# CH III : Espaces vectoriels

## I. Structure vectorielle

### I.1. Notion de loi de composition

**Définition**

Soit $E$ un ensemble non vide.

- Une **loi de composition interne** $\top$ sur l'ensemble $E$ est une application $\top : E \times E \to E$. Autrement dit : $\forall (x, y) \in E^2,\ x \top y \in E$.
  $\hookrightarrow$ si 2 éléments sont dans $E$, alors $x \top y \in E$.
- Une **loi de composition externe** $*$ sur l'ensemble $E$ est une application $* : \mathbb{R} \times E \to E$. Autrement dit : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E,\ \lambda * x \in E$.
  $\hookrightarrow$ si $\lambda$ réel et $x$ $E$, alors $\lambda * x \in E$.

**Exemple**

*1)* L'ensemble $E = \mathbb{R}^n$ est naturellement muni :

× d'une loi de composition interne (notée $+$).
On a par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ :

$$(1, 3) + (-2, 5) = (-1, 8)$$

× et d'une loi de composition externe (notée $\cdot$).
On a par exemple dans $\mathbb{R}^2$ :

$$3 \cdot (-2, 5) = (-6, 15)$$

*2)* L'ensemble $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est naturellement muni :

× d'une loi de composition interne (notée $+$).
On a par exemple, dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

× et d'une loi de composition externe (notée $\cdot$).
On a par exemple dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ :

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Il est important de ne pas confondre $\mathbb{R}^n$ (l'ensemble des $n$-uplets de réels) et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices colonnes à cœfficients réels) et ce même s'il y a une bijection évidente entre ces deux ensembles. Une telle confusion sera systématiquement sanctionnée aux concours.

On retiendra : $\quad (1, 2, 7) \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

*3)* On peut étendre ces deux lois à l'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes.

*4)* L'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ définies d'un ensemble $D$ dans $\mathbb{R}$ est naturellement muni :

× d'une loi de composition interne (notée $+$). Si $(f, g) \in (\mathcal{F}(D, \mathbb{R}))^2$ :

$$\begin{array}{rccl} f + g & : & D & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array}$$

× et d'une loi de composition externe (notée $\cdot$).

$$\begin{array}{rccl} \lambda \cdot f & : & D & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \lambda \times f(x) \end{array}$$

où l'on a noté $\times$ la multiplication entre deux réels.

*5)* L'ensemble $\mathcal{V}$ des v.a.r. est muni d'une loi $+$ et d'une loi $\cdot$ analogues aux lois définies sur $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. On rappelle qu'une v.a.r. est une fonction de $\Omega$ (qui n'est pas forcément une partie de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$.

***a.*** Sur l'ensemble $\mathcal{V}_d$ des v.a.r. discrètes :

× cette loi $+$ est une loi de composition interne puisque la somme de deux v.a.r. discrètes et discrètes.

× cette loi $\cdot$ est bien une loi de composition externe. En effet, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X$ est une v.a.r. discrète, alors $\lambda \cdot X$ est une v.a.r. discrète.

*(dans les deux cas, il s'agit de démontrer que le support des variables obtenues est au plus dénombrable)*

***b.*** Sur l'ensemble $\mathcal{V}_c$ des v.a.r. continues (*i.e.* des v.a.r. à densité) :

× cette loi $+$ n'est pas interne.
En effet, la somme de deux v.a.r. à densité n'est pas forcément une v.a.r. à densité. Considérons par exemple :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \quad \text{et} \quad Y = 1 - X \ (\hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]))$$

alors $X + Y = 1$ qui est une v.a.r. discrète ($(X+Y)(\Omega) = \{1\}$).
Ainsi, $X + Y$ n'est pas une v.a.r. à densité.

× cette loi $\cdot$ n'est pas externe.
Même si $X$ est une v.a.r. à densité, $0 \cdot X = 0$ est un v.a.r. discrète (cette v.a.r. est constante et son support est donc réduit à un seul élément).

*6)* On peut de même munir l'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$.

× d'une loi de composition interne $+$.
Sommer deux polynômes consiste à sommer les cœfficients des termes de même degré.

× et d'une loi de composition externe $\cdot$
Effectuer $\lambda \cdot P$ consiste à multiplier tous les cœfficients de $P$ par $\lambda$.

*7)* $\mathbb{R}_n[X]$, ensemble des polynômes à cœfficients réels dont le degré est au plus $n$ est muni des lois de composition définies sur $\mathbb{R}_n[X]$.

- Cela demande quand même de vérifier que la somme de deux polynômes de degré au plus $n$ est un polynôme de degré au plus $n$ (pareil pour la multiplication externe).
- Sur l'ensemble des polynômes de degré exactement $n$, la loi $+$ n'est pas une loi de composition interne.
  Considérons par exemple $n = 2$ et les polynômes :

$$P(X) = 1 + X^2 \quad \text{et} \quad Q(X) = 2X - X^2$$

Alors $P$ et $Q$ sont de degré 2 mais $P + Q$ est de degré 1.

*8)* L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites à cœfficients réels est naturellement muni :

× d'une loi de composition interne (notée $+$) :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

× d'une loi de composition externe (notée $\cdot$) :

$$\lambda \cdot (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda \times u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

où l'on a noté $\times$ la multiplication entre deux réels.

**Remarque**

- Arrêtons-nous un peu sur $\mathbb{R}_2[X]$. Chaque polynôme de cet ensemble est entièrement déterminé par la valeur de ces cœfficients. Par exemple :
  × le triplet $(1, 2, 3)$ correspond au polynôme $P(X) = 1 + 2X + 3X^2$,
  × le triplet $(-2, 1, 0)$ correspond au polynôme $Q(X) = -2 + X$.
  Il ne s'agit pas de dire que : $P = (1, 2, 3)$. Cette écriture n'a pas de sens : un polynôme ne peut être égal à un triplet. Par contre, on comprend que deux représentations différentes corresponde au même objet.
- On en revient à la remarque précédente sur $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
  Ici aussi, on établir en bijection les ensembles $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$.
  Mais, s'il y a bien correspondance un à un des éléments de ces ensembles, on ne peut dire pour autant que ces éléments sont égaux.

## I.2. Notion d'espace vectoriel

### I.2.a) Définition

**Définition informelle**
De manière informelle, un espace vectoriel $E$ est un ensemble non vide muni d'une loi $+$ et d'une loi $\cdot$ qui vérifient les propriétés permettant d'effectuer toutes les manipulations algébriques raisonnables sur les éléments de $E$.

**Définition**
Un ensemble non vide $E$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ si :

*1)* $E$ est muni d'une loi d'une loi de composition interne notée $+ : E \times E \to E$ qui vérifie les propriétés suivantes.

**a.** $\forall (x,y) \in E^2,\ x+y = y+x$ *(commutativité)*

**b.** $\forall (x,y,z) \in E^2,\ x+(y+z) = (x+y)+z$ *(associativité)*

**c.** $\exists\ 0_E \in E$ tel que : $\forall x \in E,\ x + 0_E = 0_E + x = x$ *(élément neutre)*

**d.** $\forall x \in E, \exists y \in E,\ x+y = y+x = 0_E$ *($y$ opposé de $x$)*

*2)* $E$ est muni d'une loi de composition externe notée $\cdot : \mathbb{R} \times E \to E$ qui vérifie les propriétés suivantes.

**a.** $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x,y) \in E^2, \quad \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
*(la loi $\cdot$ est distributive à gauche par rapport à la loi $+$ de $E$)*

**b.** $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (x,y) \in E^2, \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
*(la loi $\cdot$ est distributive à droite par rapport à « la » loi $+$)*

**c.** $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, \quad (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$
*(associativité mixte)*

**d.** $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, \quad 1 \cdot x = x$

**Vocabulaire**
Soit $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

- On parle aussi de **$\mathbb{R}$-espace vectoriel**. À notre niveau, on pourra même omettre le $\mathbb{R}$ et parler simplement d'espace vectoriel.
- Les éléments de $E$ sont appelés **vecteurs**.
- Afin de faire la différence entre réels et vecteurs on note souvent les vecteurs à l'aide d'une flèche : $\overrightarrow{x}$.
- Les réels participant à la multiplication externe sont parfois appelés des **scalaires**.
  On parle aussi de **multiplication par un scalaire** pour désigner la loi $\cdot$

**Remarque**

- L'ensemble $E$ est non vide. On l'a exigé en début de définition.
  Cela apparaît aussi dans les propriétés de $+$ puisqu'il existe dans $E$ un élément particulier noté $0_E$.
- Si $E$ est un $\mathbb{R}$-ev, alors deux cas se présentent :
  × $E = \{\overrightarrow{0_E}\}$ et dans ce cas, $E$ ne contient qu'un seul élément et est donc un ensemble fini.
  × $E \neq \{\overrightarrow{0_E}\}$ (on dit alors que $E$ n'est pas réduit à $\{\overrightarrow{0_E}\}$) et dans ce cas, $E$ contient un nombre infini d'éléments.
  En effet, comme $E \neq \{\overrightarrow{0_E}\}$, il existe un élément $\overrightarrow{u} \in E$ tel que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0_E}$.
  La loi $\cdot$ étant externe, on a alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ : $\quad \lambda \cdot \overrightarrow{u} \in E$.
  On vient ainsi de créer autant d'éléments dans $E$ qu'il y en a dans $\mathbb{R}$.

> On retiendra que le seul $\mathbb{R}$-ev fini est celui réduit à $\{\overrightarrow{0_E}\}$.
> Les autres $\mathbb{R}$-ev contiennent un nombre infini d'éléments.

**Pour aller plus loin ...**
En mathématiques, on considère souvent des $\mathbb{K}$-ev avec $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$. Si l'on se réfère à la définition d'ev, cet ensemble $\mathbb{K}$ doit forcément admettre :

× une loi $+_{\mathbb{K}}$ (présence de $\lambda +_{\mathbb{K}} \mu$ dans la définition),

× une loi $\times_{\mathbb{K}}$ (présence de $\lambda \times_{\mathbb{K}} \mu$ dans la définition).

On exige de ces deux lois $+_{\mathbb{K}}$ et $\times_{\mathbb{K}}$ qu'elles vérifient les propriétés suivantes :

- commutativité,
- associativité,
- existence d'un élément neutre (noté $O_{\mathbb{K}}$ pour + et $1_{\mathbb{K}}$ pour $\times$),
- existence d'un « symétrique » (on parle d'un opposé pour la loi $+_{\mathbb{K}}$ et d'un inverse pour la loi $\times_{\mathbb{K}}$),
- distributivité de la loi $\times_{\mathbb{K}}$ à droite et à gauche de la loi $+_{\mathbb{K}}$.

On définit ainsi la notion de corps commutatif.
On peut citer comme exemples classiques : $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$.

**Exemple**

- Les ensembles munis d'une loi de composition interne + et d'une loi de composition externe $\cdot$ cités précédemment, à savoir :

$$\mathbb{R}^n,\ \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \mathcal{F}(D,\mathbb{R}),\ \mathbb{R}[X],\ \mathbb{R}_n[X],\ \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

  sont des espaces vectoriels.

**Remarque**

- L'ordre des éléments dans la multiplication externe est important :

$$\cancel{\overrightarrow{x} \cdot \lambda} \qquad \lambda \cdot \overrightarrow{x}\ \checkmark$$

- La définition d'ev ne fait pas apparaître de loi permettant la multiplication de vecteurs. On ne peut donc, a priori, multiplier deux vecteurs entre eux.

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}}$$

### I.2.b) Propriétés générales d'un espace vectoriel

**Théorème 1.**

*Soit $E$ un espace vectoriel.*

*Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $\overrightarrow{x} \in E$.*

*1)* *L'élément neutre $\overrightarrow{0_E}$ de $E$ est unique.*

*2)* *Tout élément $\overrightarrow{x} \in E$ admet un unique opposé par la loi +.*
*On note alors $-\overrightarrow{x}$ l'opposé de $\overrightarrow{x}$.*

*3)* $\lambda \cdot \overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{0_E}$

*4)* $0 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$

*5)* $\lambda \cdot (-\overrightarrow{x}) = (-\lambda) \cdot \overrightarrow{x} = -(\lambda \cdot \overrightarrow{x})$

*6)* $\lambda \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E} \ \Rightarrow\ \lambda = 0 \ \texttt{OU}\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$

*Démonstration.*

*1)* L'élément neutre $\overrightarrow{0_E}$ de $E$ est unique.
Supposons par l'absurde que la loi + admet deux éléments neutres distincts $\overrightarrow{0_1}$ et $\overrightarrow{0_2}$. Alors :

× $\overrightarrow{0_1} + \overrightarrow{0_2} = \overrightarrow{0_2}$ car $\overrightarrow{0_1}$ est un élément neutre de la loi +,

× $\overrightarrow{0_1} + \overrightarrow{0_2} = \overrightarrow{0_1}$ car $\overrightarrow{0_2}$ est un élément neutre de la loi +.

On en conclut que $\overrightarrow{0_1} = \overrightarrow{0_2}$.
Absurde !

*2)* Supposons par l'absurde que $\overrightarrow{x}$ admet deux opposés distincts $\overrightarrow{y_1}$ et $\overrightarrow{y_2}$.
Alors :

× $\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y_2} = (\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{x}) + \overrightarrow{y_2} = \overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{y_2} = \overrightarrow{y_2}$.

× $\overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y_2} = \overrightarrow{y_1} + (\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y_2}) = \overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{y_1}$.

On en conclut que $\overrightarrow{y_1} = \overrightarrow{y_2}$.
Absurde !

*3)* $\lambda \cdot \overrightarrow{0_E} = \lambda \cdot (\overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{0_E}) = \lambda \cdot \overrightarrow{0_E} + \lambda \cdot \overrightarrow{0_E}$.

On ajoute alors $-(\lambda \cdot \overrightarrow{0_E})$ l'opposé de $\lambda \cdot \overrightarrow{0_E}$ de part et d'autre de l'égalité :

$$\begin{array}{rrcl} & \lambda \cdot \overrightarrow{0_E} + (-(\lambda \cdot \overrightarrow{0_E})) & = & \lambda \cdot \overrightarrow{0_E} + \lambda \cdot \overrightarrow{0_E} + (-(\lambda \cdot \overrightarrow{0_E})) \\ \text{alors} & \overrightarrow{0_E} & = & \lambda \cdot \overrightarrow{0_E} + \overrightarrow{0_E} \ = \ \lambda \cdot \overrightarrow{0_E} \end{array}$$

*4)* De même, on remarque :

$$0 \cdot \overrightarrow{x} = (0+0) \cdot \overrightarrow{x} = 0 \cdot \overrightarrow{x} + 0 \cdot \overrightarrow{x}$$

et on ajoute l'opposé de $0 \cdot \overrightarrow{x}$ de chaque côté.

*5)* On écrit :

$$\overrightarrow{0_E} = \lambda \cdot \overrightarrow{0_E} = \lambda \cdot (\overrightarrow{x} + (-\overrightarrow{x})) = \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \lambda \cdot (-\overrightarrow{x})$$

et on ajoute l'opposé de $\lambda \cdot \overrightarrow{x}$ de chaque côté de sorte à obtenir :

$$-(\lambda \cdot \overrightarrow{x}) = \lambda \cdot (-\overrightarrow{x})$$

De même, en remarquant :

$$\overrightarrow{0} = 0 \cdot \overrightarrow{x} = (\lambda + (-\lambda)) \cdot \overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{x} + (-\lambda) \overrightarrow{x}$$

on obtient : $-(\lambda \cdot \overrightarrow{x}) = (-\lambda) \cdot \overrightarrow{x}$
en ajoutant de part et d'autre l'opposé de $\lambda \overrightarrow{x}$.

*6)* Supposons $\lambda \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$ et $\lambda \neq 0$.

Dans ce cas :

$$\frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot \overrightarrow{x}) = \frac{1}{\lambda} \cdot \overrightarrow{0_E} = \overrightarrow{0_E}$$

d'où $1 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$ et $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$.

□

### I.2.c) Notion de combinaison linéaire

**Définition**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_m})$ une **famille** de vecteurs de $E$.

- Un vecteur $\overrightarrow{v}$ est une **combinaison linéaire** des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_m}$ s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{u_2} + \dots + \lambda_m \cdot \overrightarrow{u_m}}$$

- Un vecteur $\overrightarrow{v}$ ainsi défini est un élément de $E$ (c'est une conséquence directe du fait que $+$ et $\cdot$ sont deux lois de composition).

**Remarque**

- Par famille de vecteurs, on entend ici un regroupement indexé de vecteurs.
- Par exemple :
  × $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une famille de deux vecteurs de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
  $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une CL des éléments de cette famille.
  × $(X^2, 1+2X, 1-X^4)$ est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}_4[X]$.
  $\sqrt{2} \cdot X^2 - 2 \cdot (1+2X) + \mathrm{e} \cdot (1-X^4)$ est une CL de ces vecteurs.
  $-3 \cdot X^2 + 37 \cdot (1-X^4)$ en est une autre.
  *(dans cette dernière CL, on a omis d'écrire* $0 \cdot (1+2X)$*)*
- Le caractère indexé de ces deux familles est ici implicite : elles ont un premier vecteur, puis un deuxième ...
- La notion de combinaison linéaire est au cœur de la structure vectorielle. Dire que toute CL d'éléments de $E$ est dans $E$ équivaut au fait que les lois $+$ et $\cdot$ sont des lois de composition respectivement interne et externe.

# II. Sous-espaces vectoriels

## II.1. Définition

### Définition

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni des lois $+$ et $\cdot$

Une partie non vide $F$ de $E$ est un **sous-espace vectoriel** de $E$ si :

*a)* $\forall(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F^2, \quad \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F \quad$ *($F$ est stable pour la loi $+$)*

*b)* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{x} \in F, \quad \lambda \cdot \overrightarrow{x} \in F \quad$ *($F$ est stable pour la loi $\cdot$)*

### Remarque

- Dire que $F$ est stable par la loi $+$ revient à dire que la loi $+$ est une loi de composition interne sur $F$ ($+ : F \times F \to F$).
- Dire que $F$ est stable par la loi $\cdot$ revient à dire que la loi $\cdot$ est une loi de composition externe sur $F$ ($\cdot : \mathbb{R} \times F \to F$).

### Exemple

*1)* Si $E$ est un ev, $\{\overrightarrow{0_E}\}$ et $E$ sont des sev de $E$.

*2)* L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
L'ensemble des polynômes de degré 2 n'est pas un sev de $\mathbb{R}[X]$ (ne contient pas 0 par exemple).

*3)* L'ensemble des fonctions réelles paires est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

L'ensemble $\mathcal{V}$ des v.a.r. est un sev de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.
L'ensemble $\mathcal{V}_d$ des v.a.r. discrètes est un sev de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.
L'ensemble $\mathcal{V}_c$ des v.a.r. à densité n'est pas un sev de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.

*4)* L'ensemble des suites réelles convergentes est un sev des $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

*5)* $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\}$ est un sev de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

### Propriété

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$$\boxed{F \text{ est un sev de } E \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{0_E} \in F}$$

*Démonstration.*
Soit $\overrightarrow{x} \in F$ ($F$ est non vide donc contient au moins un élément).

- $F$ étant stable par la loi $\cdot$, on en déduit que : $0 \cdot \overrightarrow{x} \in F$.
- Comme $\overrightarrow{x} \in F$ et $F \subset E$ alors $\overrightarrow{x} \in E$.
  Or, dans $E$ : $0 \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$.

On conclut de ces deux points que : $\overrightarrow{0_E} \in F$. □

### Remarque

- On utilisera particulièrement la contraposée de cette propriété.

$$\boxed{\overrightarrow{0_E} \notin F \quad \Rightarrow \quad F \text{ n'est pas un sev de } E}$$

- Ainsi, $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x+y+z = 1 \right\}$ n'est pas un sev de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
  En effet, $\overrightarrow{0_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin F$.
- L'ensemble $\mathcal{V}_c$ des variables continues (*i.e.* des variables à densité) n'est pas une sev de $E = \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.
  En effet, $\overrightarrow{0_E}$ est la v.a.r. nulle. Cette v.a.r. est évidemment discrète puisque son support $\{0\}$ est fini.
- L'ensemble des polynômes de degré 2 n'est pas un sev de $\mathbb{R}[X]$ puisque ne contient pas le polynôme nul.
- L'ensemble des suites $(u_n)$ dont le premier terme $u_0$ vaut 1 n'est pas un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ puisque ne contient pas la suite nulle.

**Théorème 2** (*caractérisation des sev de $E$*).

*Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

*Soit $F$ une partie non vide de $E$.*

$$\boxed{\begin{array}{l} F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \\ \Leftrightarrow \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F^2, \quad \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \mu \cdot \overrightarrow{y} \in F \\ \Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F^2, \quad \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F \end{array}}$$

*($F$ est stable par combinaison linéaire d'éléments de $F$)*

*Démonstration.*

***1)*** ($\Rightarrow$) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F^2$.
Comme $F$ est stable par la loi $\cdot$, on a : $\lambda \cdot \overrightarrow{x} \in F$ et $\mu \cdot \overrightarrow{y} \in F$.
Comme $F$ est stable par la loi $+$, on a $\lambda \cdot \overrightarrow{x} + \mu \cdot \overrightarrow{y} \in F$.

($\Leftarrow$) La propriété est vraie pour tout couple $(\lambda, \mu)$.
Elle l'est donc pour $\lambda = \mu = 1$, ce qui montre la stabilité de $F$ par $+$.
En prenant seulement $\mu = 0$, on prouve que $F$ est stable pour la loi $\cdot$

***2)*** Démonstration analogue. □

## II.2. Démontrer qu'un ensemble $F$ est un ev

**Proposition 1.**

*Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

$$\boxed{F \text{ sous-espace vectoriel de } E \quad \Rightarrow \quad F \text{ est un espace vectoriel}}$$

*Démonstration.*

- On a déjà vu que :
  - × $+$ est une loi de composition interne pour $F$ (car $F$ est stable par $+$).
  - × $\cdot$ est une loi de composition externe pour $F$ (car $F$ est stable par $\cdot$).
- De plus, ces deux lois vérifient les axiomes des espaces vectoriels puisqu'elles font déjà de $E$ un espace vectoriel.

  Démontrons par exemple que la loi $+$ est associative dans $F$.
  Soit $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) \in F^3$. Alors, comme $F \subset E$, $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}) \in E^3$.
  Ainsi : $(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) + \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$ car la loi $+$ est associative dans $E$. □

**Montrer qu'un ensemble $F$ est un espace vectoriel**
Afin de montrer que $F$ est un ev, il existe deux grandes possibilités.

***1)*** Vérifier tous les axiomes d'espace vectoriel : plutôt long et pénible.
*(en réalité, on ne le fait jamais)*

***2)*** Montrer que $F$ est un sev d'un ev $E$ de référence : c'est la méthode que l'on utilise en pratique.
On doit alors démontrer que :
  - ***(i)*** $F \subseteq E$
  - ***(ii)*** $F \neq \varnothing$ : on montre généralement que $\overrightarrow{0_E} \in F$
    *(si ce n'est pas le cas, $F$ n'est pas un espace vectoriel !)*
  - ***(iii)*** Si $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F^2$, $\quad \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \in F$
  - ***(iv)*** Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{x} \in F$, $\quad \lambda \cdot \overrightarrow{x} \in F$

  Les points ***(iii)*** et ***(iv)*** peuvent être remplacés par la propriété :
  - ***(iii)*** Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in F^2$, $\quad \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \mu \cdot \overrightarrow{y} \in F$

**Exercice**
Démontrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

***1)*** $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\}$.

***2)*** $F = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0\}$, où $M \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

***3)*** $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$.

***4)*** $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$.

***5)*** $F = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x)\}$.

***6)*** $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tM = M\}$.
*(c'est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).*

**Illustration sur ces exemples**
Traitons les questions ***1)*** et ***4)***.

***1)*** Démontrons que $F = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

***(i)*** $F \subseteq \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

***(ii)*** $F \neq \varnothing$. En effet, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$ puisque : $3 \times 0 + 2 \times 0 - 0 = 0$.

***(iii)*** $F$ est stable par combinaisons linéaires.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(X_1, X_2) \in F^2$.

- Comme $X_1 \in F$, $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ est un vecteur qui vérifie : $3x_1 + 2y_1 - z_1 = 0$.
En particulier : $3\lambda x_1 + 2\lambda y_1 - \lambda z_1 = 0$.
- Comme $X_2 \in F$, $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ est un vecteur qui vérifie : $3x_2 + 2y_2 - z_2 = 0$.
En particulier : $3\lambda x_2 + 2\lambda y_2 - \lambda z_2 = 0$.

Considérons maintenant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ défini par $X = \lambda \cdot X_1 + \mu \cdot X_2$.

On a alors :

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y - z & = & 3\ (\lambda x_1 + \mu x_2) + 2\ (\lambda y_1 + \mu y_2) - (\lambda z_1 + \mu z_2) \\ & = & (3\lambda x_1 + 2\lambda y_1 - \lambda z_1) + (3\mu x_2 + 2\mu y_2 - \mu z_2) \\ & = & 0 \end{array}$$

Ainsi, $X = \lambda \cdot X_1 + \mu \cdot X_2 \in F$.

***4)*** Démontrons que $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

***(i)*** $F \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition.

***(ii)*** $F \neq \varnothing$. En effet, la suite constante nulle est élément de $F$.

***(iii)*** $F$ est stable par combinaisons linéaires.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in F^2$.

- Comme $\overrightarrow{u} \in F$, $\overrightarrow{u}$ est une suite $(u_n)$ qui vérifie :
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\lambda\ u_{n+2} = \lambda\ u_{n+1} + 2\lambda\ u_n$.
- Comme $\overrightarrow{v} \in F$, $\overrightarrow{v}$ est une suite $(v_n)$ qui vérifie :
$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n$.
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $\mu\ v_{n+2} = \mu\ v_{n+1} + 2\mu\ v_n$.

Considérons maintenant $\overrightarrow{w} = (w_N)$ définie par $\overrightarrow{w} = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \mu \cdot \overrightarrow{v}$.
La suite $\overrightarrow{w}$ est par définition la suite de terme général :

$$w_n = \lambda\ u_n + \mu\ v_n$$

D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{array}{rcl} w_{n+2} & = & \lambda\ u_{n+2} + \mu\ v_{n+2} \\ & = & (\lambda\ u_{n+1} + 2\lambda\ u_n) + (\mu\ v_{n+1} + 2\mu\ v_n) \\ & = & (\lambda\ u_{n+1} + \mu\ v_{n+1}) + 2\ (\lambda\ u_n + \mu\ v_n) \\ & = & w_{n+1} + w_n \end{array}$$

Et ainsi $\overrightarrow{w} = \lambda \cdot \overrightarrow{x} + \mu \cdot \overrightarrow{v} \in F$.

### II.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

**Définition**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soit $A$ une partie non vide de $E$ ($A \subseteq E$).

- On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** $A$ et on note $\mathrm{Vect}(A)$ l'ensemble des vecteurs de $E$ qui s'écrivent comme combinaison linéaire d'éléments de $A$. Autrement dit :

$$\boxed{\mathrm{Vect}(A) = \{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{a_i} \mid p \in \mathbb{N}^*, (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, (\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_p}) \in A^p\}}$$

- En particulier, si $A = \{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}\}$ (*i.e.* $A$ fini), on a :

$$\boxed{\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overrightarrow{a_i} \ \middle|\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \right\}}$$

*(on note* $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m})$ *en lieu et place de* $\mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_m}\})$*)*

On suppose seulement que $A$ est une partie non vide de $E$.
**En aucun cas on ne suppose que $A$ est un espace vectoriel**.
$\mathrm{Vect}(A)$ est le vectorialisé de $A$. Partant d'une partie $A$, on lui ajoute tous les éléments lui permettant d'obtenir une structure vectorielle :

× pour tout $a \in A$, on ajoute tous les $\lambda a$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$,

× une fois ces ajouts effectués, on ajoute toutes les sommes finies d'éléments de cette nouvelle partie.

En résumé, partant de $A$, on ajoute toutes les combinaisons linéaires d'éléments de $A$.
On construit ainsi un espace vectoriel : c'est $\mathrm{Vect}(A)$.

**Exemple**

- Si $A = \{\overrightarrow{0}\}$, on a $\mathrm{Vect}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$.
- Si $A = \{\overrightarrow{a}\}$ avec $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ alors $\mathrm{Vect}(A) = \{\lambda \overrightarrow{a} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
  On notera simplement $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{a})$ au lieu de $\mathrm{Vect}(\{\overrightarrow{a}\})$.
  *(on parle de droite vectorielle engendrée par* $\overrightarrow{a}$*)*
- Si $A = \{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ avec $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{0}$ alors on a :
  $\mathrm{Vect}(A) = \{\lambda \overrightarrow{a} + \beta \overrightarrow{b} \mid (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.
  On notera simplement $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)$ au lieu de $\mathrm{Vect}\left(\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}\right)$.
  *(on parle de plan vectoriel engendrée par droite* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$*)*
- Sur $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ qui s'écrivent sous la forme :

$$\overrightarrow{u} = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$$

  pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
  Autrement dit, $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
- Sur $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathrm{Vect}\left(1, X, X^2\right)$ est l'ensemble des polynômes qui s'écrivent sous la forme :

$$P(X) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot X + \gamma \cdot X^2$$

  pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
  Autrement dit, $\mathrm{Vect}\left(1, X, X^2\right) = \mathbb{R}_2[X]$.

- Sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :
$$a \cdot \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$
pour $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Ainsi $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

- $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :
$$a \cdot \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$$
pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Ainsi $F$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

- $H = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme :
$$a \cdot \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&0\\0&a\end{pmatrix}$$
pour $a \in \mathbb{R}$.
Ainsi $H = \{a \cdot I_2 \mid a \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des matrices scalaires.

- $K = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)$ est l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui s'écrivent sous la forme :
$$a \cdot \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a&c\\c&b\end{pmatrix}$$
pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Ainsi $K$ est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

**Théorème 3.**

*Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

*Soit $A$ une partie* <u>*non vide*</u> *de $E$ ($A \subseteq E$).*

***1)*** $\overrightarrow{0_E} \in \text{Vect}(A)$.

***2)*** $A \subseteq \text{Vect}(A)$.

***3)*** $\boxed{\text{Vect}(A) \textit{ est un espace vectoriel.}}$

$\text{Vect}(A)$ *est même le plus petit sev de $E$ contenant $A$ :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\bullet\ F \textit{ sev de } E\\ \bullet\ F \supseteq A\end{array}\right\} \Rightarrow \quad F \supseteq \text{Vect}(A)}$$

***4)*** $\boxed{A \textit{ est un ev} \Leftrightarrow A = \text{Vect}(A).}$

***5)*** *On a notamment :* $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.

***6)*** $A \subseteq B \Rightarrow \text{Vect}(A) \subseteq \text{Vect}(B)$.

*Démonstration.*

***1)*** En prenant $p = 1$, $\lambda_1 = 0$, $\overrightarrow{a} \in A$, on obtient $0 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0_E} \in \text{Vect}(A)$.

***2)*** En prenant $p = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\overrightarrow{a} \in A$, on obtient $1 \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} \in \text{Vect}(A)$.

***3)*** $\text{Vect}(A)$ est bien un sev de $E$ car :

***(i)*** $\text{Vect}(A) \in E$ car $A \subseteq E$ et que $E$ est stable par combinaisons linéaires.

***(ii)*** $\text{Vect}(A) \neq \varnothing$ car $\overrightarrow{0_E} \in \text{Vect}(A)$.

***(iii)*** $\text{Vect}(A)$ est stable par la loi $+$.

***(iv)*** $\text{Vect}(A)$ est stable par la loi $\cdot$.

Considérons maintenant un sev $F$ de $E$ qui contient $A$.
Alors comme $F$ est un sev, s'il contient $A$, il doit aussi contenir toutes les combinaisons linéaires d'éléments de $A$.
Ainsi : $F \supseteq \text{Vect}(A)$.

***4)*** ($\Rightarrow$) Soit $A$ un ev.
Comme $A \supseteq A$, alors, d'après le point ***3)***, $A \supseteq \text{Vect}(A)$.
De façon évidente, $A \subseteq \text{Vect}(A)$.
D'où $A = \text{Vect}(A)$.

($\Leftarrow$) Supposons que $A = \text{Vect}(A)$.
Comme $\text{Vect}(A)$ est un ev, alors $A$ est un ev.

***5)*** $\text{Vect}(A)$ est un ev donc en appliquant le point ***4*** précédente, on obtient : $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$.

***6)*** Supposons $A \subseteq B$ et soit $\overrightarrow{x} \in \text{Vect}(A)$.
Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ et $(\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_p}) \in A^p$ tels que :

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{a_i}$$

Comme $A \subseteq B$, pour tout $i$ on a $\overrightarrow{a_i} \in B$ et donc $\overrightarrow{x} \in \text{Vect}(B)$.

$\square$

**MÉTHODO** **Démontrer qu'un ensemble $F$ est un espace vectoriel**

Afin de montrer que $F$ est un ev, il suffit de l'écrire sous la forme $\text{Vect}(\mathcal{F})$ où $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs.
Illsutrons cette méthode sur deux exemples.

***1)*** Démontrer que $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\}$ est un ev.

***2)*** Démontrer que $\left\{ \begin{pmatrix} b & a & b+c \\ a & b & a \\ b+c & a & b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$ est un ev.

***1)*** Il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = 3x + 2y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x+2y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi $F$ est un espace vectoriel engendré par une famille de deux vecteurs.

***2)*** Il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}
F &= \left\{ \begin{pmatrix} b & a & b+c \\ a & b & a \\ b+c & a & b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \text{Vect}\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi $F$ est un espace vectoriel engendré par une famille de trois vecteurs.

**Théorème 4.**

*Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) \in E^3$.*

***1)*** $\boxed{\text{Vect}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{0_E}\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)}$

*(on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant $\overrightarrow{0}$ à cette partie)*

***2)*** $\boxed{\text{Vect}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}\right)}$

*(on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en modifiant l'ordre des termes de la partie)*

***3)*** *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ :* $\boxed{\text{Vect}\left(\lambda \cdot \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}$

*(on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie par multiplication par un scalaire non nul d'un élément de cette partie)*

***4)*** *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ :*

$$\boxed{\text{Vect}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \lambda \cdot \overrightarrow{a} + \mu \cdot \overrightarrow{b}\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}$$

*(on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant à cette partie un vecteur qui apparaît comme CL d'éléments de cette partie.)*

***5)*** *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ :*

$$\boxed{\text{Vect}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} + (\lambda \cdot \overrightarrow{a} + \mu \cdot \overrightarrow{b})\right) = \text{Vect}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)}$$

*(on ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une partie en ajoutant à un vecteur de cette partie une CL des autres vecteurs de cette partie.)*

**Remarque**

- Afin d'améliorer la lisibilité de ces propriétés, on a limité l'écriture de celles-ci à des espaces vectoriels engendrés par des familles contenant seulement 2 ou 3 vecteurs.
- Évidemment, ces propriétés restent vraies pour des familles contenant un nombre quelconque de vecteurs.

*Démonstration.*
À vos stylos !

□ **Exemple**

On peut démontrer, à l'aide du Théorème 4 que la famille :

$$\mathcal{F} = (1+X, X, X-X^2, 1+2X+X^2)$$

est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. En effet :

$$\begin{aligned}
& \text{Vect}\left(1+X, X, X-X^2, 1+2X+X^2\right) \\
= \ & \text{Vect}\left(1, X, X-X^2, 1+2X+X^2\right) \\
= \ & \text{Vect}\left(1, X, -X^2, 1+2X+X^2\right) \\
= \ & \text{Vect}\left(1, X, X^2, 1+2X+X^2\right) \\
= \ & \text{Vect}\left(1, X, X^2\right) \\
= \ & \mathbb{R}_2[X]
\end{aligned}$$

> Lorsqu'on parle d'une famille génératrice d'un ev $E$, il faut systématiquement préciser l'ensemble $E$ engendré sans quoi ce qui est écrit n'a pas de sens.

**Explications**

- Pour bien comprendre les choses, il faut avoir en tête qu'une famille $\mathcal{F}$ est toujours génératrice, par définition, de $F = \text{Vect}\,(\mathcal{F})$.
- Cela revient à dire qu'une famille $\mathcal{F}$ est toujours génératrice ... de l'espace qu'elle engendre !
  *(on conviendra qu'une telle propriété n'a que peu d'intérêt)*
- Dans l'exemple qui précède affirmer que $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de $\text{Vect}\,(\mathcal{F})$ ne démontre rien. Le point d'intérêt de la question est de savoir si $\mathcal{F}$ génère $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Autrement dit si $\text{Vect}\,(\mathcal{F}) = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

# III. Familles génératrices, libres, bases

## III.1. Familles génératrices d'un espace vectoriel

### Définition

Soit $E$ un espace vectoriel.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une famille de vecteurs de $E$.

- La famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est dite **génératrice de** $E$ si :

$$E = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$$

Autrement dit, si tout vecteur de $E$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$.

$$\boxed{\begin{array}{c}(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}) \text{ est} \\ \text{une famille} \\ \text{génératrice de } E\end{array} \ \Leftrightarrow\ \forall \overrightarrow{x} \in E,\ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p,\ \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot \overrightarrow{e_i}}$$

- Si $E = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$, on dit que la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ **engendre** $E$.

### Remarque

- Le fait que $E \supset \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ est trivial : les éléments $\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}$ sont des éléments de $E$. Ainsi, toute combinaison linéaire de ces éléments est dans $E$.
- Dans cette définition, on a considéré que la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ qui engendre l'ev $E$ est une famille **finie** d'éléments de $E$.

  On peut en fait considérer des familles quelconques de vecteurs. On dit qu'une famille $A$ (éventuellement infinie) de vecteurs de $E$ est génératrice de $E$ si : $E = \mathrm{Vect}\,(A)$.
- En particulier, comme $E$ est un ev, $E = \mathrm{Vect}\,(E)$, ce qui signifie que l'ensemble $E$ engendre l'espace vectoriel $E$.
- Si l'on a choisi d'insister en priorité sur le cas des familles finies, c'est parce que le cas des familles infines n'apparaît jamais en voie ECE.

### Exemple

- La famille $\left( \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

  Pour le démontrer, on peut revenir à la définition.

  Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Cherchons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2a & & & & & = & x & & & & \\ 2a & + & b & + & c & = & & & y & & \\ 2a & - & b & + & c & = & & & & & z \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2a & & & & & = & x & & & & \\ & & b & + & c & = & -x & + & y & & \\ & - & b & + & c & = & -x & & & + & z \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2a & & & & & = & x & & & & \\ & & b & + & c & = & -x & + & y & & \\ & & & & 2c & = & -2x & + & y & + & z \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2a & & & & & = & x & & & & \\ & & 2b & & & = & & & y & - & z \\ & & & & 2c & = & -2x & + & y & + & z \end{array} \right.$$

  Ainsi :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left( \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left( -x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  On remarque au passage qu'à $x$, $y$, $z$ fixés, le système précédent admet une unique solution. On en reparlera.

- La démonstration précédente est très marquée 1$^{\text{ère}}$ année.
En réalité, dans la plupart des sujets de concours (tous ?) le caractère générateur d'une famille se manifeste de manière plus concrète.
On a démontré précédemment que :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\} = \text{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Cela permet de conclure que la famille $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $F$. On remarque que cette famille contient deux vecteurs.

- On a déjà vu que la famille $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ :

$$\text{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

On reviendra plus loin sur cette famille particulière.

- On a vu aussi que la famille $\mathcal{F} = (1, X, X^2)$ est génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ :

$$\text{Vect}\left(1, X, X^2\right) = \mathbb{R}_2[X]$$

On reviendra plus loin sur cette famille particulière.

- On a aussi démontré que $\mathcal{F} = (1 + X, X, X - X^2, 1 + 2X + X^2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ :

$$\text{Vect}\left(1 + X, X, X - X^2, 1 + 2X + X^2\right) = \mathbb{R}_2[X]$$

Pour ce faire, on s'est servi des manipulations algébriques autorisées sur la famille $(1 + X, X, X - X^2, 1 + 2X + X^2)$ (*cf* Théorème 4).

**Remarque**

- Il pourrait arriver qu'on demande de démontrer qu'une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ n'est pas génératrice d'un espace vectoriel donné. Cela signifie alors que :

$$\exists \overrightarrow{x} \in E, \ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, \ \overrightarrow{x} \neq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot \overrightarrow{e_i}$$

Autrement dit, il existe un vecteur $\overrightarrow{x}$ qui ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille $\mathcal{F}$.

- Par exemple, la famille $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ n'est pas une famille génératrice de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En effet, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des éléments de la famille $\mathcal{F}$.

> Lorsqu'on parle d'une famille génératrice d'un ev $E$, il faut systématiquement préciser l'ensemble $E$ engendré sans quoi ce qui est écrit n'a pas de sens.

**Explications**

- Pour bien comprendre les choses, il faut avoir en tête qu'une famille $\mathcal{F}$ est toujours génératrice, par définition, de $F = \text{Vect}\,(\mathcal{F})$.
- Cela revient à dire qu'une famille $\mathcal{F}$ est toujours génératrice ... de l'espace qu'elle engendre !
*(on conviendra qu'une telle propriété n'a que peu d'intérêt)*
- Dans l'exemple qui précède affirmer que $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice de $\text{Vect}\,(\mathcal{F})$ ne démontre rien. Le point d'intérêt de la question est de savoir si $\mathcal{F}$ génère $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Autrement dit si $\text{Vect}\,(\mathcal{F}) = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

**Théorème 5.**

*Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev.*

*Soit $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ une famille génératrice de $E$.*

*Soit $\overrightarrow{v} \in E$.*

- *Alors la famille $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{v})$ est génératrice de $E$.*
- *Plus généralement, toute sur-famille d'une famille génératrice de $E$ (i.e. toute famille contenant une famille génératrice de $E$), est une famille génératrice de $E$.*

*Démonstration.*
Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ une famille génératrice de $E$. Alors :

$$\text{Vect}\,(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{v}) \;\supseteq\; \text{Vect}\,(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) \;=\; E$$

car $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $E$.
De manière évidente : $\text{Vect}\,(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{v}) \subseteq E$ car les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{v}$ sont des éléments de $E$.
Ainsi : $E = \text{Vect}\,(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{v})$. □

## III.2. Familles libres d'un espace vectoriel

### III.2.a) Notion de dépendance linéaire

**Définition**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_m})$ une **famille** de vecteurs de $E$.

- On dit qu'il existe une **relation de dépendance linéaire** entre $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_m})$ s'il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$\lambda_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{u_2} + \cdots + \lambda_m \cdot \overrightarrow{u_m} = \overrightarrow{0}$$

- Cette relation est dite **triviale** si tous les $\lambda_i$ y apparaissant sont nuls.

### III.2.b) Notion de famille libre

**Définition**

Soit $E$ un espace vectoriel.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_m})$ une famille de vecteurs de $E$.

- La famille $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_m})$ est **libre** (dans $E$) si la seule relation de dépendance linéaire entre les vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ est la relation triviale.

  Autrement dit, $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_m})$ est libre si :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m, \quad \left( \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0 \right)$$

  Si la famille $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_m})$ est libre, on dit que les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_m}$ sont **linéairement indépendants**.

- Une famille non libre est dite **liée**.
  Cela signifie qu'il existe une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs de la famille $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_m})$.
  Ainsi, la famille $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_m})$ est dite **liée** (dans $E$) si :

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m, \quad \left( \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0} \right) \quad \texttt{ET} \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0, \cdots, 0)$$

**Remarque**

- La propriété $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0, \cdots, 0)$ signifie que les $\lambda_i$ sont non tous nuls (*et pas tous non nuls !*). Autrement dit, l'un des $\lambda_i$, au moins, est non nul.
- On peut aisément démontrer que toute famille contenant le vecteur $\overrightarrow{0}$ est liée. Considérons à cet égard $(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_m})$ une famille de vecteurs de $E$.
  La famille $(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_m}, \overrightarrow{0})$ est liée car :
  $$0 \cdot \overrightarrow{e_1} + \cdots + 0 \cdot \overrightarrow{e_m} + 1 \cdot \overrightarrow{0} \ = \ \overrightarrow{0}$$
  et que : $(0, \cdots, 0, 1) \neq (0, \cdots, 0, 0)$.

**Théorème 6.**

*Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev.*

| | | |
|---|---|---|
| *La famille* $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_m})$ *est liée* | $\Leftrightarrow$ | *L'un des vecteurs de la famille s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.* |

*Démonstration.*

($\Leftarrow$) Quitte à renuméroter les vecteurs de la famille, supposons que $\overrightarrow{e_1}$ s'exprime comme CL des autres vecteurs de la famille.
Autrement dit, il existe $(\lambda_2, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{m-1}$ : $\overrightarrow{e_1} = \sum\limits_{i=2}^{m} \lambda_i \cdot \overrightarrow{e_i}$.
Ainsi :
$$1 \cdot \overrightarrow{e_1} - \lambda_2 \cdot \overrightarrow{e_2} - \ldots - \lambda_m \cdot \overrightarrow{e_m} = \overrightarrow{0}$$
et comme $(1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_m) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, il existe une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs $\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_m}$.

($\Rightarrow$) Supposons que la famille est liée.
Ainsi, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \neq (0, \ldots, 0)$ tel que : $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0_E}$.
Quitte à renuméroter les vecteurs de la famille, supposons que $\lambda_1 \neq 0$ (l'un des $\lambda_i$ - au moins - est non nul).
On a alors : $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{e_1} = \sum\limits_{i=2}^{m} \lambda_i \cdot \overrightarrow{e_i}$ et ainsi : $\overrightarrow{e_1} = \sum\limits_{i=2}^{m} \dfrac{\lambda_i}{\lambda_1} \cdot \overrightarrow{e_i}$. □

`MÉTHODO` **Démontrer qu'une famille est libre/liée**

Illustrons la méthode sur des exemples.

***1)*** Démontrons que la famille $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

Supposons que : $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cette égalité est équivalente au système :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$
*(par remontées successives)*

La famille est donc libre.

*2)* Démontrons que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est liée.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
Supposons que : $\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
Cette égalité est équivalente au système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & & & - & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} \lambda_1 & = & \lambda_3 \\ \lambda_2 & = & -2\lambda_3 \end{array}\right.$$

Ce système homogène n'est pas de Cramer.
Cela signifie qu'il admet d'autres solutions que $(0,0,0)$.
En choisissant par exemple $\lambda_3 = 1$, on obtient une relation de dépendance linéaire non triviale entre les trois vecteurs considérés.

$$1 \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

La famille est donc liée.

*3)* Démontrons que la famille $(1, -3 + X, 1 - X^2)$ est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.
Supposons que : $\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot (-3 + X) + \lambda_3 \cdot (1 - X^2) = 0$.
Cette égalité se réécrit :

$$(\lambda_1 - 3\ \lambda_2 + \lambda_3) \cdot 1 + \lambda_2 \cdot X + (-\lambda_3) \cdot X^2 = 0$$

ce qui équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \lambda_1 & - & 3\ \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ & & & - & \lambda_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \right.$$

*(par remontées successives)*

**Remarque**

- On s'aperçoit que la résolution du système est très simple dans ce dernier exemple. C'est le cas car la famille de polynôme est **échelonnée en degré** ce qui signifie que les polynômes $(P_1, P_2, P_3)$ de la famille vérifient :

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \deg(P_3)$$

  C'est un cas classique qu'il est utile de connaître.
- Ce n'est évidemment pas le cas de toutes les familles de polynôme.
  Pour les familles non échelonnées en degré, on ne peut rien dire :
  × la famille $(1 + X, -3 + X, 1 - X^2)$ n'est pas échelonnée en degré. On peut démontrer qu'elle est libre.
  × la famille $(1 + X, -3 + X + X^2, 4 - X^2)$ n'est pas échelonnée en degré. On peut démontrer qu'elle est liée. En effet :

$$4 - X^2 = 1 \cdot (1 + X) - 1 \cdot (-3 + X + X^2)$$

**À RETENIR**

Pour étudier la liberté d'une famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_m})$, on suppose qu'il existe une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de cette famille :

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0}$$

Cette égalité est équivalente à l'écriture d'un système d'équations linéaires homogène en les variables $\lambda_1$, ..., $\lambda_m$. Deux cas se présentent alors :

*1)* ce système est de Cramer et donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = (0, \dots, 0)$.
Cela démontre que la relation de dépendance linéaire supposée en début d'énoncé est la relation triviale.

*2)* ce système n'est pas de Cramer (il admet alors une infinité de solutions).
Ainsi, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$ solution du système et on peut ainsi exhiber une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs $\overrightarrow{e_i}$.

**Théorème 7.**

*Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev et soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.*

*Soit $(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_m}) \in E^m$.*

- *Si $\mathcal{F} = (\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_m})$ est une famille libre (dans $E$), alors la famille $\mathcal{F} \setminus \{\overrightarrow{e_m}\} = (\overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_{m-1}})$ est elle aussi une famille libre (dans $E$).*
- *Plus généralement, toute sous-famille d'une famille libre (i.e. toute famille contenue dans une famille libre), est une famille libre.*

*Démonstration.*
Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_m})$ une famille libre.

Démontrons que $(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_{m-1}})$ est libre.
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$.
Supposons que : $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \dots + \lambda_{m-1} \cdot \overrightarrow{e_{m-1}} = \overrightarrow{0}$.
On a alors : $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \dots + \lambda_{m-1} \cdot \overrightarrow{e_{m-1}} + 0 \cdot \overrightarrow{e_m} = \overrightarrow{0}$.
La famille $(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_m})$ étant une famille libre, on en déduit que :

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, 0) \ = \ (0, \dots, 0, 0)$$

Ainsi : $\lambda_1 = \dots = \lambda_{m-1} = 0$ et la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_{m-1}})$ est libre. □

### III.2.c) Notion de colinéarité

**Définition**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev.

Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si :

$$(\exists \alpha \in \mathbb{R}, \ \overrightarrow{v} = \alpha \cdot \overrightarrow{u}) \ \texttt{OU} \ (\exists \beta \in \mathbb{R}, \ \overrightarrow{u} = \beta \cdot \overrightarrow{v})$$

**Théorème 8.**

*Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev.*

***1)*** *Une famille $(\overrightarrow{u})$ constituée uniquement d'un vecteur non nul de $E$ est libre. (la famille $(\overrightarrow{0})$ est par contre liée comme énoncé précédemment)*

***2)*** *Une famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ constituée de deux vecteurs de $E$ est libre si et seulement si ces deux vecteurs sont non colinéaires.*

***3)*** *De manière générale, une famille de vecteurs d'un ev $E$ est liée si l'un des vecteurs de cette famille peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille* (déjà vu !).

*Démonstration.*

***1)*** Le seul réel $\lambda$ tel que $\lambda \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ est le réel $\lambda = 0$ puisque $\overrightarrow{u}$ est non nul.

***2)*** On démontre la propriété équivalente : une famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ constituée de deux vecteurs de $E$ est liée si et seulement si ces deux vecteurs sont colinéaires.

La famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est liée

$\Leftrightarrow$ il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$ tel que : $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{u} + \lambda_2 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

$\Leftrightarrow$ il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0)$ tel que : $\lambda_1 \cdot \overrightarrow{u} = -\lambda_2 \cdot \overrightarrow{v}$.

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } (\lambda_1, \lambda_2) \neq (0,0) \text{ tel que :} \\ \overrightarrow{u} = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \overrightarrow{v} \ (\text{si } \lambda_1 \neq 0) \\ \texttt{OU} \ \ \overrightarrow{v} = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \overrightarrow{u} \ (\text{si } \lambda_2 \neq 0) \end{array} \right.$$

□

**Exemple**

- Dans les énoncés de concours, on travaille souvent avec des familles qui contiennent un, deux ou trois vecteurs. Dans les deux premiers cas, ce théorème permet de conclure rapidement quant à la liberté de la famille étudiée.

- Par exemple, on a démontré précédemment que :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\} = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

  La famille $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ est constituée de deux vecteurs non colinéaires. Elle est donc libre.

- Dans le cas d'une famille constituée de trois vecteurs, il saute parfois aux yeux qu'un vecteur s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteur. Cela permet de conclure que la famille est liée.

  Par exemple, la famille $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est liée car :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice**

Les familles $\mathcal{F}_k$ suivantes sont-elles libres ?

***a.*** $\mathcal{F}_1 = ((1,2), (1,-1))$

***b.*** $\mathcal{F}_2 = ((1,4))$

***c.*** $\mathcal{F}_3 = ((0,0))$

***d.*** $\mathcal{F}_4 = ((1,-2), (2,3), (1,0))$

### III.2.d) Intérêt des familles libres

**Théorème 9.**

*Soit $E$ un espace vectoriel et soit $m \in \mathbb{N}^*$.*

*Soit $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_m})$ une famille* **libre** *de vecteurs de $E$.*

*Si un vecteur $\overrightarrow{u} \in E$ s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_m})$ alors cette combinaison linéaire est unique.*

*Démonstration.*
Supposons par l'absurde que $\overrightarrow{u}$ s'écrive à l'aide de deux combinaisons linéaires distinctes de $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_m})$. Autrement dit, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_m) \in \mathbb{R}^m$ deux $m$-uplets distincts tels que :

× $\overrightarrow{u} = \lambda_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \ldots + \lambda_m \cdot \overrightarrow{e_m}$

× $\overrightarrow{u} = \mu_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \ldots + \mu_m \cdot \overrightarrow{e_m}$

Par soustraction, on obtient :

$$\overrightarrow{0_E} = (\lambda_1 - \mu_1) \cdot \overrightarrow{e_1} + \ldots + (\lambda_m - \mu_m) \cdot \overrightarrow{e_m}$$

Comme $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_m})$ est une famille libre, cette relation de dépendance linéaire est la relation triviale.
Autrement dit, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0$ *i.e.* $\lambda_i = \mu_i$.
Ceci contredit l'hypothèse initiale. □

## III.3. Bases d'un espace vectoriel

### III.3.a) Définition

**Définition**

Soit $E$ un espace vectoriel.

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ une famille de vecteurs de $E$.

- La famille $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de $E$ si :
  *1)* c'est une famille génératrice de $E$.
  *2)* c'est une famille libre dans $E$.
- Si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de $E$, tout vecteur $\overrightarrow{x} \in E$ se décompose de **manière unique** sous forme d'une CL des éléments de $\mathcal{B}$.
- Autrement dit :

$$\begin{array}{c} (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n}) \\ \text{est une} \\ \text{base de } E \end{array} \Leftrightarrow \forall \overrightarrow{x} \in E, \ \exists\, ! \ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overrightarrow{e_i}$$

- Les réels $(x_1, \ldots, x_n)$ sont appelés les **coordonnées** de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.

**Exemple**

- On a déjà démontré que la famille $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ était génératrice de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ en revenant à la définition. Plus précisément, on a démontré :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} a & = & \frac{1}{2}\, x & & & & \\ b & = & & & \frac{1}{2}\, y & - & \frac{1}{2}\, z \\ c & = & -x & + & \frac{1}{2}\, y & + & \frac{1}{2}\, z \end{array} \right.$$

Ainsi, le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ se décompose de manière unique sous forme d'une CL des éléments de la famille $\mathcal{F}$.
On en déduit que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
Dans cette base, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x}{2}, \dfrac{y-z}{2}, \dfrac{-2x+y+z}{2}\right)$.

- On l'a déjà dit, cette méthode est très marquée 1ère année.
  Cette méthodologie est à éviter sauf si l'on demande d'exhiber les coordonnées d'un vecteur dans une base. Par exemple, trouvons les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

  Cherchons $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 3 \\ & & & & c & = & 2 \\ a & + & 2b & + & c & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 3 \\ & & & & c & = & 2 \\ & & b & & & = & -4 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 3 \\ & & b & & & = & -4 \\ & & & & c & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\underset{L1 \leftarrow L_1 - L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & & & = & 1 \\ & & b & & & = & -4 \\ & & & & c & = & 2 \end{array}\right. \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & & & & & = & 5 \\ & & b & & & = & -4 \\ & & & & c & = & 2 \end{array}\right.$$

  Ainsi, le vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ a pour coordonnéees $(5, -4, 2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

- Reprenons à nouveau un exemple déjà traité :

$$F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

  La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ étant libre et génératrice, c'est une base de $F$.

**Exemple**

*1)* Montrer que $((1,1),(2,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
Quels sont les coordonnées du vecteur $(3,4)$ dans cette base ?

*2)* Montrer que $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

*3)* Montrer que $(1, 2X+1, X^2-3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

*4)* Trouver une base de l'ensemble $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 2y - z = 0\right\}$.

### III.3.b) Notion de base canonique

On a vu précédemment que la famille $((1,1),(2,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Cette base n'est pas unique. Par exemple, la famille $((1,0),(0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Cette base naturelle de $\mathbb{R}^2$ est appelée base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Les espaces vectoriels de référence sont munis d'une base canonique.

- **L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$**

  Considérons la famille $\mathcal{B}_c = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$, définie par :

$$\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0, \dots, 0), \ \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \overrightarrow{e_n} = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

  Cette famille est libre et génératrice de $\mathbb{R}^n$. C'est donc une base de $\mathbb{R}^n$.
  Ainsi, pour tout vecteur $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, il exsite $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \overrightarrow{e_k}$$

  où $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont coordonnées du vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}_c$.
  *Attention à ne pas confondre le vecteur $\overrightarrow{x}$ qui est un élément de $E$ et ses coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui est un élément de $\mathbb{R}^n$.*

- **L'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$**

  Considérons la famille $\mathcal{B}_c = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n})$, définie par :

$$\overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \overrightarrow{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Cette famille est libre et génératrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. C'est donc une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi, pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, il exsite $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k \, \overrightarrow{e_k}$$

  où $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sont coordonnées du vecteur $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathcal{B}_c$.

- **L'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$**

  Considérons la famille $\mathcal{B}_c = (\, E_{i,j} \,)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, où $E_{i,j}$ est définie par :

$$E_{i,j} \; = \; \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ - \, i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} | \\ j \end{array} & \end{array}$$

  Cette famille est libre et génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. C'est donc une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Ainsi, pour tout $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, il exsite $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ tel que :

$$M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \, E_{i,j}$$

  et donc $(a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{2,n}, \dots, a_{n,1}, \dots, a_{n,n})$ sont les coordonnées de la matrice $M$ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$.

**Exemple**

- On considère l'espace vectoriel $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Sa base canonique est :

$$\mathcal{B}_c = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

  Les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_c$ sont $(3, 1, 7, 5)$.

- **L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$**

  Considérons la famille $\mathcal{B}_c = \big(1, X, X^2, \ldots, X^n\big)$.
  Cette famille est libre et génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, il exsite $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

  $$P(X) = a_0\, 1 + a_1\, X + \ldots + a_n\, X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, X^k$$

  où $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ sont coordonnées du polynôme $P$ dans la base $\mathcal{B}_c$.

  **Exemple**

  - Déterminons les coordonnées du polynôme $Q(X) = (X-2)^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On a :

    $$(X-2)^3 = X^3 - 6X^2 + 12X - 8$$

    Ainsi, $(-8, 12, -6, 1)$ sont les coordonnées de $(X-2)^3$ dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
  - On peut démontrer que $\mathcal{B} = (1, X-2, (X-2)^2, (X-2)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Dans cette base, $Q$ a pour coordonnées $(0, 0, 0, 1)$.
    Quelles sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}_c$ dans cette base ?
    × $1 = 1$
    Ainsi, 1 a pour coordonnées $(1, 0, 0, 0)$ dans $\mathcal{B}$.
    × $X = 2 + (X-2)$
    Ainsi, $X$ a pour coordonnées $(2, 1, 0, 0)$ dans $\mathcal{B}$.
    × $X^2 = 4 + 4\,(X-2) + (X-2)^2$
    Ainsi, $X^2$ a pour coordonnées $(4, 4, 1, 0)$ dans $\mathcal{B}$.
    × $X^3 = 8 + 12\,(X-2) + 6\,(X-2)^2 + (X-2)^3$
    Ainsi, $X^3$ a pour coordonnées $(8, 12, 6, 1)$ dans $\mathcal{B}$.
  - Enfin, si $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ alors $P$ a pour coordonnées $(a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3, a_0 + 4a_2 + 12a_3, a_2 + 6a_3, a_3)$ dans la base $\mathcal{B}$.
    *(il s'agit d'un changement de base : nous en reparlerons)*

# IV. Espace vectoriel de dimension finie

## IV.1. Notion de dimension finie

### Définition

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une base de cardinal fini (*i.e.* constituée d'un nombre fini de vecteurs).

### Théorème 10.

*Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev non réduit à $\{\overrightarrow{0_E}\}$.*

*Supposons que $E$ admet une famille génératrice finie.*

*1) Alors $E$ possède une base $\mathcal{B}$ de cardinal fini que l'on note $n \in \mathbb{N}^*$.*

*2) Et toutes les bases de $E$ sont finies et de même cardinal $n$.*

- *Ce nombre $n$ est appelé* ***dimension de l'espace vectoriel*** *$E$, noté* $\dim E$.
- *Par convention, on note* $\dim(\{\overrightarrow{0_E}\}) = 0$.

*Démonstration.*

*1)* La démonstration est basée sur le théorème de la base incomplète.

**a.** Supposons que $E$ possède une famille libre $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_m})$ (pas évident) et une famille génératrice $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p})$ (c'est l'hypothèse) alors :

× soit tout $\overrightarrow{u_i}$ est CL des vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_m})$ et dans ce cas, $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_m})$ est génératrice de $E$.

× soit l'un des vecteurs $\overrightarrow{u_i}$ n'est pas CL des vecteurs $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_m})$ et dans ce cas, en l'ajoutant aux vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ précédents, on crée une famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_m}, \overrightarrow{u_i})$ qui est libre dans $E$.

On itère alors ce procédé qui se termine nécessairement en un nombre fini d'étapes puisqu'on ne peut ajouter, au maximum, que les $p$ vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, ..., $\overrightarrow{u_m}$. La famille ainsi obtenue est une base de $E$.

**b.** Il suffit de démontrer que $E$ possède une famille libre pour conclure.
On sait que $E$ possède une famille génératrice $\mathcal{G}$. Considérons un élément $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0_E}$ (c'est possible car $E \neq \{\overrightarrow{0_E}\}$) de cette famille.
Alors $(\overrightarrow{u})$ est une famille libre que l'on peut compléter en une base de $E$ en lui ajoutant au fur et à mesure des vecteurs de $\mathcal{G}$.

*2)* La démonstration classique consiste à introduire le lemme suivant :
*si $E$ possède une base de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ alors toute famille possédant strictement plus de $n$ éléments est liée*
La démonstration (technique) de ce lemme n'est pas réalisée ici.
Une fois ce résultat démontré, il est alors simple de démontrer, par l'absurde, que toutes les bases de $E$ ont même cardinal.

Supposons par l'absurde que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de cardinal différent $n$ et $m$. Alors, quitte à renuméroter ces bases :

$$\text{Card}(\mathcal{B}_1) = n < m = \text{Card}(\mathcal{B}_2)$$

Mais alors la famille $\mathcal{B}_2$ est liée. Ceci contredit le fait que $\mathcal{B}_2$ est une base. □

### Remarque

- Ce théorème signifie que pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, il suffit d'en déterminer une base. On obtient en particulier la dimension des ev de référence :
  × $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$.
  × $\dim\left(\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})\right) = 2$.
  × $\dim\left(\mathscr{M}_3(\mathbb{R})\right) = 9$.
  × $\dim\left(\mathbb{R}_3[X]\right) = 4$.
- On rappelle que le seul espace vectoriel ne contenant qu'un nombre fini de vecteurs est l'espace vectoriel qui ne contient que le vecteur nul : $\{\overrightarrow{0}\}$.
- Cela permet de bien comprendre l'intérêt de la notion de base / dimension d'un ev. Tout ev de dimension finie différent de $\{\overrightarrow{0}\}$, admet une réprésentation finie (peut être décrit par les éléments constitutifs d'une base).
- La démonstration (son esquisse) du théorème de la base incomplète permet d'énoncer les deux points suivants.
  *1)* Toute famille libre (dans $E$) peut être complétée en une base de $E$. *(c'est le point* ***a.****)*
  *2)* De toute famille génératrice de $E$ on peut extraire une base de $E$.
  Ceci signifie que toute famille génératrice de $E$ contient une base de $E$. *(c'est le point* ***b.****)*

## IV.2. Cardinal d'une famille libre, d'une famille génératrice en dimension finie

**Théorème 11.**

*Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.*

**Sur les familles libres**

***a)*** *Toute famille libre possède au plus $n$ vecteurs.*

***b)*** *Toute famille libre de $n$ vecteurs est une base de $E$.*

***c)*** *Toute famille de $q$ vecteurs avec $q > n$ est liée.*

***d)*** *Toute sous-famille d'une famille libre (dans $E$) est libre (dans $E$).*

**Sur les familles génératrices**

***a)*** *Toute famille génératrice de $E$ possède au moins $n$ vecteurs.*

***b)*** *Toute famille génératrice de $E$ de $n$ vecteurs est une base de $E$.*

***c)*** *Toute famille de $q$ vecteurs avec $q < n$ n'est pas génératrice de $E$.*

***d)*** *Toute sur-famille d'une famille génératrice de $E$ est génératrice de $E$.*

*Démonstration.*

***1. a)*** C'est le lemme évoqué dans la démonstration du théorème précédent.

***b)*** Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ une famille libre à $n$ vecteurs.
Montrons que tout élément $\overrightarrow{v} \in E$ peut s'écrire comme CL des $\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}$. *(cela démontre que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice)*

Soit $\overrightarrow{v} \in E$. Alors $(\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{v})$ est une famille liée car elle possède $n+1$ vecteurs. Il existe donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \neq (0, \dots, 0)$ tel que :

$$\lambda_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + \dots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{u_n} + \lambda_{n+1} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

Deux cas se présentent alors :

× si $\lambda_{n+1} = 0$ alors la précédente égalité se réécrit :

$$\lambda_1 \cdot \overrightarrow{u_1} + \dots + \lambda_n \cdot \overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{0}$$

ce qui montre que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ puisque la famille $\mathcal{F}$ est libre. D'où $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) = (0, \dots, 0)$. Contradiction !

× si $\lambda_{n+1} \neq 0$ alors $\overrightarrow{v} = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_{n+1}} \cdot \overrightarrow{u_1} + \dots + -\dfrac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \cdot \overrightarrow{u_n}$

***c)*** Déjà fait.

***d)*** Déjà fait.

***2. a)*** Considérons une famille génératrice de $E$ et supposons par l'absurde que cette famille possède strictement moins de $n$ vecteurs. Alors, on peut extraire de cette famille une base de $E$ de cardinal $m < n$.
Impossible !

***b)*** Considérons une famille génératrice de $E$ possédant $n$ vecteurs. Supposons par l'absurde que ce n'est pas une base de $E$. Alors, on peut en extraire une base de cardinal $m < n$.
Impossible !

***c)*** On reprend la démonstration précédente : si $E$ admettait une famille génératrice de $q$ vecteurs, on pourrait en extraire une base de cardinal $m \leqslant q < n$.
Impossible !

***d)*** Déjà fait. □

**À RETENIR**

Toute famille libre de $n$ vecteurs est une base de $E$.

Toute famille génératrice de $E$ de $n$ vecteurs est une base de $E$.

$$\text{Card}\begin{pmatrix}\text{famille}\\ \text{libre de } E\end{pmatrix} \leqslant \text{Card}\begin{pmatrix}\text{base de}\\ E\end{pmatrix} \leqslant \text{Card}\begin{pmatrix}\text{famille}\\ \text{génératrice de } E\end{pmatrix}$$

MÉTHODO

Pour démontrer qu'une famille finie $\mathcal{F}$ est une base d'un ev $E$, on peut procéder comme suit.

*1)* **Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice et** $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$

La famille $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- C'est une famille génératrice.
  En effet, tout vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (c-a) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- De plus $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

*2)* **Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre et** $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$

La famille $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- C'est une famille libre.
  Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que :

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  On obtient alors le système : $\left\{ \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & = & 0 \\ & & \lambda_2 & & & = & 0 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \end{array} \right.$

  D'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
- De plus $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

*(c'est la méthode que l'on utilisera en pratique - sauf mention du contraire)*

## IV.3. Dimension d'un sous-espace vectoriel

**Théorème 12.**

*Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n$.*

*Soit $F$ un sev de $E$.*

*1) Alors $F$ est de dimension finie et* $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.

*2)*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \bullet\ F \text{ sev de } E \\ \bullet\ \dim(F) = \dim(E) \end{array}\right\} \Rightarrow F = E}$$

*Démonstration.*

*1)* Supposons démontré que $F$ est de dimension finie $p$ (il s'agit encore une fois d'un procédé de complétion. . . ).
Considérons alors $\mathcal{B}$ une base de $F$.
Alors $\mathcal{B}$ est une famille libre de $F$ et donc de $E$.
En tant que famille libre de $E$, son cardinal est inférieur à $\dim(E)$.
Ainsi : $p = \text{Card}(\mathcal{B}) \leqslant \dim(E)$.

*2)* Supposons que $\dim(F) = \dim(E)$.
- Comme $\mathcal{B}$ est une base de $F$, $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(F)$.
- On en déduit que : $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$.
- Ainsi $\mathcal{B}$ est une famille libre de $E$ telle que $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$. C'est donc une base de $E$.
- D'où $F = \text{Vect}(\mathcal{B}) = E$. □

**Remarque**

Pour démontrer que $E = F$, on peut réaliser les deux étapes suivantes :

*1)* démontrer que $F \subset E$.

*2)* démontrer que $\dim(F) = \dim(E)$.

# V. Notion de rang

## V.1. Notion de rang d'une famille de vecteurs

### V.1.a) Définition et propriétés

**Définition (Rang)**

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) \in E^p$.

On appelle **rang de la famille** $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$. Autrement dit :

$$\mathrm{rg}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) \ = \ \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}\right)\right)$$

**Exercice**

Déterminer le rang des familles suivantes.

*1)* $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\quad \mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \quad \mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$

*2)* $\mathcal{G}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{G}_2 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$, $\mathcal{G}_3 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$

*3)* $\mathcal{H}_1 = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \quad \mathcal{H}_2 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\0\\2\end{pmatrix}\right)$

*Démonstration.*

*1)* • Notons $F_1 = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}_1\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

La famille $\mathcal{F}_1$ est :

× génératrice de $F_1$ (par définition),

× libre.

C'est donc une base de $F_1$.

*(on pouvait reconnaître de suite la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ !)*

On en déduit que : $\mathrm{rg}(\mathcal{F}_1) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\right) = 3$.

• Notons $F_2 = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}_2\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

La famille $\mathcal{F}_2$ est :

× génératrice de $F_2$ (par définition),

× libre car constituée de deux vecteurs non colinéaire.

C'est donc une base de $F_2$.

On en déduit que : $\mathrm{rg}(\mathcal{F}_2) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\right) = 2$.

• Notons $F_3 = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}_3\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$.

La famille $\mathcal{F}_3$ est :

× génératrice de $F_3$ (par définition),

× libre car constituée d'un vecteur non nul.

C'est donc une base de $F_3$.

On en déduit que : $\mathrm{rg}(\mathcal{F}_3) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\right) = 1$.

*2)* • Notons $G_1 = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{G}_1\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$.

La famille $\mathcal{G}_1$ est :

× génératrice de $G_1$ (par définition),

× libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

C'est donc une base de $G_1$.

On en déduit que : $\mathrm{rg}(\mathcal{G}_1) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right) = 2$.

- Notons $G_2 = \text{Vect}\,(\mathcal{G}_2) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$.
  On remarque que :
$$\begin{array}{rcl} \text{rg}(\mathcal{G}_2) & = & \dim\left(\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)\right) \\ & = & \dim\left(\text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)\right) \ = \ 2 \end{array}$$
- Notons $G_3 = \text{Vect}\,(\mathcal{G}_3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$.
  La famille $\mathcal{G}_3$ contient la famille $\mathcal{G}_1$ qui est une famille génératrice de $G_1$. Ainsi, $\mathcal{G}_1$ est génératrice de $G_1$ et :
$$\text{rg}(\mathcal{G}_3) = \dim(\text{Vect}\,(\mathcal{G}_3)) = \dim(\text{Vect}\,(\mathcal{G}_1)) = 2$$

□

**Théorème 13.**

*Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et soit $p \in \mathbb{N}^*$.*
*Soit $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) \in E^p$.*

$$\boxed{\text{La famille } (\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) \text{ est libre} \quad \Leftrightarrow \quad \text{rg}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) = p}$$

*Démonstration.*
La famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est génératrice de $\text{Vect}\,(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$.

($\Rightarrow$) Si elle est de plus libre, alors c'est une base de $\text{Vect}\,(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$.
On en déduit que : $\dim(\text{Vect}\,(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})) = p$.

($\Leftarrow$) Si de plus $\dim(\text{Vect}\,(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})) = p$, alors la famille $\mathcal{F}$ est une base de $F = \text{Vect}\,(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ puisque :
× $\mathcal{F}$ est génératrice de $F$,
× $\text{Card}(\mathcal{F}) = p = \dim(F)$.
En particulier, la famille $\mathcal{F}$ est libre.

□

**Remarque**
Le rang d'une famille $\mathcal{F}$ est donc une mesure du « degré d'indépendance linéaire » de la famille $\mathcal{F}$. Seules les familles de rang plein sont libres.

**Théorème 14.**

*Soit $E$ un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$.*
*Soit $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) \in E^p$.*

*1)* $\boxed{\text{rg}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) \leqslant p}$

*2)* $\boxed{\text{rg}(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p}) \leqslant n}$

*Démonstration.*

*1)* Notons $F = \text{Vect}\,(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$.
Ainsi, la famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est une famille génératrice de $F$.
On en déduit que :
$$\dim(F) \leqslant \text{Card}(\mathcal{F})$$
*(le cardinal d'une base i.e. la dimension de l'espace est plus petite que le cardinal d'une famille génératrice)*

*2)* $\text{Vect}\,(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est un sev de $E$. Ainsi :
$$\dim(\text{Vect}\,(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})) \ \leqslant \ \dim(E) = n$$

□

#### V.1.b) Détermination pratique du rang

On a vu précédemment qu'on ne modifiait pas l'espace vectoriel engendré par une partie en :
- × ajoutant à cette partie le vecteur $\overrightarrow{0}$,
- × modifiant l'ordre des éléments de cette partie,
- × multipliant l'un des éléments de cette partie par un réel $\lambda \neq 0$,
- × ajoutant à cette partie une CL des éléments de cette partie,
- × ajoutant à l'un des éléments de cette partie un CL des autres éléments de cette partie.

On en déduit que ces opérations laissent le rang inchangé.

**Exemple**

$$\begin{aligned}
& \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) \\
= \ & \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right) \\
= \ & \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right) \\
= \ & \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right) \\
= \ & \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right) \\
= \ & \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \ = \ 3
\end{aligned}$$

### V.2. Notion de rang d'une matrice

#### V.2.a) Définition et propriétés

**Définition (Rang d'une matrice)**

Soit $A = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_p \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On appelle **rang de la matrice** $A$, noté $\operatorname{rg}(A)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes $C_1, C_2, \ldots, C_p$.

$$\operatorname{rg}(A) = \dim(\operatorname{Vect}(C_1, C_2, \ldots, C_p)).$$

**Remarque**
Le rang d'une matrice est par définition le rang d'une famille de vecteurs. Ainsi, les propriétés de cet opérateur de rang matriciel se déduisent des propriétés vues précédemment.

**Théorème 15.**

*Soit* $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

*1)* $\boxed{\operatorname{rg}(A) \leqslant p}$

*2)* $\boxed{\operatorname{rg}(A) \leqslant n}$

### V.2.b) Détermination pratique du rang

**Théorème 16.**

*Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.*

*Notons $C_1, \dots, C_p$ les vecteurs colonnes de $A$.*

*Notons $L_1, \dots, L_n$ les vecteurs lignes de $A$.*

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^t A)}$$

*Ce qui permet de conclure que :*

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_p) = \mathrm{rg}(L_1, \dots, L_n)$$

On a vu précédemment que certains opérations laissent le rang d'une famille de vecteurs inchangé.
On peut traduire ces opérations pour le calcul du rang d'une matrice.
On ne modifie par le rang d'une matrice en :

× ajoutant une colonne (resp. ligne) de 0,

× modifiant l'ordre des colonnes (resp. lignes) de cette matrice,

× multipliant l'une des colonnes (resp. lignes) de cette matrice par un réel $\lambda \neq 0$,

× ajoutant à cette matrice une colonne (resp. ligne) qui est une CL des autres colonnes (resp. lignes) de cette matrice,

× ajoutant à l'une des colonnes (resp. lignes) de cette matrice une CL des autres colonnes (resp. lignes) de cette matrice.

**Exercice**
Déterminer le rang des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Exemple**

$$\begin{aligned}
& \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
= \ & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
= \ & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
= \ & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
= \ & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

**Calcul du rang d'une matrice en pratique**

- On voit apparaître dans cet exemple une méthode pour déterminer le rang d'une matrice $A$ : par une suite d'opérations élémentaires, on agit sur la matrice $A$ (sans en modifier le rang !) de sorte à obtenir une matrice dont le rang est plus simple à calculer.
- On a agi ici sur les colonnes pour copier la démonstration précédente. D'après le Théorème 16, on aurait aussi pu agir sur les lignes. D'ailleurs, si l'on agit uniquement sur les lignes, on ne fait rien d'autre qu'appliquer la méthode du pivot de Gauss !
- La matrice obtenue a une forme tout à fait particulière. L'un de ses blocs est la matrice identité $I_r$. Ses autres blocs sont des matrices nulles. Ce type de matrice est généralement noté $J_r$. Ces matrices sont particulièrement intéressantes pour la détermination du rang puisque $\mathrm{rg}(J_r) = r$.

### V.2.c) Intérêt du calcul du rang

**Théorème 17.**

*Soit* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

***1)*** $\boxed{A \textit{ est inversible } \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = n}$

***2)*** $\boxed{A \textit{ n'est pas inversible } \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) < n}$

**Remarque**

Cette propriété (que l'on démontrera dans un autre cours) est très pratique pour démontrer qu'une matrice n'est pas inversible. En effet, il est assez simple de repérer qu'une matrice n'est pas de rang plein. C'est par exemple le cas d'une matrice :

- × qui possède une colonne (resp. ligne) de 0,
- × qui possède deux colonnes (resp. lignes) égales,
- × qui possède deux colonnes (resp. lignes) proportionnelles,
- × qui possède une colonne (resp. ligne) qui est une CL des autres colonnes (resp. lignes).

Autrement dit, dès qu'on trouve une relation de dépendance linéaire entre les colonnes (resp. lignes) d'une matrice, celle-ci n'est pas inversible.