $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont distincts.
Raisonnons par l'absurde. Supposons alors que $\lambda_1 = \lambda_2$.
D'après le système précédent, on obtient en particulier :

$$\lambda_1^2 \; = \; \lambda_1 \lambda_2 \; = \; a-1$$

Or, d'après la question ***2.***, on a : $a < 1$. Donc $a - 1 < 0$.
On en déduit : $\lambda_1^2 < 0$, ce qui est absurde.

Ainsi, $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont distincts.

□

***c)*** La fonction $H$ présente-t-elle un extremum local au point $(a, \ln(a))$ ?

*Démonstration.*
On a montré dans la question précédente : $a - 1 < 0$. On en déduit : $\lambda_1 \lambda_2 < 0$.
Les valeurs propres de $M_a$ sont donc de signes opposés.

Ainsi, la fonction $H$ n'admet pas d'extremum local au point $(a, \ln(a))$.

**Commentaire**

Le point $(a, \ln(a))$ est un point selle pour la fonction $H$.

□

***15.*** La fonction $H$ présente-t-elle un extremum local au point $(b, \ln(b))$ ?

*Démonstration.*
On reprend la démarche des questions précédentes.

- On note $M_b$ la matrice hessienne de $H$ au point $(b, \ln(b))$. Alors :

$$M_b \; = \; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & e^{\ln(b)} \end{pmatrix} \; = \; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & b \end{pmatrix}$$

- La matrice $M_b$ est une matrice réelle symétrique. Donc elle est diagonalisable.
On note $\mu_1$ et $\mu_2$ ses valeurs propres éventuellement égales).
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\det(M_b - \lambda \cdot I_2) \; = \; \lambda^2 - (b+1)\lambda + (b-1)$$

On en déduit que la matrice $M_b - \lambda \cdot I_2$ n'est pas inversible si et seulement si :

$$\lambda^2 - (b+1)\lambda + (b-1) = 0 \quad (\star)$$

- Or $\mu_1$ et $\mu_2$ sont les valeurs propres de $M_b$, donc $\mu_1$ et $\mu_2$ sont les racines de l'équation $(\star)$. D'où :

$$\lambda^2 - (b+1)\lambda + (b-1) \ = \ (\lambda - \mu_1)(\lambda - \mu_2) \ = \ \lambda^2 - (\mu_1 + \mu_2)\lambda + \mu_1\,\mu_2$$

$$\boxed{\text{Par identification : } \left\{ \begin{array}{rcl} \mu_1 + \mu_2 & = & b+1 \\ \mu_1\,\mu_2 & = & b-1 \end{array} \right. .}$$

- D'après la question ***3.*** : $b \geqslant 2$. Donc : $b - 1 > 0$ et $b + 1 > 0$.
  On obtient alors :
  - × $\mu_1\,\mu_2 > 0$.
    Donc $\mu_1$ et $\mu_2$ sont non nuls et de même signe.
  - × $\mu_1 + \mu_2 > 0$.
    Or $\mu_1$ et $\mu_2$ ont même signe. Donc : $\mu_1 > 0$ et $\mu_2 > 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } H \text{ admet un minimum local en } (b, \ln(b)).}$$

□