Feuille d'exercices n°6 : Variables aléatoires discrètes

Exercice 29. (★★)
Une pièce de monnaie est déséquilibrée de telle sorte que la probabilité d'apparition de Pile est égale à $\frac{1}{3}$. On effectue avec cette pièce une suite de lancers indépendants et on considère, pour tout $n \geqslant 2$, l'événement :

A_n : « la séquence Pile-Face apparaît pour la première fois au $n-1^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ lancer »

Pour tout $n \geqslant 2$, on note a_n la probabilité de l'événement A_n.

1. Calculer a_2, a_3 et a_4.

2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{2^k}{3^n}$. Calculer a_n, pour tout $n \geqslant 2$.

3. Calculer la probabilité que la séquence Pile-Face n'apparaisse jamais.

4. On considère alors la variable aléatoire X égale au nombre de lancers nécessaires pour qu'apparaisse pour la première fois la séquence Pile-Face. Déterminer la loi de X et son espérance.

5. ***a)*** Écrire un programme en **Scilab** qui simule la v.a.r. X.

b) Comment obtenir, informatiquement, une valeur approchée de $\mathbb{E}(X)$?

6. ***a)*** Soit, pour tout $n \geqslant 2$, B_n l'événement :

B_n : « la séquence Pile-Face apparaît pour la première fois au $n-1^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ lancer, et il n'y a pas eu avant de séquence Face-Pile »

Pour tout $n \geqslant 2$, on note b_n la probabilité de l'événement B_n.
Calculer b_n, pour tout $n \geqslant 2$.

b) En déduire la probabilité pour que la première séquence Pile-Face apparaisse avant la première séquence Face-Pile.

Démonstration.
Dans la suite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements suivants.

× P_k : « on obtient Pile au $k^{\text{ème}}$ lancer »,
× F_k : « on obtient Face au $k^{\text{ème}}$ lancer ».

1. • $A_2 = P_1 \cap F_2$. Par indépendance des lancers, on en déduit :

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(P_1 \cap F_2) = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(F_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}$$

• $A_3 = (F_1 \cap P_2 \cap F_3) \ \cup \ (P_1 \cap P_2 \cap F_3)$.
Or $F_1 \cap P_2 \cap F_3$ et $P_1 \cap P_2 \cap F_3$ sont incompatibles. En effet :

$$\begin{aligned} & (F_1 \cap P_2 \cap F_3) \ \cap \ (P_1 \cap P_2 \cap F_3) \\ = \ & (P_1 \cap F_1) \cap (P_2 \cap F_3) \\ = \ & \varnothing \cap (P_2 \cap F_3) \\ = \ & \varnothing \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A_3) \\ = \ & \mathbb{P}\left((F_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3)\right) \\ = \ & \mathbb{P}(F_1 \cap P_2 \cap F_3) + \mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap F_3) && \textit{(par additivité)} \\ = \ & \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(F_3) + \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(F_3) && \textit{(par indépendance des lancers)} \\ = \ & \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ = \ & \frac{2^2}{3^3} + \frac{2}{3^3} = \frac{6}{27} \end{aligned}$$

• L'événement A_4 est réalisé si, et seulement si, l'événement $P_3 \cap F_4$ est réalisé et $P_1 \cap F_2$ n'est pas réalisé.
En considérant le résultat du premier lancer, on obtient :

$$A_4 = (F_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_4)\\
=\ & \mathbb{P}\left((F_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4)\right)\\
=\ & \mathbb{P}\left(F_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4\right) + \mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4\right) + \mathbb{P}\left(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4\right)\\
=\ & \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(P_3) \times \mathbb{P}(F_4) \ + \ \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2) \times \mathbb{P}(P_3) \times \mathbb{P}(P_4)\\
& + \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(P_3) \times \mathbb{P}(F_4)\\
=\ & \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\\
=\ & \frac{2^2}{3^4} + \frac{2^3}{3^4} + \frac{2}{3^4} \ = \ \frac{14}{81}
\end{aligned}$$

Comme précédemment, la deuxième égalité est justifiée par l'incompatibilité des événements considérés *(réunion disjointe)* et la suivante par l'indépendance des lancers.

2. Soit $n \geqslant 2$.

- D'après la question précédente, la formule de l'énoncée est vérifiée aux rangs 2, 3 et 4.
- Dire que A_n est réalisé signifie que la séquence Pile-Face est apparue pour la première fois au $(n-1)^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ lancers.
  Notons k le rang d'apparition du dernier Face lors des $(n-2)$ premiers lancers (on note $k = 0$ si Face n'est pas apparu lors de ces lancers).

  0) Si $k = 0$ alors :
  A_n est réalisé $\Leftrightarrow$ $P_1 \cap \ldots \cap P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ est réalisé

  1) Si $k = 1$ alors :
  A_n est réalisé $\Leftrightarrow$ $F_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ est réalisé

  2) Si $k = 2$ alors :
  A_n est réalisé $\Leftrightarrow$ $F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \ldots \cap P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ est réalisé

  ...

  n-2) Si $k = n-2$ alors :
  A_n est réalisé $\Leftrightarrow$ $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_{n-2} \cap P_{n-1} \cap F_n$ est réalisé

- On en déduit que :

$$\begin{aligned}
A_n \ = \ & (P_1 \cap \ldots \cap P_{n-1} \cap F_n)\\
\cup & \left(\bigcup_{k=1}^{n-2} (F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k \cap P_{k+1} \cap \ldots \cap P_{n-1} \cap F_n) \right)
\end{aligned}$$

- Par incompatibilité des événements de la réunion et par indépendance des lancers, on en déduit :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_n)\\
=\ & \mathbb{P}\left(P_1 \cap P_2 \ldots P_{n-1} \cap F_n\right)\\
& + \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k \cap P_{k+1} \cap \ldots \cap P_{n-1} \cap F_n\right)\\
=\ & \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(P_{n-1}) \times \mathbb{P}(F_n)\\
& + \sum_{k=1}^{n-2} \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}(F_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(F_k) \times \mathbb{P}(P_{k+1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(P_{n-1}) \times \mathbb{P}(F_n)\\
=\ & \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3} + \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1-(k+1)+1} \times \frac{2}{3}\\
=\ & \frac{2}{3^n} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{2^{k+1}}{3^n} \ = \ \frac{2^1}{3^n} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{2^k}{3^n} \ = \ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k}{3^n}
\end{aligned}$$

- Calculons a_n. On reconnaît la somme des $n-1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $2 \neq 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
a_n \ &= \ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2^k}{3^n}\\
&= \ \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=1}^{n-1} 2^k\\
&= \ \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{2^1 - 2^n}{1-2}\\
&= \ \frac{2^n - 2}{3^n} \ = \ \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

3. Notons J l'événement « la séquence Pile-Face n'apparaît jamais ».
Son événement contraire $\overline{J}$ « la séquence Pile-Face apparaît » s'écrit :

$$\overline{J} \ = \ \bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n$$

Les événements de la suite (A_n) sont deux à deux incompatibles.
En effet, si $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ (la **première** séquence Pile-Face ne peut apparaître à la fois au $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ lancer).
On en déduit par additivité que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\overline{J}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n\right) \ = \ \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \ = \ \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\,\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad (*) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\,\left(\frac{1}{3}\right)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 2\,\frac{1}{3^2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \ = \ 1
\end{aligned}$$

$(*)$: les séries $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$ de raisons respectives $\frac{2}{3} \in \,]-1,1[$ et $\frac{1}{3} \in \,]-1,1[$ étant convergentes, on peut séparer les deux sommes.

On en déduit que :

$$\mathbb{P}(J) \ = \ 1 - \mathbb{P}\left(\overline{J}\right) \ = \ 1-1 \ = \ 0$$

L'événement J est négligeable.

4. • D'après l'énoncé :
× $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$
× $\forall n \geqslant 2,\ \mathbb{P}(X=n) = \mathbb{P}(A_n) = \dfrac{2^n-2}{3^n}$.

• Par définition, X admet une espérance si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} n\ \mathbb{P}(X=n)$ est absolument convergente. Comme X est à valeurs positives, cela revient à dire que $\sum\limits_{n\geqslant 2} n\ \mathbb{P}(X=n)$ est convergente.
($\forall n \geqslant 2,\ |n\ \mathbb{P}(X=n)| \ = \ |n|\ |\mathbb{P}(X=n)| \ = \ n\ \mathbb{P}(X=n)$)

• Soit $n \geqslant 2$.

$$n\ \mathbb{P}(X=n) \ = \ n\ \frac{2^n-2}{3^n} \ = \ \frac{2}{3}\ n\ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\ n\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

On reconnaît les termes généraux de deux séries géométriques dérivée prémière de raison respective $\frac{2}{3} \in \,]-1,1[$ et $\frac{1}{3} \in \,]-1,1[$.
On en déduit que ces deux séries sont convergentes. Par linéarité des séries convergentes, on en conclut que X admet une espérance, et que :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(X) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n\ \mathbb{P}(X=n) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\ n\ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{2}{3}\ n\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{2}{3} \sum_{n=2}^{+\infty} n\ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{2}{3} \sum_{n=2}^{+\infty} n\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{2}{3}\ \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^0\right) - \frac{2}{3}\ \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^0\right) \\
&= \frac{2}{3}\ \left(\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} - 1\right) - \frac{2}{3}\ \left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} - 1\right) \\
&= \frac{2}{3}\ (9-1) - \frac{2}{3}\ \left(\frac{9}{4} - 1\right) \ = \ \frac{2}{3}\ \left(9 - \frac{9}{4}\right) \ = \ \frac{2}{3}\ \frac{27}{4} \ = \ \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

5. a) • Notons U la v.a.r. valant 1 si le lancer de pièce fournit Pile et 0 si on obtient Face. Comme la pièce amène Pile avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$, alors : $U \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{3}\right)$. En **Scilab**, on simule alors U par l'appel :

```
grand(1,1,"bin",1,1/3)
```

- L'expérience contient deux phases :
  - × la série (éventuellement vide) initiale des lancers où on n'obtient que des Faces,
  - × suivi d'une série (éventuellement vide) composée de Piles.

  Cete deuxième phase se termine dès que l'on obtient un Face.
- On en déduit la fonction **Scilab** suivante.

```
function X = simul()
    X = 1
    lancer = grand(1,1,"bin",1,1/3)
    // Première série de lancers
    while lancer == 0
        X = X + 1
        lancer = grand(1,1,"bin",1,1/3)
    end
    // Deuxième série de lancers
    while lancer == 1
        X = X + 1
        lancer = grand(1,1,"bin",1,1/3)
    end
endfunction
```

Remarque

- On doit s'interroger sur la terminaison de chaque boucle `while`. A priori, il n'est pas clair que la première série de lancers se termine : on peut théoriquement obtenir une suite infinie de Pile. Cependant, on sait que cet événement est négligeable (c'est vrai pour toute pièce qui amène Pile avec probabilité $p \in]0,1[$).
  C'est aussi le cas pour la deuxième série de lancers.
- Autrement dit, les deux boucles terminent presque sûrement.

b) • Afin d'obtenir une approximation de $\mathbb{E}(X)$, on procède comme suit :

  - × on observe N (avec N grand) simulations de X,
  - × on effectue la moyenne des résultats obtenus.

  Cette idée est naturelle : l'espérance, qui est une mesure de la valeur moyenne de X, est approchée par la moyenne des observations.

- Cette méthode consistant à approcher la valeur de la moyenne théorique par une moyenne empirique est appelée méthode de Monte-Carlo.

```
function moy = approxEsperance(N)
    S = 0
    for i = 1:N
        S = S + 1
    end
    moy = S / N
endfunction
```

6. a) Soit $n \geqslant 2$.

- Si B_n est réalisé, alors la séquence Pile-Face est apparue pour la première fois au $(n-1)^{\text{ème}}$ et $n^{\text{ème}}$ lancers, et donc A_n est réalisé (autrement dit, $B_n \subset A_n$).
- Démontrons que si B_n est réalisé, alors les $(n-2)$ premiers lancers sont forcément des Pile.
  Supposons par l'absurde que Face apparaît lors des $n-2$ premiers lancers. On note alors k le rang de la dernière apparition de Face lors de ces lancers.
  L'événement $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k \cap P_{k+1} \cap P_{k+2} \cap \ldots \cap P_{n-1} \cap F_n$ est alors réalisé puisque cela assure que la première séquence Pile-Face apparaît au rang n.
  Mais alors B_n n'est pas réalisé puisque la séquence Face-Pile est apparue avant la séquence Pile-Face.
  Contradiction !

- On en déduit que : $B_n = P_1 \cap \ldots \cap P_{n-1} \cap F_n$.
Par indépendance des lancers, on en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}\left(P_1 \cap \ldots \cap P_{n-1} \cap F_n\right) \\ &= \mathbb{P}(P_1) \times \ldots \times \mathbb{P}(P_{n-1}) \times \mathbb{P}(F_n) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3^n} \end{aligned}$$

b) • Notons B l'événement « la première séquence Pile-Face apparaît avant la première séquence Face-Pile ». Si cette propriété est vérifiée, cela signifie que B_n est réalisé pour un certain $n \geqslant 2$.
Autrement dit : $B = \bigcup\limits_{n=2}^{+\infty} B_n$.

- Les événements de la réunion étant deux à deux incompatibles, on en déduit la probabilité recherchée :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(B) \\ = \ & \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=2}^{+\infty} B_n\right) \\ = \ & \sum_{n=2}^{+\infty} \mathbb{P}\left(B_n\right) \\ = \ & \sum_{n=2}^{+\infty} b_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{3^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ = \ & 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n && \textit{(par linéarité des sommes de séries convergentes)} \\ = \ & 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^1\right) \\ = \ & 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3}\right) && \textit{(somme d'une série géométrique convergente)} \\ = \ & 3 - \frac{2}{3} - 2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Remarque
On remarque que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(P_1)$. En effet, B est réalisé si, et seulement si, on obtient Pile au premier lancer : on obtiendra alors forcément Face par la suite car l'événement « on n'obtient que des Piles au cours d'une infinité de lancers » est négligeable. Et ce Face sera lui-même suivi d'un Pile pour une raison similaire.

□

Exercice 30. (★★) *(d'après* `HEC 1982 Maths III`*)*
On considère deux pièces de monnaie notées A_1 et A_2.

- Lorsqu'on lance la pièce A_1, la probabilité d'obtenir « face » est p_1 (avec $0 < p_1 < 1$), celle d'obtenir « pile » est $q_1 = 1 - p_1$.
- De même, lorsqu'on lance la pièce A_2, la probabilité d'obtenir « face » est p_2 (avec $0 < p_2 < 1$), celle d'obtenir « pile » est $q_2 = 1 - p_2$.

On effectue une suite de parties de la façon suivante :

× à la première partie, on choisit une pièce au hasard (avec la probabilité $\frac{1}{2}$) et on joue avec cette pièce ;
  si le résultat est « face », on joue la deuxième partie avec A_1,
  si le résultat est « pile », on joue la deuxième partie avec A_2 ;

× ensuite, pour tout entier $n \geqslant 1$:
  si on a obtenu « face » à la $n^{\text{ème}}$ partie, on joue la $(n+1)^{\text{ème}}$ avec A_1,
  si on a obtenu « pile » à la $n^{\text{ème}}$ partie, on joue la $(n+1)^{\text{ème}}$ avec A_2.

1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n la probabilité d'avoir « face » à la $n^{\text{ème}}$ partie.

a) Exprimer u_1, puis u_2 en fonction de p_1 et p_2.

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = (p_1 - p_2)\, u_n + p_2$.

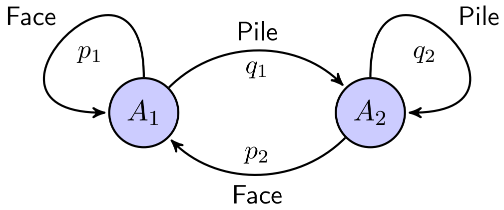
c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ tend, quand n tend vers l'infini, vers une limite u que l'on calculera.
Dans quels cas a-t-on $u = \frac{1}{2}$?

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n la variable aléatoire, associée à la $n^{\text{ème}}$ partie, qui prend la valeur 1 si le résultat de la $n^{\text{ème}}$ partie est « face », la valeur 0 si le résultat de la $n^{\text{ème}}$ partie est « pile ».

a) Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_1 et X_2 et calculer leurs espérances.

b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Démonstration.
On peut résumer la situation par le graphique suivant.



Dans la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements suivants :

× F_n : « obtenir face au $n^{\text{ème}}$ lancer »,

× P_n : « obtenir pile au $n^{\text{ème}}$ lancer ».

× U : « on joue le premier lancer avec A_1 »,

× V : « on joue le premier lancer avec A_2 ».

On note que : $P_n = \overline{F_n}$ et $V = \overline{U}$.
D'après les données de l'exercice, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}_{F_n}(F_{n+1}) = p_1, \quad \mathbb{P}_{F_n}(P_{n+1}) = q_1, \quad \mathbb{P}_{P_n}(F_{n+1}) = p_2, \quad \mathbb{P}_{P_n}(P_{n+1}) = q_2$$

Et enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathbb{P}(F_n)$.

1. a) • Lors de la première partie, on choisit une pièce au hasard. Ainsi :

$$\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(V) = \frac{1}{2} \quad (\neq 0)$$

• La famille (U, V) forme un système complet d'événements. Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_1) &= \mathbb{P}(U) \times \mathbb{P}_U(F_1) + \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_V(F_1) \\ &= \frac{1}{2} \times p_1 + \frac{1}{2} \times p_2 \ = \ \frac{p_1 + p_2}{2} \end{aligned}$$

• Comme (F_1, P_1) forme un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_2) &= \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}_{F_1}(F_2) + \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}_{P_1}(F_2) \\ &= \mathbb{P}(F_1) \times p_1 + \mathbb{P}(P_1) \times p_2 \\ &= p_1 \times u_1 + (1 - u_1) \times p_2 \\ &= (p_1 - p_2)\, u_1 + p_2 \end{aligned}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme (F_n, P_n) forme un système complet d'événements, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F_{n+1}) &= \mathbb{P}(F_n) \times \mathbb{P}_{F_n}(F_{n+1}) + \mathbb{P}_{P_n} \times \mathbb{P}_{P_n}(F_{n+1}) \\ &= \mathbb{P}(F_n) \times p_1 + \mathbb{P}(P_n) \times p_2 \\ &= p_1 \times u_n + (1 - u_n) \times p_2 \\ &= (p_1 - p_2)\, u_n + p_2 \end{aligned}$$

(même raisonnement que dans la question précédente)
On obtient bien :

$$u_{n+1} = (p_1 - p_2)\, u_n + p_2$$

c) D'après la formule trouvée dans la question précédente, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est arithmético-géométrique.

• L'équation de point fixe associée à la suite (u_n) est :

$$x = (p_1 - p_2)\, x + p_2$$

Elle admet pour unique solution : $\lambda = \dfrac{p_2}{1 - p_1 + p_2}$.

Cette écriture est valide car $p_1 + p_2 \neq 1$.
En effet, comme $0 < p_2 < 1$, $-1 < -p_2 < 0$ et, comme $0 < p_1 < 1$:

$$-1 < p_1 - p_2 < 1$$

- On écrit :

$$\begin{array}{rcl@{\quad}l} u_{n+1} &=& (p_1 - p_2) \times u_n + p_2 & (L_1) \\ \lambda &=& (p_1 - p_2) \times \lambda + p_2 & (L_2) \end{array}$$

et donc $$u_{n+1} - \lambda = (p_1 - p_2) \times (u_n - \lambda) \qquad (L_1)-(L_2)$$

Notons alors (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \lambda$.

- La suite (v_n) est géométrique de raison $p_1 - p_2$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n = (p_1 - p_2)^{n-1} \times v_1 = (p_1 - p_2)^{n-1} \times (p_1 - \lambda)$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = v_n + \lambda = (p_1 - p_2)^{n-1} \times (p_1 - \lambda) + \lambda$$

- Or : $-1 < p_1 - p_2 < 1$. Ainsi $(p_1 - p_2)^{n-1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est convergente de limite :

$$u = \lambda = \frac{p_2}{1 - p_1 + p_2}$$

d) Enfin, on remarque que :

$$\begin{array}{rcl} u = \dfrac{1}{2} & \Leftrightarrow & \dfrac{p_2}{1 - p_1 + p_2} = \dfrac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow & 2\,p_2 = 1 - p_1 + p_2 \\ & \Leftrightarrow & p_2 = 1 - p_1 \\ & \Leftrightarrow & p_2 = q_1 \end{array}$$

Ainsi, $u = \frac{1}{2}$ si, et seulement si, $p_2 = q_1$, c'est-à-dire losrque la probabilité d'obtenir Pile avec la pièce A_1 est égale à la probabilité d'obtenir Face avec la pièce A_2.

2. a) Considérons tout d'abord X_1.

- $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$.
- $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(F_1) = \dfrac{p_1 + p_2}{2}$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(X_1 = 0) &=& \mathbb{P}(P_1) = 1 - \mathbb{P}(F_1) = 1 - \dfrac{p_1 + p_2}{2} \\ &=& \dfrac{(p_1 + q_1) - (p_1 + p_2)}{2} = \dfrac{q_1 - p_2}{2} \end{array}$$

Ainsi, $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{p_1 + p_2}{2}\right)$.

On en déduit que X_1 admet pour espérance : $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{p_1 + p_2}{2}$.

De même :

- $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.
- $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(F_2) = (p_1 - p_2)\,u_1 + p_2$

$$= (p_1 - p_2)\,\frac{p_1 + p_2}{2} + p_2 = \frac{{p_1}^2 - {p_2}^2 + 2\,p_2}{2}$$

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(P_2) = 1 - \mathbb{P}(F_2) = 1 - \frac{{p_1}^2 + 2\,p_2 - {p_2}^2}{2}$$

Ainsi, $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{{p_1}^2 + 2\,p_2 - {p_2}^2}{2}\right)$.

On en déduit que X_2 admet pour espérance : $\mathbb{E}(X_2) = \dfrac{{p_1}^2 + 2\,p_2 - {p_2}^2}{2}$.

b) Les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes si, et seulement si :

$$\forall i \in \{0, 1\}, \forall j \in \{0, 1\},\ \mathbb{P}\left((X_1 = i) \cap (X_2 = j)\right) = \mathbb{P}(X_1 = i) \times \mathbb{P}(X_2 = j)$$

Autrement dit, il s'agit de démontrer que les événements $[X_1 = i]$ et $[X_2 = j]$ sont indépendants.

- Étudions l'indépendance des événements $[X_1 = 1]$ et $[X_2 = 1]$.

$$\begin{array}{rl} & \mathbb{P}\left(\,(X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)\,\right) \\ = & \mathbb{P}\left(F_1 \cap F_2\right) \\ = & \mathbb{P}(F_1) \times \mathbb{P}_{F_1}(F_2) \qquad \textit{(car } \mathbb{P}(F_1) \neq 0\textit{)} \\ = & \dfrac{p_1 + p_2}{2} \times p_1 \end{array}$$

Par ailleurs :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 1) \ = \ \frac{p_1 + p_2}{2} \times \frac{{p_1}^2 + 2\,p_2 - {p_2}^2}{2}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbb{P}\left((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1) \right) & = & \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 1) \\ \Leftrightarrow & \cancel{\dfrac{p_1 + p_2}{2}} \times p_1 & = & \cancel{\dfrac{p_1 + p_2}{2}} \times \dfrac{{p_1}^2 + 2\,p_2 - {p_2}^2}{2} \\ \Leftrightarrow & p_1 & = & \dfrac{{p_1}^2 + 2\,p_2 - {p_2}^2}{2} \\ \Leftrightarrow & 2\,p_1 - {p_1}^2 & = & 2\,p_2 - {p_2}^2 \end{array}$$

Considérons la fonction f définie sur $]0, 1[$ par $f : x \mapsto 2\,x - x^2$.
f est dérivable sur $]0, 1[$ en tant que fonction polynomiale.

$$\forall x \in \,]0, 1[, \ \ f'(x) = 2 - 2\,x = 2\,(x - 1)$$

Ainsi, pour tout $x \in \,]0, 1[$, $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $]0, 1[$. Elle est donc injective sur cet intervalle. On en déduit que :

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) & = & \mathbb{P}(X_1 = 1) \times \mathbb{P}(X_2 = 1) \\ \Leftrightarrow & 2\,p_1 - {p_1}^2 & = & 2\,p_2 - {p_2}^2 \\ \Leftrightarrow & f(p_1) & = & f(p_2) \\ \Leftrightarrow & p_1 & = & p_2 \end{array}$$

- Si $[X_1 = 1]$ et $[X_2 = 1]$ son indépendants :
  - × les événements $[X_1 = 0]$ et $[X_2 = 1]$ sont eux aussi indépendants. En effet, par le lemme des coalitions, $\overline{[X_1 = 1]} = [X_1 = 0]$ et $[X_2 = 1]$ sont indépendants.
  - × de même, $[X_1 = 1]$ et $\overline{[X_2 = 1]} = [X_2 = 0]$ sont indépendants.
  - × et, $\overline{[X_1 = 1]} = [X_1 = 0]$ et $\overline{[X_2 = 1]} = [X_2 = 0]$ sont indépendants.

On en conclut que les variables X_1 et X_2 sont indépendantes si, et seulement si, $p_1 = p_2$. □

Exercice 27. (★★★) ***(Fonction génératrice d'une variable aléatoire)***
Soient a, b, et N trois entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $N = a + b$.
On considère une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires. On effectue des tirages successifs dans cette urne, au hasard et avec remise en procédant de la façon suivante :

× si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'une avant de procéder au tirage suivant ;

× si la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais remplacée par une boule blanche dans cette urne, et l'on procède au tirage suivant.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une première boule blanche.

1. Déterminer la loi de Y. Montrer alors que :

$$\forall k \in [\![1, b]\!], \ \mathbb{P}(Y = k) = \frac{b!}{N^b} \left(\frac{N^{b-k+1}}{(b-k+1)!} - \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} \right)$$

2. Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ G(x) = \sum_{k \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(Y = k)\, x^k$$

On dit que G est la fonction génératrice de la variable aléatoire Y.

a) Justifier l'égalité : $G(x) = E\left(x^Y\right)$.

b) Quelle est la valeur de $G(1)$?

c) Exprimer $E(Y)$ en fonction de $G'(1)$.

d) Exprimer la variance de Y en fonction de $G'(1)$, et de $G''(1)$.

3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $G(x) = 1 + \dfrac{b!}{N^b}(x-1) \displaystyle\sum_{k=0}^{b} \frac{N^{b-k}}{(b-k)!}\, x^k$.

4. En déduire l'espérance de Y.
On laissera le résultat sous forme d'une somme.

5. De même calculer la variance de Y à l'aide de la fonction génératrice G.
On laissera le résultat sous forme d'une somme.

Démonstration.
Dans la suite, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, on considère les événements suivants
× N_i : « on tire une boule noire au $i^{\text{ème}}$ tirage »,
× B_i : « on tire une boule blanche au $i^{\text{ème}}$ tirage ».

1. • D'après l'énoncé, l'urne contient a boules blanches et b boules noires.

× Au pire, la première boule blanche est tirée lors du $(b+1)^{\text{ème}}$ lancer *i.e.* après le tirage successif de toutes les boules noires.

× On peut tirer une boule blanche à la place de n'importe laquelle de ces boules noires.

On en conclut que $Y(\Omega) = [\![1, b+1]\!]$.

• Soit $k \in [\![1, b+1]\!]$.

× Si $k = 1$, $[Y = 1] \ = \ B_1$.
Et donc $\mathbb{P}([Y = 1]) = \mathbb{P}(B_1) = \dfrac{a}{N}$ par équiprobabilité des tirages.

× Si $k \geqslant 2$, $[Y = k] \ = \ N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{k-1} \cap B_k$.

Comme $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{k-1}) \neq 0$ (la probabilité de tirer successivement $k-1$ boules noires est non nulle), d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(Y = k) \\
= \ & \mathbb{P}\left(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{k-1} \cap B_k\right) \\
= \ & \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}_{N_1}(N_2) \times \ldots \times \mathbb{P}_{N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{k-2}}(N_{k-1}) \times \mathbb{P}_{N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{k-1}}(B_k) \\
= \ & \frac{b}{N} \times \frac{b-1}{N} \times \ldots \times \frac{b-(k-2)}{N} \times \frac{a+(k-1)}{N} \\
= \ & \frac{b\,(b-1)\,\ldots\,(b-k+2)\,(a+k-1)}{N^k} \\
= \ & b\,(b-1)\,\ldots\,(b-k+2)\ \frac{a+k-1}{N^k} \\
= \ & \frac{b!}{(b-k+1)!}\ \frac{a+k-1}{N^k}
\end{aligned}$$

Or $a + b = N$ donc $a = N - b$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = k) \ &= \ \frac{b!\,(N-b+k-1)}{(b-k+1)!\,N^k} \ = \ \frac{b!\,(N-(b-k+1))}{(b-k+1)!\,N^k} \\
&= \ \frac{b!}{N^k}\left(\frac{N}{(b-k+1)!} - \frac{b-k+1}{(b-k+1)!}\right) \\
&= \ \frac{b!}{N^k}\left(\frac{N}{(b-k+1)!} - \frac{1}{(b-k)!}\right) \\
&= \ \frac{b!\,N^{b-k}}{N^k\,N^{b-k}}\left(\frac{N}{(b-k+1)!} - \frac{1}{(b-k)!}\right) \\
&= \ \frac{b!}{N^b}\left(\frac{N^{b-k+1}}{(b-k+1)!} - \frac{N^{b-k}}{(b-k)!}\right)
\end{aligned}$$

2. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On rappelle que $Y(\Omega) = [\![1, b+1]\!]$.
La v.a.r. $Z = x^Y$ est une variable aléatoire finie.
En effet $Z(\Omega) = \{x, x^2, \ldots, x^{b+1}\}$.
(rigoureusement, on devrait écarter le cas $x = 0$, $x = -1$ et $x = 1$ car dans ces cas les éléments précédents ne sont pas tous différents)
On en déduit que Z admet une espérance.
D'après la théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(Z) \ = \ \mathbb{E}\left(x^Y\right) \ = \ \sum_{k=1}^{b+1} x^k\ \mathbb{P}(Y = k) \ = \ G(x)$$

b) D'après la question précédente :

$$G(1) \ = \ \sum_{k=1}^{b+1} 1^k \times \mathbb{P}(Y = k) \ = \ \sum_{k=1}^{b+1} \mathbb{P}(Y = k)$$

Or $([Y = k]))_{1 \leqslant k \leqslant b+1}$ est le système complet d'événements associé à Y. On en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{b+1} \mathbb{P}(Y = k) \ = \ \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{b+1} [Y = k]\Big) \ = \ \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1$$

D'où $G(1) = 1$.

c) La fonction G est C^∞ sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la dérivation :

$$G'(x) = \sum_{k=1}^{b+1} \mathbb{P}(Y=k)\ k\ x^{k-1}$$

Or on sait que Y est finie de support $Y(\Omega) = [\![1, b+1]\!]$.
Donc Y admet une espérance donnée par :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k\in Y(\Omega)} k\ \mathbb{P}(Y=k) = \sum_{k=1}^{b+1} k \times \mathbb{P}(Y=k) = G'(1)$$

d) Pour $x \in \mathbb{R}$, $G''(x) = \sum_{k=2}^{b+1} \mathbb{P}(Y=k)\ k\,(k-1)\,x^{k-2}$.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} G''(1) &= \sum_{k=2}^{b+1} k(k-1)\ \mathbb{P}(Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^{b+1} k(k-1)\ \mathbb{P}(Y=k) && \textit{(car } k(k-1)=0 \textit{ lorsque } k=1\textit{)} \\ &= \sum_{k=1}^{b+1} k^2\ \mathbb{P}(Y=k) - \sum_{k=1}^{b+1} k\ \mathbb{P}(Y=k) \\ &= \mathbb{E}(Y^2) - G'(1) && \textit{(par théorème de transfert)} \end{aligned}$$

Comme Y est finie, Y admet une variance. D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(Y) &= \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 \\ &= (G''(1) + G'(1)) - (G'(1))^2 && \textit{(d'après l'égalité précédente)} \\ &= G''(1) - (G'(1))^2 + G'(1) \end{aligned}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $G(x) = \sum_{k=1}^{b+1} x^k \mathbb{P}(Y=k)$. En distingant les cas $k \in [\![1;b$ et $k = b+1$, et en utilisant la question 1, on obtient :

$$\begin{aligned} & G(x) \\ &= \sum_{k=1}^{b+1} x^k\ \mathbb{P}(Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^{b} x^k\ \frac{b!}{N^b}\left(\frac{N^{b-k+1}}{(b-k+1)!} - \frac{N^{b-k}}{(b-k)!}\right) + \frac{b!}{N^b}\ x^{b+1} \\ &= \frac{b!}{N^b} \sum_{k=1}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k+1}}{(b-k+1)!} - \frac{b!}{N^b} \sum_{k=1}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} + \frac{b!}{N^b}\ x^{b+1} \\ &= \frac{b!}{N^b}\left(\sum_{k=1}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k+1}}{(b-k+1)!} - \sum_{k=1}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} + x^{b+1}\right) \\ &= \frac{b!}{N^b}\left(\sum_{k=0}^{b-1} x^{k+1}\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} - \sum_{k=1}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} + x^{b+1}\right) \\ &= \frac{b!}{N^b}\left(\sum_{k=0}^{b} x^{k+1}\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} - \sum_{k=1}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!}\right) \\ &= \frac{b!}{N^b}\left(\sum_{k=0}^{b} x^{k+1}\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} - \left(\sum_{k=0}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} - \frac{N^b}{b!}\right)\right) \\ &= \frac{b!}{N^b}\left(\sum_{k=0}^{b} (x^{k+1} - x^k)\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} + \frac{N^b}{b!}\right) \\ &= \frac{b!}{N^b}\left((x-1)\sum_{k=0}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} + \frac{N^b}{b!}\right) \\ &= \frac{b!}{N^b}(x-1)\sum_{k=0}^{b} x^k\ \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} + 1 \end{aligned}$$

4. D'après la question *2.c)* : $\mathbb{E}(Y) = G'(1)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :

$$G'(x) \;=\; \frac{b!}{N^b} \sum_{k=0}^{b} x^k \, \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} + \frac{b!}{N^b}(x-1) \sum_{k=1}^{b} k\, x^{k-1} \, \frac{N^{b-k}}{(b-k)!}$$

On en déduit que :

$$\mathbb{E}(Y) \;=\; G'(1) \;=\; \frac{b!}{N^b} \sum_{k=0}^{b} 1^k \, \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} + 0 \;=\; \frac{b!}{N^b} \sum_{k=0}^{b} \frac{N^k}{k!}$$

par changement d'indice (sommation dans l'autre sens).

5. D'après la question *2.d)* : $\mathbb{V}(Y) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} G''(x) \;&=\; \frac{b!}{N^b} \sum_{k=1}^{b} \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} \, k \, x^{k-1} + \frac{b!}{N^b} \sum_{k=1}^{b} \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} \, k \, x^{k-1} \\ &\quad + \frac{b!}{N^b}\,(x-1) \sum_{k=2}^{b} \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} \, k \, (k-1) \, x^{k-2} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} G''(1) \;&=\; \frac{b!}{N^b} \sum_{k=1}^{b} \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} \, k + \frac{b!}{N^b} \sum_{k=1}^{b} \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} \, k \\ &=\; 2\,\frac{b!}{N^b} \sum_{k=1}^{b} \frac{N^{b-k}}{(b-k)!} \, k \;=\; 2\,\frac{b!}{N^b} \sum_{k=0}^{b-1} \frac{N^k}{k!} (b-k) \end{aligned}$$

par changement d'indice (sommation dans l'autre sens). Enfin

$$\begin{aligned} V(Y) \;&=\; G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 \\ &=\; 2\,\frac{b!}{N^b} \sum_{k=0}^{b-1} \frac{N^k}{k!} (b-k) + G'(1) - (G'(1))^2 \end{aligned}$$

(pas vraiment de simplification possible ...)

□

Exercice 31. (★★★)
Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une ou de deux unités vers la droite suivant la procédure suivante :

× au départ la puce est en O ;
× si, à un instant, la puce est sur la case d'abscisse k, à l'instant d'après elle sera soit sur la case d'abscisse $k+1$, avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit sur la case $k+2$, avec la probabilité $\frac{1}{2}$;
× les sauts sont indépendants.

1. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts de deux unités effectués par la puce au cours des n premiers sauts.
Déterminer la loi de S_n, son espérance et sa variance.

2. On note X_n la v.a.r. égale à l'abscisse de la puce après n sauts.
Exprimer X_n en fonction de S_n.
En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.

3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts qu'il a fallu à la puce pour atteindre ou dépasser la case d'abscisse n au cours des n premiers sauts.

a) Déterminer $Y_n(\Omega)$.

b) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$ et pour tout entier $k \geqslant 1$

$$\mathbb{P}([Y_n = k]) = \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y_{n-1} = k-1]) + \frac{1}{2}\,\mathbb{P}([Y_{n-2} = k-1])$$

c) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1$$

4. Déterminer un réel a tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_n = \mathbb{E}(Y_n) - na$$

vérifie une relation récurrente linéaire d'ordre 2.
Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n, puis $\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de n.

Démonstration.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $S_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$ puisque chaque saut de la puce peut être double.
- Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
  Un déplacement qui réalise $[S_n = k]$ est entièrement déterminé par :
  $\times$ le moment où les k doubles sauts ont lieu.
  Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités différentes.
  Comme les sauts sont indépendants et que chaque saut a une probabilité $\dfrac{1}{2}$ d'être double, la probabilité d'un tel déplacement est : $\left(\dfrac{1}{2}\right)^k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-k}$.
  Ainsi : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}([S_n = k]) = \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-k} = \dbinom{n}{k} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Autement dit, $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$.
On en déduit que S_n admet pour espérance $\mathbb{E}(S_n) = n\ \dfrac{1}{2}$ et pour variance $\mathbb{V}(S_n) = n\ \dfrac{1}{2}\ \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{n}{4}$.

Remarque
On pouvait rédiger autrement.

- On est dans une situation d'équiprobabilité (du saut simple ou double). On peut donc écrire :

$$\mathbb{P}([S_n = k]) = \frac{\text{Card}([S_n = k])}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

  car il y a 2^n déplacements contenant n sauts.
- On pouvait aussi constater que la v.a.r. S_n compte le nombre de succès (on considère qu'un saut double est un succès) lors de la répétition de l'expérience consistant à faire sauter la puce. On en conclut directement que $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.

2. • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Lors des n premiers sauts, la puce fait S_n sauts doubles et $n - S_n$ sauts simples. Ainsi :

$$X_n = 2\, S_n + (n - S_n) = n + S_n$$

- Comme $S_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$, le support de X_n est $X_n(\Omega) = [\![n, 2\,n]\!]$.
- Soit $k \in [\![n, 2\,n]\!]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = k]) &= \mathbb{P}([n + S_n = k]) = \mathbb{P}([S_n = k - n]) \\ &= \binom{n}{k-n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

- Enfin, X_n admet une espérance et une variance en tant que somme de deux v.a.r. qui admettent une variance (S_n et la v.a.r. constante n).
  Par linéarité de l'espérance, on a alors :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(n + S_n) = \mathbb{E}(n) + \mathbb{E}(S_n) = n + \frac{n}{2} = \frac{3\,n}{2}$$

  Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(n + S_n) = \mathbb{V}(S_n) = \frac{n}{4}$$

3. a) On considère les n premiers sauts.

- Si la puce ne fait que des sauts doubles, elle atteint ou dépasse l'abscisse n au bout de :
  $\times$ $\dfrac{n}{2}$ sauts doubles si n est pair,
  $\times$ $\dfrac{n+1}{2}$ sauts doubles si n est impair.
  Autrement dit, au bout de $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$ sauts doubles.
- Si la puce ne fait que des sauts simples, il lui faut n sauts pour atteindre l'abscisse n.
- Tous les cas intermédiaires sont possibles.
  Ainsi $Y_n(\Omega) = [\![\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor, n]\!]$.

b) Soient $n \geqslant 3$ et $k \geqslant 1$.
Lors de son premier saut, la puce fait soit un saut simple, soit un saut double. Ainsi, $([X_1 = 1], [X_1 = 2])$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}Y_n = k) = \mathbb{P}([X_1 = 1] \cap [Y_n = k]) + \mathbb{P}([X_1 = 2] \cap [Y_n = k])$$

- Or $[X_1 = 1] \cap [Y_n = k] = [X_1 = 1] \cap [Y_{n-1} = k-1]$.
  En effet, un déplacement qui réalise $[X_1 = 1] \cap [Y_n = k]$:
  - × comporte n sauts dont les k premiers permettent d'atteindre l'abscisse n,
  - × commence par un saut double,
  - × se poursuit par un déplacement contenant $n-1$ sauts et dont les $k-1$ premiers sauts permettent une avancées de $k-1$ cases. Autrement dit, se poursuit par un déplacement qui réalise $[Y_{n-1} = k-1]$.
- De même, $[X_1 = 2] \cap [Y_n = k] = [X_1 = 2] \cap [Y_{n-2} = k-1]$.

Comme $\mathbb{P}([X_1 = 1]) = \dfrac{1}{2} \neq 0$ et $\mathbb{P}([X_1 = 2]) = \dfrac{1}{2} \neq 0$, on obtient :

$$\mathbb{P}([Y_n = k]) = \frac{1}{2}\, \mathbb{P}([Y_{n-1} = k-1]) + \frac{1}{2}\, \mathbb{P}([Y_{n-2} = k-1])$$

c) Soit $n \geqslant 3$.
Comme Y_n est une v.a.r. finie, elle admet une espérance définie par :

$$\mathbb{E}(Y_n) \ = \sum_{k \in Y_n(\Omega)} k\ \mathbb{P}([Y_n = k])$$

Soit $k \geqslant 1$. D'après la question précédente :

$$k\, \mathbb{P}([Y_n = k]) = \frac{1}{2}\ k\, \mathbb{P}([Y_{n-1} = k-1]) + \frac{1}{2}\ k\, \mathbb{P}([Y_{n-2} = k-1])$$

En sommant ces égalités, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(Y_n) \\
=\ & \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n} k\ \mathbb{P}([Y_n = k]) \\
=\ & \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n} \left(\frac{1}{2}\ k\, \mathbb{P}([Y_{n-1} = k-1]) + \frac{1}{2}\ k\, \mathbb{P}([Y_{n-2} = k-1]) \right) \\
=\ & \frac{1}{2} \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n} k\, \mathbb{P}([Y_{n-1} = k-1]) + \frac{1}{2} \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}^{n} k\, \mathbb{P}([Y_{n-2} = k-1]) \\
=\ & \frac{1}{2} \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}^{n-1} (k+1)\, \mathbb{P}([Y_{n-1} = k]) + \frac{1}{2} \sum_{k=\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1}^{n-1} (k+1)\, \mathbb{P}([Y_{n-2} = k])
\end{aligned}$$

On remarque alors que : $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1 = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

- Considérons la première somme.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{n-1} (k+1)\, \mathbb{P}([Y_{n-1} = k]) \\
=\ & \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} (k+1)\, \mathbb{P}([Y_{n-1} = k]) && (*) \\
=\ & \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} k\, \mathbb{P}([Y_{n-1} = k]) \ + \ \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} \mathbb{P}([Y_{n-1} = k]) \\
=\ & \qquad \mathbb{E}(Y_{n-1}) \qquad + \qquad 1
\end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait que $Y_{n-1}(\Omega) = [\![\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-1]\!]$ et donc que $([Y_{n-1} = k])_{k \in [\![\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n-1]\!]}$ est le système complet d'événements associé à Y_{n-1}.

L'égalité $(*)$ est plus subtile. Il faut remarquer que :

× si n est impair : $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

× si n est pair : $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor < \frac{n-1}{2}$.

Et donc $\left[Y_{n-1} = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor\right] = \varnothing$: on ne peut atteindre l'abscisse $n-1$ en effectuant seulement $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ sauts (doubles).

- On procède de même pour la deuxième somme.

$$\begin{array}{cl} & \displaystyle\sum_{k=\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{n-1} (k+1)\, \mathbb{P}([Y_{n-2} = k]) \\ = & \displaystyle\sum_{k=\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{n-2} (k+1)\, \mathbb{P}([Y_{n-2} = k]) \qquad (*) \\ = & \displaystyle\sum_{k=\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{n-2} k\, \mathbb{P}([Y_{n-2} = k]) \quad + \quad \sum_{k=\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}^{n-2} \mathbb{P}([Y_{n-2} = k]) \\ = & \mathbb{E}(Y_{n-2}) \quad + \quad 1 \end{array}$$

La dernière égalité provient du fait que $Y_{n-2}(\Omega) = \llbracket \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor, n-2 \rrbracket$ (*cf* raisonnement précédent).

L'égalité $(*)$ provient du fait que $[Y_{n-2} = n-1] = \varnothing$: lors d'une série de $n-2$ sauts, le premier saut qui permet d'atteindre l'abscisse $n-2$ ne peut être le $n-1^{\text{ème}}$ puisqu'il n'est même pas effectué.

d) On en conclut que :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(Y_n) & = & \dfrac{1}{2}\, (\mathbb{E}(Y_{n-1}) + 1) + \dfrac{1}{2}\, (\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1) \\ & = & \dfrac{1}{2}\, \mathbb{E}(Y_{n-1}) + \dfrac{1}{2}\, \mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1 \end{array}$$

4. Soit $n \geqslant 3$. Par définition de u_n, u_{n-1}, u_{n-2} :

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & \mathbb{E}(Y_n) - na \\ & = & \dfrac{1}{2}\, \mathbb{E}(Y_{n-1}) + \dfrac{1}{2}\, \mathbb{E}(Y_{n-2}) - na + 1 \\ & = & \dfrac{1}{2}\, u_{n-1} + \dfrac{1}{2}\, u_{n-2} + \dfrac{(n-1)a}{2} + \dfrac{(n-2)a}{2} - na + 1 \\ & = & \dfrac{1}{2}\, u_{n-1} + \dfrac{1}{2}\, u_{n-2} + \dfrac{2-3a}{2} \end{array}$$

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 si est seulement si $2-3a = 0$ c'est-à-dire $a = \dfrac{2}{3}$, ce que nous supposons désormais.
- L'équation caractéristique associée à la suite (u_n) est $x^2 = \dfrac{1}{2}\, x + \dfrac{1}{2}$.
Il s'agit donc de chercher les racines du polynôme :

$$P(X) = X^2 - \frac{1}{2}\, X - \frac{1}{2}$$

P admet pour racine évidente $r_1 = 1$.
On en déduit la seconde racine $r_2 = -\dfrac{1}{2}$.

- La formule explicite de (u_n) est donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \ = \ \alpha\, {r_1}^n + \beta\, {r_2}^n$$

où les valeurs α et β sont données par le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcr} u_1 & = & \alpha\, r_1 & + & \beta\, r_2 \\ u_2 & = & \alpha\, {r_1}^2 & + & \beta\, {r_2}^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} u_1 & = & \alpha & - & \frac{1}{2}\, \beta \\ u_2 & = & \alpha & + & \frac{1}{4}\, \beta \end{array} \right.$$

- Déterminons tout d'abord u_1.
$Y_1(\Omega) = \llbracket 1, 1 \rrbracket = \{1\}$ donc Y_1 est la variable certaine égale à 1.
Ainsi, $\mathbb{E}(Y_1) = 1$ et $u_1 = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

- Déterminons maintenant u_2.

  $Y_2(\Omega) = \{1, 2\}$

  $\mathbb{P}([Y_2 = 1]) = \mathbb{P}([S_1 = 1]) = \dfrac{1}{2}$

  $\mathbb{P}([Y_2 = 2]) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{[Y_2 = 2]}\right) = 1 - \mathbb{P}([Y_2 = 1]) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

  Ainsi : $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2]\!])$.

  Donc $\mathbb{E}(Y_2) = \dfrac{3}{2}$ et $u_2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{6}$.

- On en déduit que :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \frac{1}{3} & = & \alpha & - & \frac{1}{2}\,\beta \\ \frac{1}{6} & = & \alpha & + & \frac{1}{4}\,\beta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} \frac{1}{3} & = & \alpha & - & \frac{1}{2}\,\beta \\ -\frac{1}{6} & = & & + & \frac{3}{4}\,\beta \end{array} \right.$$

  Et donc $\beta = -\dfrac{1}{6}\,\dfrac{4}{3} = -\dfrac{2}{9}$.

  Et enfin $\alpha = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{-2}{9} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{9}$.

- Ainsi pour tout entier n non nul :

$$u_n = \frac{2}{9} - \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(Y_n) = \frac{2}{9} + \frac{2n}{3} - \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$\square$