Fomule du binôme

Exercice 1. ($\bigstar$) *(d'après* `EDHEC 2008`*)*
On considère les matrices :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on pose $T = D + N$.

a. Déterminer N^2.

Démonstration.
$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{N^2 = 0.}$$

□

b. Utiliser la formule du binôme pour montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ T^n = D^n + nD^{n-1}N$$

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- D'après la question précédente, on obtient, par une récurrence immédiate que : $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0$.
- On remarque que : $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$.
  Ainsi D et N commutent.
- D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
T^n &= (D+N)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} && \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} && \textit{(car : } \forall k \geqslant 2, \ N^k = 0 \textit{)} \\
&= \binom{n}{0} N^0 \ D^n + \binom{n}{1} N^1 \ D^{n-1} \\
&= D^n + n \ D^{n-1} \ N && \textit{(car } N \textit{ et } D^{n-1} \textit{ commutent)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \, T^n = D^n + n \ D^{n-1} \ N.}$$

□

c. Donner explicitement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice T^n en fonction de n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Tout d'abord : $D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

On en déduit que :

$$D^{n-1} \ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad T^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N}^* : T^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & n \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

□

Exercice 2. ($\bigstar$) *(d'après* `EDHEC 2016`*)*
On considère les matrices :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = 2I + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et de N puis de I et de T.

Démonstration.

- Tout d'abord : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

  On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$, $N^k = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Les matrices $2I$ et N commutent (car la matrice I commute avec toutes les matrices). On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll}
T^n & = & (2\,I + N)^n & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (2\,I)^{n-k} & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k (2\,I)^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k (2\,I)^{n-k} & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k (2\,I)^{n-k} & \textit{(car : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0\textit{)} \\
& = & \displaystyle\binom{n}{0} N^0 \ (2\,I)^n + \binom{n}{1} N^1 \ (2\,I)^{n-1} & \\
& = & (2\,I)^n + n\ (2\,I)^{n-1}\ N & \textit{(car } N \textit{ et } (2\ I)^{n-1} \textit{ commutent)} \\
& = & 2^n\, I^n + n\ 2^{n-1}\, I^{n-1}\ N \ = \ 2^n I + n\ 2^{n-1}\ N &
\end{array}$$

- Enfin : $2^0\ I + 0\ 2^{-1}\ N = I$ et $T^0 = I$.
  La formule précédente reste valable pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = 2^n\ I + n\ 2^{n-1}\ N.}$$

- De plus, comme $N = T - 2I$, on obtient :

$$T^n \ = \ 2^n\ I + n\ 2^{n-1}\ (T - 2I) \ = \ 2^n\ I + n\ 2^{n-1}\ T - n\ 2^n\ I \ = \ n\ 2^{n-1}\ T - (n-1)\ 2^n\ I$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ T^n = n\ 2^{n-1}\ T - (n-1)\ 2^n\ I.}$$

$\square$

Remarque

- Comme noté dans la démonstration, l'hypothèse $n \geqslant 1$ est essentielle pour pouvoir découper la somme. Le cas $n = 0$ doit donc être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ N^k = 0$. Elle est dite nilpotente d'ordre 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.

Exercice 3. ($\bigstar$) *(d'après* `ESSEC III - 2007`*)*
À l'aide de la formule du binôme de Newton et de la décomposition suivante :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

déterminer l'expression de la matrice T^n en fonction de l'entier naturel n.

Démonstration.
Notons : $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\ I$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Remarquons tout d'abord que :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et ainsi :

$$N^3 = N^2 \times N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } N^3 = 0 \text{ et, par une récurrence immédiate : } \forall k \geqslant 3,\ N^k = 0.}$$

- De plus, comme la matrice identité I commute avec toute matrice :

$$DN = 2\ IN = 2\ NI = N\ (2I) = ND$$

$$\boxed{\text{Ainsi } D \text{ et } N \text{ commutent.}}$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton, pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{array}{cll}
& T^n & \\
= & (D+N)^n & \\
= & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} & \\
= & \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} & \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 2\textit{)} \\
= & \displaystyle\sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} & \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 3,\ N^k = 0\textit{)} \\
= & \dbinom{n}{0} N^0\ D^n + \dbinom{n}{1} N^1\ D^{n-1} + \dbinom{n}{2} N^2\ D^{n-2} & \\
= & (2I)^n + n\ N\ (2I)^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2}\ N^2\ (2I)^{n-2} & \\
= & 2^n I + 2^{n-1} n\ N + 2^{n-2}\ \dfrac{n(n-1)}{2}\ N^2 & \textit{(car } (2I)^m = 2^m I^m = 2^m I\textit{)} \\
= & 2^{n-3} \left(2^3\ I + 2^2\ n\ N + \cancel{2}\ \dfrac{n(n-1)}{\cancel{2}}\ N^2 \right) &
\end{array}$$

- D'où :

$$\begin{array}{cl}
& 2^3\ I + 2^2\ n\ N + n(n-1)\ N^2 \\
= & 2^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2^2\ n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n(n-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 2^3 & 2^2\ n & n(n-1) \\ 0 & 2^3 & 2^2\ n \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}
\end{array}$$

- Enfin :
  - si $n = 0$, $T^0 = I$.
  - si $n = 1$, $T^1 = T$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } T^0 = I,\ T^1 = T \text{ et pour tout } n \geqslant 2,\ \ T^n = 2^{n-3} \begin{pmatrix} 2^3 & 2^2\ n & n(n-1) \\ 0 & 2^3 & 2^2\ n \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}.}$$ □

Remarque

- Comme noté dans la démonstration, l'hypothèse $n \geqslant 2$ est essentielle pour pouvoir découper la somme. Les cas $n = 0$ et $n = 1$ doivent donc être traités à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 3,\ \ N^k = 0$. Elle est dite nilpotente d'ordre 3 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie).
- Mettre en facteur 2^{n-3} est un bon réflexe.
  En effet, cela simplifie le calcul (classique) de PT^nP^{-1} :

$$\begin{array}{rcl}
PT^nP^{-1} & = & 2^{n-3}\ P \begin{pmatrix} 2^3 & 2^2\ n & n(n-1) \\ 0 & 2^3 & 2^2\ n \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix} P^{-1} \\
& = & 2^{n-3}\ P \begin{pmatrix} 8 & 4\ n & n(n-1) \\ 0 & 8 & 4\ n \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1}
\end{array}$$

Exercice 4. ($\bigstar$) *(d'après* `ESC 2006`*)*
À tout triplet (a,b,c) de réels, on associe la matrice $M(a,b,c)$ définie par :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Cas particulier de la matrice $M(1,1,1)$

On pose $J = M(1,1,1) - I_3$, la matrice I_3 représentant la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Calculer les matrices J^2, J^3. En déduire, sans démonstration, l'expression de J^n, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $J = M(1,1,1) - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On en déduit : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Donc, pour tout } n \geqslant 3,\ J^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 0$:

$$[M(1,1,1)]^n = I_3 + n\,J + \frac{n\,(n-1)}{2}\,J^2$$

Démonstration.
Remarquons tout d'abord que :
× $[M(1,1,1)]^0 = I_3$.
× $[M(1,1,1)]^1 = M(1,1,1) = J + I_3$.
Soit $n \geqslant 2$. Par définition :

$$[M(1,1,1)]^n = (J + I_3)^n$$

- D'après la question précédente, on obtient, par une récurrence immédiate que : $\forall k \geqslant 3,\ J^k = 0$.
- Les matrices I_3 et J commutent (car I_3 commute avec toutes les matrices). On peut appliquer la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned}
[M(1,1,1)]^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k\, {I_3}^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k && \textit{(car } I_3^{n-k} = I_3\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} J^k && \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 2\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k && \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 3,\ J^k = 0\textit{)} \\
&= \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2 \\
&= I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2
\end{aligned}$$

- On remarque enfin que la formule déterminée pour $n \geqslant 2$ est toujours vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } n \in \mathbb{N},\ [M(1,1,1)]^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.}$$

□

c. En déduire l'écriture matricielle de $[M(1,1,1)]^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
[M(1,1,1)]^n &= I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } [M(1,1,1)]^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

Cas particulier de la matrice $M(1,1,2)$

On note $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n : $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

1) **Initialisation** :

- D'une part, $T^0 = I_3$.
- D'autre part, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T \times T^n \\ &= T \times \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on a : } \forall n \in \mathbb{N},\ T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.}$$ □

Remarque
On a rédigé ici à l'aide d'une récurrence, raisonnement possible puisque la formule était donnée dans l'énoncé. On aurait aussi pu faire la démonstration à l'aide de la formule du binôme. Détaillons la rédaction.

- Notons $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, de sorte que $T = D + N$.
- Remarquons tout d'abord que :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } N^2 = 0 \text{ et, par une récurrence immédiate : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0.}$$

- On remarque de plus que : $DN = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$.

$$\boxed{\text{Ainsi } D \text{ et } N \text{ commutent.}}$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton, pour $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} T^n &= (D+N)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} && \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} && \textit{(car on a montré : } \forall k \geqslant 2,\ N^k = 0\textit{)} \\ &= \binom{n}{0} N^0\, D^n + \binom{n}{1} N^1\, D^{n-1} \\ &= D^n + nND^{n-1} \end{aligned}$$

- Or :

$$\begin{array}{rcl} D^n + nND^{n-1} & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \end{array}$$

- Enfin :
  × si $n = 0$, $T^0 = I$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix} = I$.

  × si $n = 1$, $T^1 = T$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^1 \end{pmatrix} = T$.

b. Montrer que R a pour matrice inverse la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{RQ = I_3 \text{ donc } R \text{ est inversible et admet pour matrice inverse } Q.}$$

□

c. Démontrer que $M(1,1,2) = R\,T\,Q$.

Démonstration.

$$\begin{array}{rcl} RTQ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = M(1,1,2) \end{array}$$

$$\boxed{\text{On a bien } M(1,1,2) = RTQ.}$$

□

d. Sans l'expliciter, écrire $[M(1,1,2)]^n$ en fonction de n, Q, R, T.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions précédentes :

$$\begin{array}{rcl} (M(1,1,2))^n & = & (RTQ)^n \ = \ (Q^{-1}TQ)^n \\ & = & Q^{-1}T^nQ \quad \textit{(par une récurrence immédiate)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } (M(1,1,2))^n \ = \ Q^{-1}T^nQ}$$

□

Prenons un peu de recul ...

- Les questions portant sur l'utilisation de la formule du binôme sont classiques aux concours. La rédaction est `TOUJOURS` la même. De telles questions sont donc une opportunité de marquer des points.
- De manière générale, on a affaire à une matrice T qui s'écrit sous la forme $T = D + N$ où :
  × D est une matrice diagonale.
  × N est une matrice nilpotente d'ordre 2 ($\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0$), ou, dans les cas les plus difficiles, d'ordre 3 ($\forall k \geqslant 3$, $N^k = 0$).
  × $ND = DN$.
- L'hypothèse $ND = DN$ est indispensable.
  Dans le doute, on peut toujours écrire :

$$\begin{array}{rcl} (D+N)^2 & = & (D+N) \times (D+N) \\ & = & D^2 + DN + ND + N^2 \end{array}$$

Si cette hypothèse est vérifiée, la formule du binôme au rang 2 donne :

$$(D+N)^2 \ = \ D^2 + 2DN + N^2$$

Et ces deux formules coïncident ... à condition que $ND = DN$!