Espaces propres, valeurs propres : détermination

Exercice 1. (★★)
On considère les matrices suivantes.

a) $M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$

b) $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $M_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $M_4 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

e) $M_5 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

f) $M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Pour chaque matrice M_i, déterminer les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $M_i - \lambda I$ est non inversible.

Pour ce faire, on déterminera les réels $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\text{rg}(M_i - \lambda I) \neq 3$$

2. Pour chaque matrice M_i exprimer l'ensemble suivant sous la forme d'un espace vectoriel engendré par une famille finie à déterminer.

$$E_\lambda(M_i) = \{X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (M_i - \lambda I)\ X = 0\}$$

pour tout λ tel que : $\text{rg}(M_i - \lambda I) \neq 3$.

Démonstration.

1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{rg}(M_1 - \lambda I) \quad = \quad \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 6-\lambda & -6 \\ 0 & 0 & 12-\lambda \end{pmatrix}\right)$$

La matrice $M_1 - \lambda I$ est triangulaire supérieure.
Elle est non inversible ssi l'un de ses cœfficients diagonaux est nul.
Autrement dit ssi : $2 - \lambda = 0$ OU $6 - \lambda = 0$ OU $12 - \lambda = 0$. Ainsi :

$$M_1 - \lambda I \text{ non inversible } \Leftrightarrow \lambda \in \{2, 6, 12\}$$

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{rg}(M_2 - \lambda I) &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{L_2 \leftarrow L_2 - (1-\lambda)L_1}{=} \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & -(1-\lambda)^2 & -(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
Elle est non inversible ssi l'un de ses cœfficients diagonaux est nul.
Autrement dit ssi : $-(1-\lambda)^2 = 0$ OU $1 - \lambda = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} M_2 - \lambda I \text{ non inversible } &\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = 0 \text{ OU } 1 - \lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda = 1 \end{aligned}$$

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{rg}(M_3 - \lambda I) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 3-\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (3-\lambda)L_1}}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -4+2\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 1-(3-\lambda)^2 \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -4+2\lambda \\ 0 & 0 & 5-(3-\lambda)^2-2\lambda \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
Elle est non inversible ssi l'un de ses cœfficients diagonaux est nul.
Autrement dit ssi : $2 - \lambda = 0$ `OU` $5 - (3-\lambda)^2 - 2\lambda = 0$. Or :

$$\begin{array}{rcl}
5-(3-\lambda)^2-2\lambda & = & 5-(9-6\lambda+\lambda^2)-2\lambda \\
& = & -4+4\lambda-\lambda^2 \\
& = & -(2-\lambda)^2
\end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
M_3 - \lambda I \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & 2-\lambda = 0 \ \texttt{OU} \ (2-\lambda)^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow & 2-\lambda = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda = 2
\end{array}$$

d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{rg}(M_4 - \lambda\, I_3) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_3}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 5-\lambda & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2\,L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (5-\lambda)\,L_1}}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -8+2\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -1-(5-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3-\lambda \\ 0 & 6-\lambda & -8+2\lambda \\ 0 & 0 & -8+6\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
Elle est non inversible ssi l'un de ses cœfficients diagonaux est nul.
Autrement dit ssi : $6 - \lambda = 0$ `OU` $-8+6\lambda-\lambda^2 = 0$. Or :

$$-8+6\lambda-\lambda^2 = -(8-6\lambda+\lambda^2) = -(\lambda-2)(\lambda-4)$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
M_4 - \lambda I \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & 6-\lambda = 0 \ \texttt{OU} \ -8+6\lambda-\lambda^2 = 0 \\
& \Leftrightarrow & 6-\lambda = 0 \ \texttt{OU} \ \lambda-2 = 0 \ \texttt{OU} \ \lambda-4 = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda \in \{2,4,6\}
\end{array}$$

e) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{rg}(M_5 - \lambda I) & = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_2 \leftarrow L_2 - (3-\lambda)\, L_1}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1-(2-\lambda)(3-\lambda) & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_3 \leftrightarrow L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -1-(2-\lambda)(3-\lambda) & 1 \end{pmatrix}\right) \\
& = & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -q(\lambda) & 1 \end{pmatrix}\right) \\
& \overset{L_3 \leftarrow L_3 + q(\lambda)\, L_2}{=} & \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1+(1-\lambda)\, q(\lambda) \end{pmatrix}\right)
\end{array}$$

où : $q(\lambda) = 1 + (2-\lambda)(3-\lambda)$.

La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
Elle est non inversible ssi l'un de ses cœfficients diagonaux est nul.
Autrement dit ssi : $1 + (1-\lambda)q(\lambda) = 0$.

Or :

$$\begin{array}{rcl}
1 + (1-\lambda)\, q(\lambda) & = & 1 + (1-\lambda)\, \Big(1 + (2-\lambda)(3-\lambda)\Big) \\
& = & 1 + (1-\lambda) + (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) \\
& = & (2-\lambda) + (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) \\
& = & (2-\lambda)\, \Big(1 + (1-\lambda)(3-\lambda)\Big) \\
& = & (2-\lambda)\, \Big(1 + (3 - 4\lambda + \lambda^2)\Big) \\
& = & (2-\lambda)\, (4 - 4\lambda + \lambda^2) \\
& = & (2-\lambda)\, (2-\lambda)^2 \;=\; (2-\lambda)^3
\end{array}$$

Ainsi :

$$\begin{array}{rcl}
M_5 - \lambda I \text{ non inversible} & \Leftrightarrow & (2-\lambda)^3 = 0 \\
& \Leftrightarrow & 2 - \lambda = 0 \\
& \Leftrightarrow & \lambda = 2
\end{array}$$

f) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(M_6 - \lambda I) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - (1-\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-(1-\lambda)^2 & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda(2-\lambda) & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & \lambda(2-\lambda) & \lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda)L_2}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda + (2-\lambda)\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda(3-\lambda) \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure.
Elle est non inversible ssi l'un de ses cœfficients diagonaux est nul.
Autrement dit ssi : $\lambda = 0$ `OU` $\lambda(\lambda - 3) = 0 = 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
M_6 - \lambda I \text{ non inversible} &\Leftrightarrow \lambda = 0 \ \texttt{OU} \ (\lambda = 0 \ \texttt{OU} \ \lambda - 3 = 0) \\
&\Leftrightarrow \lambda \in \{0, 3\}
\end{aligned}$$

Remarque
On peut conclure plus rapidement le calcul précédent. En effet, on a vu que le rang est invariable par transposée. Ainsi, lors d'un calcul de rang, on est autorisé à faire des opérations sur les colonnes.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(M_6 - \lambda I) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda(2-\lambda) & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{C_2 \leftarrow C_2 + C_3}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda(2-\lambda)+\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda(3-\lambda) & \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

2. a) (i) Déterminons tout d'abord $E_2(M_1)$.

$$\begin{aligned} M_1X = 2X &\Leftrightarrow (M_1 - 2I)\ X = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2y & & & = & 0 \\ 4y & - & 6z & = & 0 \\ & & 10z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} E_2(M_1) &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y = 0 \text{ et } z = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_2(M_1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

(ii) Déterminons maintenant $E_6(M_1)$.

$$\begin{aligned} M_1X = 6X &\Leftrightarrow (M_1 - 6I)\ X = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -4x & - & 2y & & & = & 0 \\ & & & - & 6z & = & 0 \\ & & & & 6z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & & & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & & & = & -y \\ & & z & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} E_6(M_1) &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\frac{1}{2}y \text{ et } z = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_6(M_1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)}$$

(iii) Déterminons enfin $E_{12}(M_1)$.

$$\begin{aligned}
M_1X = 12X & \Leftrightarrow (M_1 - 12I)\ X = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -10 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -10x & - & 2y & & & = & 0 \\ & - & 6y & - & 6z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 5x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} 5x & + & y & = & 0 \\ & & y & = & -z \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcr} 5x & & & = & z \\ & & y & = & -z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
E_{12}(M_1) & = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = \frac{1}{5}z \ \text{ et } \ y = -z \} \\
& = \{ \begin{pmatrix} \frac{1}{5}z \\ -z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \\
& = \{ z \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \ = \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{E_{12}(M_1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right)}$$

b) Déterminons $E_1(M_2)$.

$$\begin{aligned}
M_2X = 1X & \Longleftrightarrow (M_2 - I)X = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} & & 0 & = & 0 \\ x & + & z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow \left\{ \ x \ = \ -z \right.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
E_1(M_2) & = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \} \\
& = \{ \begin{pmatrix} -z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \} \\
& = \{ y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \} \\
& = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{E_1(M_2) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

c) Déterminons $E_2(M_3)$.

$$\begin{aligned}
M_3X = 2X &\Leftrightarrow (M_3 - 2I)X = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & + & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \; x - y + z = 0 \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \; x = y - z \right.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
E_2(M_3) &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y - z\} \\
&= \{\begin{pmatrix} y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{E_2(M_3) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$$

d) (i) Déterminons tout d'abord $E_2(M_4)$.

$$\begin{aligned}
M_4X = 2X &\Leftrightarrow (M_4 - 2I)\,X = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & + & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\underset{L_3 \leftarrow 3L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow 3L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ & - & 4\,y & + & 4\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3\,x & + & y & = & z \\ & & y & = & z \end{array} \right. \\
&\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcl} 3\,x & = & 0 \\ y & = & z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
E_2(M_4) &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 0 \text{ et } y = z\} \\
&= \{\begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

(ii) Déterminons maintenant $E_4(M_4)$.

$$\begin{array}{rcl}
M_4X = 4X & \Leftrightarrow & (M_4 - 4I)\ X = 0 \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & & & - & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & - & 2\,y & & & = & 0 \\ & - & 2\,y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & z \\ & & y & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl}
E_4(M_4) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \ \text{ et } \ y = 0 \} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \ = \ \{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \ = \ \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_4(M_4) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

(iii) Déterminons enfin $E_6(M_4)$.

$$\begin{array}{rcl}
M_4X = 6X & \Leftrightarrow & (M_4 - 6I)\ X = 0 \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2\,x & - & 2\,y & - & 2\,z & = & 0 \\ x & - & y & - & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\Longleftrightarrow}} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & - & 4\,z & = & 0 \\ & & & - & 4\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & - & z & = & -y \\ & & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \overset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -x & & & = & -y \\ & & z & = & 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl}
E_6(M_4) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y \ \text{ et } \ z = 0 \} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \} \ = \ \{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \} \ = \ \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_6(M_4) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

e) Déterminons $E_2(M_5)$.

$$\begin{array}{rcl}
M_5X = 2X & \Longleftrightarrow & (M_5 - 2I)\ X = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & & & & & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_2 \leftrightarrow L_2 - L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & -z \\ & & y & = & z \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & 0 \\ & & y & = & z \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(M_5) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid M_5X = 2X \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x = 0 \ \text{ et } \ y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

f) (i) Déterminons tout d'abord $E_0(M_6)$.

$$\begin{array}{rcl}
M_6X = 0X & \Leftrightarrow & M_6X = 0 \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & = & -y & - & z \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl}
E_0(M_6) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y - z \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
& = & \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
& = & \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_0(M_6) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

(ii) Déterminons maintenant $E_3(M_6)$.

$$\begin{array}{rcl}
M_6X = 3X & \Leftrightarrow & (M_6 - 3I)\ X = 0 \\
& \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & - & 2\,y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & - & 2\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_1}}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 3\,y & + & 3\,z & = & 0 \\ & & 3\,y & - & 3\,z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2\,x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\,x & + & y & = & -z \\ & & y & = & z \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcl} -2\,x & & & = & -2\,z \\ & & y & = & z \end{array} \right.
\end{array}$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl}
E_3(M_6) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \ \text{ et } \ y = z \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_3(M_6) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□