Inversion de matrices

Exercice 1. (☆)
Déterminer l'inverse des matrices suivantes.

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 24 & 16 \end{pmatrix}$

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $A_5 = \begin{pmatrix} 3 & -30 & -2 \\ -1 & 14 & 1 \\ 6 & -63 & -4 \end{pmatrix}$

6. $A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 12 \\ -1 & 0 & -10 \\ 0 & 3 & -21 \end{pmatrix}$

7. $A_7 = \begin{pmatrix} 1 & -30 & 0 \\ -1 & 33 & 1 \\ 1 & -29 & 2 \end{pmatrix}$

Démonstration.

1. On applique l'algorithme du pivot de Gauss.
Notons que la matrice A_1 est triangulaire supérieure à cœfficients diagonaux tous non nuls. Elle est donc inversible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } A_1 \text{ est inversible et } A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.}$$

2. On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & 24 & 16 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 12 & 10 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure à cœfficients diagonaux tous non nuls. Elle est donc inversible et A_2 est elle aussi inversible.

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -2 & 18 & -3 \\ -4 & 20 & -3 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_1 \leftarrow 2L_1 - 3L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 8 & -24 & 3 \\ -4 & 20 & -3 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{4} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{4} L_2 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -6 & \frac{3}{4} \\ -1 & 5 & -\frac{3}{4} \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } A_2 \text{ est inversible et } A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & \frac{3}{4} \\ -1 & 5 & -\frac{3}{4} \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3. On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -5 & 4 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_3 \leftarrow 3L_3 + 5L_1 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure à cœfficients diagonaux tous non nuls. Elle est donc inversible et A_3 est elle aussi inversible.

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue enfin les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{6} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{6} L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{6} L_3 \end{array} \right.$.

$$\boxed{\text{Ainsi } A_3 \text{ est inversible et } A_3^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.}$$

4. On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_3 \leftarrow 2L_3 + 3L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure à cœfficients diagonaux tous non nuls. Elle est donc inversible et A_4 est elle aussi inversible.

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } A_4 \text{ est inversible et } A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.}$$

5. On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 3 & -30 & -2 \\ -1 & 14 & 1 \\ 6 & -63 & -4 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 3 & -30 & -2 \\ 0 & 12 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_3 \leftarrow 4L_3 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 3 & -30 & -2 \\ 0 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure à cœfficients diagonaux tous non nuls. Elle est donc inversible et A_5 est elle aussi inversible.

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 3 & -30 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -13 & 6 & 8 \\ 8 & 0 & -4 \\ -7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_1 \leftarrow 2L_1 + 5L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 14 & 12 & -4 \\ 8 & 0 & -4 \\ -7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{6} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{12} L_2 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } A_5 \text{ est inversible et } A_5^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 2 & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -7 & 3 & 4 \end{pmatrix}.}$$

6. On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 12 \\ -1 & 0 & -10 \\ 0 & 3 & -21 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_2 \leftarrow 3L_2 + L_1 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -18 \\ 0 & 3 & -21 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -18 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & -9 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure à cœfficients diagonaux tous non nuls. Elle est donc inversible et A_6 est elle aussi inversible.

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 4 & 9 & -2 \\ -7 & -21 & 6 \\ -3 & -9 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 15 & 39 & -10 \\ -7 & -21 & 6 \\ -3 & -9 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue enfin les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{6}L_1 \\ L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{12}L_2 \end{array} \right.$.

$$\boxed{\text{Ainsi } A_6 \text{ est inversible et } A_6^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 30 & 78 & -20 \\ -21 & -63 & 18 \\ -3 & -9 & 2 \end{pmatrix}.}$$

7. On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -30 & 0 \\ -1 & 33 & 1 \\ 1 & -29 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -30 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -30 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure à cœfficients diagonaux tous non nuls. Elle est donc inversible et A_7 est elle aussi inversible.

On effectue les opérations $\left\{ L_2 \leftarrow 5L_2 - L_3 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -30 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 19 & 12 & -6 \\ 9 & 6 & -3 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{15}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{5}L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 19 & 12 & -6 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } A_7 \text{ est inversible et } A_7^{-1} = \begin{pmatrix} 19 & 12 & -6 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.}$$

□