Suites implicites

Exercice 1. (★★)
On définit sur $\mathbb{R}^{+*}$ la fonction f par : $f(x) = x + \ln(x)$.

a. Dresser le tableau de variations de f.

b. Montrer que l'équation $f(x) = n$ a une unique solution dans $\mathbb{R}^{+*}$.
On la note u_n.

c. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 2. (★★)
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x\ln(x) - 1$ si $x > 0$ et $f(0) = -1$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. Calculer la limite de f en $+\infty$.

3. Justifier que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis calculer $f'(x)$.

4. Établir le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}^+$.
On note u_n cette solution. Justifier que $u_n > 1$.

6. On note g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

  a) Justifier que g est une bijection de $[1, +\infty[$ dans un intervalle J à préciser.

  b) Donner le tableau de variations complet de la réciproque g^{-1} sur J.

  c) Exprimez u_n à l'aide de g^{-1}.
  En déduire la monotonie de la suite (u_n) et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 3. (★★)
On considère les fonctions $f_n : x \mapsto x^n + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$.

b. Démontrer que, pour tout $n > 0$: $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$.
En déduire que : $\forall n > 0,\ x_n < x_{n+1}$.

c. Démontrer que (x_n) converge et que sa limite ℓ est telle que $0 < \ell \leqslant 1$.

d. Démontrer que : $\forall n > 0,\ x_n \leqslant \ell$.

e. En procédant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

Exercice 4 (★★)*(d'après* `EDHEC 2008`*)*
Pour tout entier naturel n non nul, on considère $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^x} + nx$. On appelle $(\mathscr{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) ***a.*** Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.

  b. En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) ***a.*** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$.

  b. Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n, de $(\mathscr{C}_n)$.

  c. Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ en A_1 puis tracer la droite (T_1) ainsi que l'allure de la courbe $(\mathscr{C}_1)$.

3) ***a.*** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.

  b. Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.

  c. En déduire la limite de la suite (u_n).

  d. En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

  e. En déduire la limite de nu_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 5. (★★)
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n par : $f_n(x) = x^5 + n \times x - 1$.

a. Faire l'étude de la fonction f_n.

b. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe une unique solution à l'équation $f_n(x) = 0$. On la notera u_n.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Exercice 6. (★★★)
Pour tout entier n positif, on définit sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f_n(x) \ = \ \mathrm{e}^x + nx^2 - 3$$

1. a) Montrer que f_n est continue et dérivable sur son ensemble de définition. Dresser son tableau de variations.

b) Donner l'équation de la tangente de f_n en 1.

c) Tracer dans un même repère les courbes de f_0, f_1 et f_2.

d) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a exactement une solution positive, notée u_n.

e) Préciser la valeur de u_0. Dans la suite on supposera que $n \geqslant 1$.

f) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in]0, 1[$.

2. Écrire une fonction Scilab qui prend un entier n et qui calcule une valeur approchée de u_n à $0,001$ près par la méthode de dichotomie.

3. a) Montrer que : $\forall x \in]0, 1[,\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$.

b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis le sens de variation de la suite (u_n).

c) Montrer que (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

d) On suppose dans cette question que $\ell > 0$.
Calculer la limite de $\mathrm{e}^{u_n} + n\, u_n^2 - 3$ et en déduire une contradiction.

e) Donner enfin la valeur de ℓ.

f) Montrer que $\sqrt{\dfrac{n}{2}}\, u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7. (★★★) *(d'après* `ESSEC 1995`*)*
Dans tout cet exercice, n est un entier naturel non nul, et on se propose d'étudier les racines positives de l'équation suivante :

$$(E_n) : \quad \mathrm{e}^x = x^n$$

Pour ce faire, on introduit la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = 1 - x^n\, \mathrm{e}^{-x}$$

1. **Étude des cas $n = 1$ et $n = 2$.**

a) Étudier les variations de f_1 et f_2.
On dressera leur tableau de variation en précisant les limites.

b) Représenter graphiquement f_1 et f_2.

c) Étudier l'existence de racines positives pour les équations (E_1) et (E_2).

2. **Étude des racines positives de (E_3).**

a) Étudier et représenter sur $[0, +\infty[$ la fonction f_3. En déduire que l'équation (E_3) admet deux racines positives u et v telles que $1 < u < v$, et encadrer chacune d'elle par deux entiers consécutifs.
On donne les valeurs approchées $e^2 \approx 7,4$, $e^3 \approx 20,1$, $e^4 \approx 54,6$ et $e^5 \approx 148,4$.

b) Soit (y_n) une suite telle que $y_0 > u$, et vérifiant la relation de récurrence $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$.
— Montrer que si $u < y_0 \leqslant v$, alors pour tout entier naturel n on a $u < y_n \leqslant v$.
— Montrer que si $v \leqslant y_0$, alors pour tout entier naturel n on a $v \leqslant y_n$.
— Étudier le signe de $y_{n+1} - y_n$ en fonction du signe de $y_n - y_{n-1}$.

c) En déduire, selon la position de y_0 par rapport à v, le sens de variation de (y_n).
Étudier enfin la convergence de la suite (y_n) et préciser sa limite.

d) On choisit désormais $y_0 = 4$.
Écrire une fonction Scilab qui prend un entier n et qui calcule y_n.
La première ligne de cette fonction s'écrira `function y = suite(n)`.

3. **Étude des racines positives de (E_n) pour $n \geqslant 3$.**

a) Étudier sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n.
Montrer que l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n, avec $1 < u_n < v_n$.

b) Pour $n \geqslant 4$, déterminer le signe de $f_n(u_{n-1})$.
Déduire des variations de la fonction f_n le sens de variation de la suite (u_n).
Montrer que (u_n) converge.

c) Montrer que $u_n = \exp\left(\dfrac{u_n}{n}\right)$ et en déduire la limite ℓ de la suite (u_n).
Montrer que $n(u_n - \ell)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

d) Déterminer pour $n \geqslant 4$ le signe de $f_{n-1}(v_n)$. Déduire des variations de la fonction f_{n-1} le sens de variation de la suite (v_n) puis étudier la limite de celle-ci.

e) Pour tout réel $x > 1$, on pose $g(x) = x - \ln(x)$.
Montrer que g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans $]1, +\infty[$.
Établir que $g\left(\dfrac{v_n}{n}\right) = \ln(n)$. Montrer à l'aide de la bijection réciproque g^{-1} que (v_n) tend vers $+\infty$, et enfin que $\dfrac{v_n}{n\ln(n)}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.