Application de l'inéaglité des accroissements finis à l'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Exercice 1. ($\bigstar$)

On considère la fonction f définie pour $x \geqslant 0$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

On considère aussi la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'équation $x^2+x-1 = 0$ a une seule solution dans l'intervalle $]0,1[$, que l'on notera r_2. Préciser la valeur de r_2.

Démonstration.
Notons $P(X) = X^2 + X - 1$.

- P est un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta = 1^2 - 4(-1) = 1 + 4 = 5 > 0$.
- Ainsi, P admet deux racines réelles :

$$r_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

- Or : $4 < 5 < 9$. Donc : $2 < \sqrt{5} < 3$ et $-2 > -\sqrt{5} > -3$. On en déduit :

$$-3 > -1-\sqrt{5} > -4 \quad \text{et} \quad 1 < 1+\sqrt{5} < 2$$

et enfin : $r_1 \in \left]-2, -\dfrac{3}{2}\right[$ et $r_2 \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

$$\boxed{\text{L'équation } x^2+x-1 = 0 \text{ admet } r_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ comme unique solution dans }]0,1[.}$$

□

2. Montrer que si x est un réel de l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, alors $f(x)$ appartient aussi à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Démonstration.
Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$$\begin{array}{lccccc} \text{On a alors} & \dfrac{1}{2} & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\[2ex] \text{donc} & \dfrac{3}{2} & \leqslant & x+1 & \leqslant & 2 \\[2ex] \text{et} & \dfrac{2}{3} & \geqslant & \dfrac{1}{x+1} & \geqslant & \dfrac{1}{2} \end{array}$$

(par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$)

$$\boxed{\text{Comme } \frac{2}{3} \leqslant 1, \text{ on en déduit que } f(x) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right].}$$

□

3. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

1) **Initialisation** :
$u_0 = 1 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
L'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ étant stable par f, on en déduit que $f(u_n) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
D'où $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].}$$

□

4. Démontrer que : $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1],\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{4}{9}$.

Démonstration.

- La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ car c'est l'inverse de la fonction $x \mapsto x+1$, qui est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ (en tant que fonction polynomiale) et qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$.
- Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
$$f'(x) \ = \ \frac{-1}{(x+1)^2}$$
(soit comme dérivée de l'inverse soit en écrivant $f(x) = (1+x)^{-1}$)
Ainsi, $|f'(x)| \ = \ \left|\dfrac{-1}{(x+1)^2}\right| \ = \ \dfrac{|-1|}{|(x+1)^2|} \ = \ \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
- Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

$$\begin{array}{lccccc}
\text{On a alors} & \frac{1}{2} & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\
\text{donc} & \dfrac{3}{2} & \leqslant & x+1 & \leqslant & 2 \\
\text{et} & \dfrac{9}{4} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 & \leqslant & (x+1)^2 & \leqslant & 2^2 = 4 \quad \textit{(par croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}^+\textit{)} \\
\text{ainsi} & \dfrac{4}{9} & \geqslant & \dfrac{1}{(x+1)^2} & \geqslant & \frac{1}{2} \quad \textit{(par décroissance de la fonction inverse sur } \mathbb{R}^{+*}\textit{)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right],\ |f'(x)| \ \leqslant \ \dfrac{4}{9}.}$$

□

5. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - r_2| \leqslant \dfrac{4}{9}\ |u_n - r_2|$.

Démonstration.
D'après les questions précédentes :

× f est dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$,

× $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],\ |f'(x)| \ \leqslant \ \dfrac{4}{9}$.

On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :
$$\forall (x, y) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]^2,\ |f(y) - f(x)| \ \leqslant \ \frac{1}{2}\ |y - x|$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $x = r_2 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on obtient :
$$|f(u_n) - f(r_2)| \ \leqslant \ \frac{4}{9}\ |u_n - r_2|$$
Or r_2 vérifie ${r_2}^2 + r_2 - 1 = 0$. Ainsi :
$${r_2}^2 + r_2 \ = \ 1 \quad \text{et} \quad r_2\,(r_2+1) \ = \ 1 \quad \text{d'où} \quad r_2 \ = \ \frac{1}{r_2+1} \ = \ f(r_2)$$
$$\boxed{\text{On en conclut : } |u_{n+1} - r_2| \ \leqslant \ \dfrac{4}{9}\ |u_n - r_2|.}$$

□

6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} :\ |u_n - r_2| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n) : |u_n - r_2| \ \leqslant \ \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.

1) **Initialisation** :
$|u_0 - r_2| \leqslant \frac{1}{2} \leqslant 1$ car u_0 et r_2 sont des éléments de $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$
(*i.e.* $|u_{n+1} - r_2| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n+1}$).
D'après le résultat précédent : $|u_{n+1} - r_2| \leqslant \dfrac{4}{9}\, |u_n - r_2|$.
Or, par hypothèse de récurrence : $|u_n - r_2| \leqslant \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n}$.
En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$|u_{n+1} - r_2| \leqslant \frac{4}{9}\,|u_n - r_2| \leqslant \frac{4}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{n} = \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n}.}$$

□

7. À partir de quelle valeur de n le terme u_n est-il une valeur approchée de r_2 à 10^{-6} près ?
On choisira la réponse parmi : $n = 9$, 18, 24, ou 36.
On donne : $\ln 10 \simeq 2{,}30$ $\quad \ln 2 \simeq 0{,}69$ $\quad \ln 3 \simeq 1{,}10$.

Démonstration.

- Pour que u_n soit une valeur approchée de r_2 à 10^{-6} près, il suffit que : $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n} \leqslant 10^{-6}$. En effet, si c'est le cas on obtient par transitivité :

$$|u_n - r_2| \leqslant \left(\frac{4}{9}\right)^{n} \leqslant 10^{-6}$$

- Or :

$$\begin{array}{rrcll} & \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n} & \leqslant & 10^{-6} & \\ \Leftrightarrow & n \ln\left(\dfrac{4}{9}\right) & \leqslant & -6\ln(10) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } \ln\textit{)} \\ \Leftrightarrow & n & \geqslant & \dfrac{-6\ln(10)}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} & \textit{(car } \ln(\tfrac{4}{9}) < 0 \textit{ puisque } \tfrac{4}{9} < 1\textit{)} \end{array}$$

De plus :

$$\frac{-6\ \ln(10)}{\ln(\frac{4}{9})} = \frac{-6\ \ln(10)}{\ln(4) - \ln(9)} = \frac{-6\ \ln(10)}{\ln(2^2) - \ln(3^2)} = \frac{-6\ \ln(10)}{2\ \ln(2) - 2\ \ln(3)}$$
$$= \frac{-6\ \ln(10)}{2\,(\ln(2) - \ln(3))} = \frac{-3\ \ln(10)}{\ln(2) - \ln(3)} = \frac{3\ \ln(10)}{\ln(3) - \ln(2)}$$

Enfin :

$$\frac{3\ \ln(10)}{\ln(3) - \ln(2)} \simeq \frac{3 \times 2,3}{1,1 - 0,7} = \frac{6,9}{0.4} = \frac{6,9}{\frac{4}{10}} = \frac{10 \times 6,9}{4} = \frac{69}{4}$$

$$\boxed{\text{Comme } 68 < 69 \leqslant 72, \text{ on a } 17 < \frac{69}{4} \leqslant 18, \text{ le choix de } n = 18 \text{ assure que } u_n \text{ est une approximation de } r_2 \text{ à } 10^{-6} \text{ près.}}$$

□

Exercice 2. (★) *(d'après* `EML 96`*)*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. a) Démontrer que f est paire sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) \;=\; \frac{e^{-x}}{e^{-2x}+1} \;=\; \frac{e^{2x}}{e^{2x}}\,\frac{e^{-x}}{e^{-2x}+1} \;=\; \frac{e^{x}}{1+e^{2x}} \;=\; f(x)$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la fonction est paire sur } \mathbb{R}.}$$

□

b) Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et étudier ses variations.

Démonstration.

- La fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car est le quotient de :
  - × la fonction $x \mapsto e^x$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
  - × la fonction $x \mapsto e^{2x}+1$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et **qui ne s'annule pas sur** $\mathbb{R}$.

  (en fait, on peut démontrer par une argumentation similaire que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$)
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) \;=\; \frac{e^x\,(e^{2x}+1) - e^x\,(2\,e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} \;=\; \frac{e^{3x}+e^x-2\,e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2} \;=\; \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

  Comme $(e^{2x}+1)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $e^x - e^{3x}$.
- Si $x > 0$, $3x > x$ et donc $e^{3x} > e^x$ par stricte croissance de la fonction exponentielle.
  Dans ce cas, $f'(x) < 0$.
  L'autre cas se déduit par parité de la fonction f.
- On en déduit le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

Détaillons les différents éléments de ce tableau :

× $f(0) \;=\; \dfrac{e^0}{e^0+1} \;=\; \dfrac{1}{1+1} \;=\; \dfrac{1}{2}$,

× $\dfrac{e^x}{e^{2x}+1} \;=\; \dfrac{e^x}{e^{2x}}\,\dfrac{1}{1+\frac{1}{e^{2x}}} \;=\; \dfrac{1}{e^x}\,\dfrac{1}{1+\frac{1}{e^{2x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

□

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

Démonstration.
Notons $g : x \mapsto f(x) - x$. La fonction g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par somme de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On procède par disjonction de cas :

- Si $x < 0$: comme $f(x) > 0$, l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution.
- Si $x \geqslant 0$: tout d'abord, $g'(x) = f'(x) - 1$.
  Or $f'(x) \leqslant 0$ donc $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ et la fonction g est strictement décroissante.

  La fonction g est :
  - × continue sur $[0,+\infty[$,
  - × strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

  Elle réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[)$. Or :

$$g([0,+\infty[) = \,]\lim_{x\to+\infty} g(x),\; g(0)] \;=\;]-\infty,\; \frac{1}{2}]$$

En effet :

× $g(0) \ = \ f(0) - 0 \ = \ \dfrac{1}{2}$.

× comme $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, on obtient : $g(x) = f(x) - x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Enfin, comme $0 \in \,]-\infty, \frac{1}{2}]$, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\ell \in \mathbb{R}^+$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution } \ell \in [0, +\infty[.}$$ □

d) Justifier que : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Données numériques : $e^{1/2} \simeq 1,65$ et $e \simeq 2,72$ au centième près.

Démonstration.
Tout d'abord, remarquons que :

× $g(0) \ = \ f(0) - 0 \ = \ \dfrac{1}{2} \ \geqslant \ 0$,

× $g(\ell) \ = \ f(\ell) - \ell \ = \ 0$,

× $g\left(\dfrac{1}{2}\right) \ = \ f\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} \ = \ \dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{e^1 + 1} - \dfrac{1}{2} \ = \ \dfrac{2\, e^{\frac{1}{2}} - e - 1}{2\,(e+1)} \leqslant 0$.

En effet :
$2\, e^{\frac{1}{2}} - e - 1 \ \simeq \ 2 \times 1,65 - 2,72 - 1 \ = \ 3,3 - 3,72 \ = \ -0,42 \ \leqslant \ 0$
(les valeurs étant données au centième près, l'approximation obtenue est exacte au moins au dixième près)

On obtient donc : $g(0) \ \geqslant \ g(\ell) \ \geqslant \ g\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

Ces trois éléments sont dans l'ensemble $]-\infty, \dfrac{1}{2}]$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{En appliquant } g^{-1} :]-\infty, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}^+ \text{ de part et d'autre} \\ \text{de l'inégalité, on obtient : } 0 \ \leqslant \ \ell \ \leqslant \ \frac{1}{2}.\end{array}}$$

On pouvait aussi tout simplement remarquer que, d'après la question précédente :

- $\ell \in \mathbb{R}^+$
- $\ell = f(\ell)$

Donc $\ell \in f(\mathbb{R}^+)$. *Or* $f(\mathbb{R}^+) =]0, \frac{1}{2}]$. *Ainsi* $\ell \in]0, \frac{1}{2}]$. □

e) Montrer que : $\forall x \geqslant 0, \ |f'(x)| \ \leqslant \ f(x)$.
En déduire que : $\forall x \geqslant 0, \ |f'(x)| \ \leqslant \ \dfrac{1}{2}$.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$.

- D'après la question ***1.b.*** :

$$f'(x) \ = \ \frac{e^x - e^{3x}}{1 + e^{2x}} \ \leqslant \ 0$$

Donc : $|f'(x)| \ = \ -f'(x) \ = \ \dfrac{e^{3x} - e^x}{1 + e^{2x}}$. Et ainsi :

$$|f'(x)| - f(x) \ = \ \frac{e^{3x} - e^x}{(e^{2x}+1)^2} - \frac{e^x}{e^{2x}+1} \ = \ \frac{e^{3x} - e^x - e^x \times (e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2}$$
$$= \ \frac{\cancel{e^{3x}} - e^x - \cancel{e^{3x}} - e^x}{(e^{2x}+1)^2} \ = \ \frac{-2\, e^x}{(e^{2x}+1)^2} \ \leqslant \ 0$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \quad \forall x \geqslant 0, \ |f'(x)| \ \leqslant \ f(x).}$$

- Or, l'étude de la fonction f (question ***1.b)***) démontre qu'elle atteint son maximum en 0.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \quad \forall x \geqslant 0, \ |f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant f(0) = \frac{1}{2}.}$$ □

f) Vérifier que $f([0, \frac{1}{2}]) \subset [0, \frac{1}{2}]$.

Démonstration.
La fonction f est continue et décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$. On en déduit que :

$$f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right), f(0)\right] = \left[\frac{e^{\frac{1}{2}}}{e+1}, \frac{1}{2}\right] \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\boxed{\text{L'intervalle } [0, \tfrac{1}{2}] \text{ est stable par } f.}$$

□

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$.

1) **Initialisation** :
$u_0 = 0 \in [0, \frac{1}{2}]$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} \in [0, \frac{1}{2}]$).
Par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$. Or :
- × par hypothèse de récurrence, on sait : $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$.
- × l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ est stable par f.

On obtient donc : $u_{n+1} = f(u_n) \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \in [0, \tfrac{1}{2}].}$$

□

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \ell| \qquad \text{puis que} \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

Démonstration.
- D'après les questions précédentes :
  - × f est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}]$,
  - × $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (x, y) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^2, \ |f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2} |y - x|$$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ et $x = \ell \in [0, \frac{1}{2}]$, on obtient :

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \ell|$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } |u_{n+1} - \ell| \leqslant \tfrac{1}{2} |u_n - \ell|.}$$

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
  où $\mathcal{P}(n)$: $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

1) **Initialisation** :
$|u_0 - \ell| \leqslant \frac{1}{2}$ car u_0 et ℓ sont des éléments de $[0, \frac{1}{2}]$.
Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+2}}$).
D'après le résultat précédent : $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \ell|$.
Or, par hypothèse de récurrence : $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
En combinant ces deux résultats, on obtient :

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}.}$$

□

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- D'après la question précédente : $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
- Or : $\dfrac{1}{2^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $2^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Donc, d'après le théorème d'encadrement, $|u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui équivaut à $u_n - \ell \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, la suite (u_n) est convergente et de limite ℓ.

□

3. Informatique

a) Écrire une fonction **Scilab** `f` qui prend en entrée un réel x et qui calcule $f(x)$.

Démonstration.

```
function y = f(x)
    y = exp(x) / (exp(2 ⋆ x) + 1)
endfunction
```

□

b) En utilisant la fonction `f` précédente, écrire une fonction `SuiteU` qui prend en entrée un entier positif n et qui calcule u_n.

Démonstration.

```
function v = SuiteU(n)
    v = 0
    for i = 1 : n
        v = f(v)
    end
endfunction
```

Remarque
Dans ce code, on réalise un appel à la fonction `f`. Il faut aussi savoir coder la fonction `SuiteU` lorsque l'on ne demande pas au préalable de coder la fonction `f`.

```
function v = SuiteU(n)
    v = 0
    for i = 1 : n
        v = exp(v) / (exp(2 ⋆ v) + 1)
    end
endfunction
```

□

c) En utilisant la fonction `SuiteU` précédente, comment peut-on obtenir à l'aide de **Scilab** une valeur approchée de ℓ à 10^{-6} près ?

Démonstration.
D'après la question ***2.b.***, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $\dfrac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-6}$, on obtiendra par transitivité : $|u_n - \ell| \leqslant 10^{-6}$. Or :

$$\frac{1}{2^{n+1}} \leqslant 10^{-6} \Leftrightarrow 2^{n+1} \geqslant 10^{6} \Leftrightarrow (n+1)\ \ln(2) \geqslant 6\ \ln(10)$$

$$\Leftrightarrow n+1 \geqslant \frac{6\ \ln(10)}{\ln(2)} \Leftrightarrow n \geqslant \frac{6\ \ln(10)}{\ln(2)} - 1$$

Pour $N = \left\lceil \dfrac{6\ \ln(10)}{\ln(2)} - 1 \right\rceil$ (et les entiers plus grands) on est donc assuré que :

$$|u_N - \ell| \leqslant 10^{-6}$$

ce qui signifie que u_N est une approximation de ℓ à 10^{-6} près.
Il suffit alors d'appeler la fonction `SuiteU` avec pour paramètre `N`.

```
N = ceil(6 ⋆ log(10) / log(2) - 1)
u = SuiteU(N)
```

□

Exercice 3. (★) *(d'après* `EML 2009`*)*
On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

- La fonction f est continue *(et même C^∞)* sur $]0, +\infty[$ comme quotient de :
  - $\times$ $x \mapsto x$ continue *(C^∞)* sur $]0, +\infty[$ car polynomiale.
  - $\times$ $x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$ continue *(C^∞)* sur $]0, +\infty[$ et qui **ne s'annule pas sur cet intervalle**.
- De même, la fonction f est continue *(C^∞)* sur $]-\infty, 0[$.
  Elle est donc continue sur $]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = 1 = f(0)$.
  Ainsi, f est continue en 0.

$$\boxed{\text{On en conclut que } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

□

b) Justifier que f est de classe C^1 sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[$.

Démonstration.

- D'après la question précédente, f est C^1 sur $]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[$.
- Soit $x \in]-\infty, 0[\, \cup\,]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(\mathrm{e}^x - 1) - x\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{(1 - x)\,\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \ f'(x) = \frac{(\mathrm{e}^x - 1) - x\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{(1 - x)\,\mathrm{e}^x - 1}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}}$$

□

On admettra pour la suite que $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$ et que f est C^1 sur $\mathbb{R}$.

2. a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$u(x) = (1 - x)\mathrm{e}^x - 1.$$

Démonstration.

- La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u'(x) = -x\,\mathrm{e}^x$$

Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $u'(x)$ est du signe opposé de x.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $u'(x)$		$+$		$-$	
Variations de u	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

□

b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) < 0$.

Démonstration.

- La fonction u est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et croissante sur $\mathbb{R}_-$.
  Elle admet donc un maximum en 0. Ce maximum vaut $u(0) = 0$.
  Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(x) \leqslant 0$.
- Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{u(x)}{(\mathrm{e}^x - 1)^2} < 0$$

car $(\mathrm{e}^x - 1)^2 > 0$ et $u(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

- Enfin, $f'(0) = -\dfrac{1}{2} < 0$ d'après l'énoncé.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) < 0.}$$

□

c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Démonstration.

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - 1 = -1$. Et comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, on a : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

□

3. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} & f(x) = x \\ \Leftrightarrow\ & \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = x \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^x - 1 = 1 \quad \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \\ \Leftrightarrow\ & \mathrm{e}^x = 2 \\ \Leftrightarrow\ & x = \ln(2) \end{aligned}$$

- D'autre part, $f(0) = 1$ donc 0 n'est pas un point fixe de f.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet pour unique point fixe } \alpha = \ln(2).}$$

□

4. a) Établir : $\forall x \in [0, +\infty[,\ \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$.

Démonstration.

- Considérons la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^x - 1$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$g'(x) = 2\mathrm{e}^x\,(\mathrm{e}^x - 1 - x)$$

- Comme $\mathrm{e}^x > 0$, $g'(x)$ est du signe de $\mathrm{e}^x - 1 - x$.
- Or la fonction exp est convexe.
  Elle est donc située au-dessus de ses tangentes et en particulier au-dessus de sa tangente en 0.
  Autrement dit : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant x + 1$.
- On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) \geqslant 0$.
  La fonction g est donc croissante.
- Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \geqslant g(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement, pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ \ \mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0.}$$

□

b) Montrer $\forall x \in]0, +\infty[,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1}{2(\mathrm{e}^x - 1)^2}$.

Démonstration.
Soit $x \in\ ]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{(1-x)\,\mathrm{e}^x - 1}{(\,\mathrm{e}^x - 1)^2} + \frac{1}{2} = \frac{2(1-x)\,\mathrm{e}^x - 2 + (\,\mathrm{e}^x - 1)^2}{2(\,\mathrm{e}^x - 1)^2} \\ &= \frac{\cancel{2\,\mathrm{e}^x} - 2x\,\mathrm{e}^x - 2 + \mathrm{e}^{2x} - \cancel{2\,\mathrm{e}^x} + 1}{2(\,\mathrm{e}^x - 1)^2} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^x - 1}{2(\mathrm{e}^x - 1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[,\ \ f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x - 1}{2(\mathrm{e}^x - 1)^2}.}$$

□

c) Montrer : $\forall x \in [0, +\infty[,\ -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

Démonstration.
Soit $x \in\ [0, +\infty[$.

- Si $x \neq 0$, d'après la question précédente, $f'(x) + \dfrac{1}{2}$ est du signe de $g(x)$ car $2\,(\mathrm{e}^x - 1)^2 > 0$.
  Et comme $g(x) \geqslant 0$ d'après la question *2.a)*, on a : $f'(x) + \dfrac{1}{2} \geqslant 0$.

- D'autre part, $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que : $\forall x \in [0, +\infty[,\ f'(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

D'autre part, $f'(x) < 0$ d'après la question ***2.a)***.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ -\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0}$$

□

d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$,
- $\forall x \in [0, +\infty[,\ -\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$ donc $-\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ ce qui signifie $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis on a donc :

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2,\ |f(y) - f(x)| \ \leqslant\ |y - x|$$

Comme $u_0 = 1 \geqslant 0$ et que l'intervalle $[0, +\infty[$ est stable par f (d'après la question ***2.c)*** de la première partie), on peut démontrer par une récurrence immédiate que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0, +\infty[$.

Ainsi, on peut appliquer l'inégalité précédente en $y = u_n$ et $x = \alpha = \ln(2) \geqslant 0$. On a alors :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$$

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ par définition de la suite (u_n) et $f(\alpha) = \alpha$ car α est le point fixe de f.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|}$$

□

5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}(1 - \alpha)$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n) : |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}\,(1 - \alpha)$.

1) **Initialisation** :
$u_0 = 1$, donc $|u_0 - \alpha| = |1 - \alpha| = |1 - \ln(2)| = 1 - \ln(2)$.
En effet, $1 - \ln(2) \geqslant 0$ puisque $\mathrm{e}^1 \geqslant 2$.
Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$
(*i.e.* $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}\,(1 - \alpha)$).
D'après la question ***2.d)*** :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient alors :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}\,(1 - \alpha) \ = \ \frac{1}{2^{n+1}}\,(1 - \alpha)$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}\,(1 - \alpha).}$$

□

6. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Démonstration.

- $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n}(1 - \alpha) = 0$.
- Donc, d'après le théorème d'encadrement, la suite $(u_n - \alpha)$ est convergente de limite nulle.

$$\boxed{\text{Autrement dit, } (u_n) \text{ est convergente de limite } \alpha.}$$

□

7. Écrire un programme en **Scilab** qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

Démonstration.

```
u = 1
n = 0
while abs(u- log(2)) >= 10 ^ (-9)
    u = u / (exp(u)-1)
    n = n+1
end
disp(n)
```

□

8. Si on ne connaissait pas la valeur de α, comment aurait-on pu déterminer un entier n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$?
Écrire l'appel correspondant en **Scilab**.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Comme $\alpha \geqslant 0$, $1 - \alpha \leqslant 1$. Ainsi : $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha) \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
- Or, comme $\dfrac{1}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ \dfrac{1}{2^n} \leqslant 10^{-9}$.
- Déterminons le premier $n_0 \in \mathbb{N}$ vérifiant cette propriété :

$$\begin{array}{rrcll}
 & \dfrac{1}{2^n} & \leqslant & 10^{-9} & \\
\Leftrightarrow & 2^n & \geqslant & 10^9 & \textit{(par décroissance de la fonction inverse)} \\
\Leftrightarrow & n\ \ln(2) & \geqslant & 9\ \ln(10) & \textit{(car } \ln \textit{ est strictement croissante)} \\
\Leftrightarrow & n & \geqslant & \frac{9\ \ln(10)}{\ln(2)} & \textit{(car } \ln(2) > 0\textit{)}
\end{array}$$

Ainsi, l'entier n_0 cherché est : $n_0 = \left\lceil \frac{9\ \ln(10)}{\ln(2)} \right\rceil$.

On obtient l'entier cherché par l'appel : `ceil(9*log(10) / log(2))`.

Remarque
Si on ne connaît pas α et qu'on souhaite en calculer une approximation à 10^{-9} près, on pourra alors procéder comme suit.

```
u = 1

for i = 1:N
    u = u / (exp(u)-1)
end
disp(u)
```

□

Exercice 4. (★)
On considère la fonction $f : x \mapsto 4 - \dfrac{1}{4}\ \ln(x)$.
On définit alors la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
On rappelle les valeurs approchées suivantes : $\ln(2) \simeq 0.69$ et $\ln(3) \simeq 1.1$.

1. Démontrer que l'intervalle $I = [3, 4]$ est stable par f.

Démonstration.
Soit $x \in [3, 4]$.

$$\begin{array}{lccccccl}
\text{On a alors} & 3 & \leqslant & x & \leqslant & 4 & & \\
\text{donc} & \ln(3) & \leqslant & \ln(x) & \leqslant & \ln(4) & & \textit{(par croissance de la fonction } \ln\textit{)} \\
\text{et} & \dfrac{-1}{4}\ \ln(3) & \geqslant & \dfrac{-1}{4}\ \ln(x) & \geqslant & \dfrac{-1}{4}\ \ln(4) & & \\
\text{ainsi} & 4 - \dfrac{1}{4}\ \ln(3) & \geqslant & f(x) & \geqslant & 4 - \dfrac{1}{4}\ \ln(4) & = & 4 - \dfrac{\ln(2)}{2}
\end{array}$$

- Comme $\ln(2) \leqslant 1$, $-\dfrac{\ln(2)}{2} \geqslant -\dfrac{1}{2}$ et donc $4 - \dfrac{\ln(2)}{2} \geqslant \dfrac{7}{2} \geqslant 3$.
- Comme $\ln(3) \geqslant 1$, $-\dfrac{\ln(3)}{4} \leqslant -\dfrac{1}{4}$ et donc $4 - \dfrac{\ln(3)}{4} \leqslant \dfrac{15}{4} \leqslant 4$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f(x) \in [3,4].}$$

□

2. En déduire par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I$.

Démonstration.
Démontrons maintenant par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $u_n \in [3,4]$.

1) **Initialisation** :
$u_0 = 3 \in [3,4]$.
Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

2) **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par définition, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in [3,4]$.
L'intervalle $[3,4]$ étant stable par f, on en déduit que $f(u_n) \in [3,4]$.
D'où $u_{n+1} \in [3,4]$ et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

$$\boxed{\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [3,4].}$$

□

3. Démontrer que : $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{12}$.

Démonstration.

- La fonction f est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ car ln l'est.
- Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{4x}$$

Ainsi, $|f'(x)| = \left|\dfrac{-1}{4x}\right| = \dfrac{|-1|}{|4x|} = \dfrac{1}{4x}$.

- Soit $x \in [3,4]$.

$$\begin{array}{lcccccl} \text{On a alors} & 3 & \leqslant & x & \leqslant & 4 & \\ \text{donc} & 12 & \leqslant & 4x & \leqslant & 16 & \\ \text{et} & \dfrac{1}{12} & \geqslant & \dfrac{1}{4x} & \geqslant & \dfrac{1}{16} & \end{array}$$

(par croissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+*}$)

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [3,4], \text{ on a : } |f'(x)| = \frac{1}{4x} \leqslant \frac{1}{12}.}$$

□

4. On admet qu'il existe un unique $r \in I$ tel que $f(r) = r$.
Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{1}{12}|u_n - r|$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les questions précédentes :

× f est dérivable sur $[3,4]$,

× $\forall x \in [3,4]$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{12}$.

On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis que :

$$\forall (x,y) \in [3,4]^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2}\,|y - x|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [3,4]$ et $x = r \in [3,4]$, on obtient :

$$|f(u_n) - f(r)| \leqslant \frac{4}{9}\,|u_n - r|$$

Or r est tel que : $f(r) = r$ (r est un point fixe de f) et $f(u_n) = u_{n+1}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } |u_{n+1} - r| \leqslant \frac{1}{12}\,|u_n - r|.}$$

□

5. Déduire de ce qui précède : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$.

Démonstration.

- Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$
  où $\mathcal{P}(n) : |u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$.

  1) **Initialisation** :
  $|u_0 - r| \leqslant 1$ car u_0 et r sont des éléments de $[3,4]$, intervalle de largeur 1.
  Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

  2) **Hérédité** :
  Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$
  (*i.e.* $|u_{n+1} - r| \leqslant \left(\dfrac{1}{12}\right)^{n+1}$).
  D'après le résultat précédent : $|u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{1}{12}\,|u_n - r|$.
  Or, par hypothèse de récurrence : $|u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{1}{12}\right)^n$.
  En combinant ces deux résultats, on obtient :

  $$|u_{n+1} - r| \leqslant \frac{1}{12}\,|u_n - r| \leqslant \frac{1}{12}\left(\frac{1}{12}\right)^n = \left(\frac{1}{12}\right)^{n+1}$$

  Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

  $\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - r| \leqslant \left(\dfrac{1}{12}\right)^n.}$ $\square$