Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Avant d'entamer ce chapitre, il faut être à l'aise avec la notion de v.a.r. discrètes (*cf* chapitre précédent). Si X est une v.a.r. discrète, on rappelle que $X(\Omega)$ peut se noter sous la forme :

$$X(\Omega) \ = \ \{x_i \mid i \in I\} \quad \text{où } I \subset \mathbb{N}$$

(par définition, $X(\Omega)$ est une partie au plus dénombrable de $\mathbb{R}$)

I. Couple de v.a.r. discrètes : définitions de base

I.1. Notion de couple de v.a.r. discrètes

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes.

- On appelle couple de v.a.r. (X, Y) l'application définie par :

$$\begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R}^2 \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array}$$

I.2. Loi d'un couple de v.a.r. discrètes, ou loi conjointe

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) deux v.a.r. discrètes.

- On appelle **loi de probabilité du couple** (X, Y) ou **loi conjointe des v.a.r.** X **et** Y et on note $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ l'application :

$$\boxed{\begin{array}{ccccccl} \mathbb{P}_{(X,Y)} & : & X(\Omega) & \times & Y(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ & & (x & , & y) & \mapsto & \mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) \ = \ \mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y]) \end{array}}$$

- Autrement dit, la loi du couple (X, Y) est la donnée de l'ensemble des valeurs $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ pour x décrivant $X(\Omega)$ et y décrivant $Y(\Omega)$ (*i.e.* (x, y) décrivant $X(\Omega) \times Y(\Omega)$).

I.3. Système complet d'événements associé à un couple de v.a.r. discrètes

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

- On appelle **le système complet d'événements associé au couple** (X, Y) la famille :

$$\big([X = x] \cap [Y = y] \big)_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$$

- Cette famille est un système complet d'événements. En particulier :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \ &= \ \sum_{x \in X(\Omega)} \Big(\sum_{y \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \Big) \\ &= \ \sum_{y \in X(\Omega)} \Big(\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \Big) \ = \ 1 \end{aligned}$$

II. Lois associées à un couple de v.a.r. discrètes

II.1. Lois conditionnelles

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

1) • Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([Y=y]) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle de X sachant (que l'événement)** $[Y=y]$ (est réalisé) l'application :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{P}_{[Y=y]}([X=x]) = \dfrac{\mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y])}{\mathbb{P}([Y=y])} \end{array}$$

• Autrement dit, la loi conditionnelle de X sachant $[Y=y]$ est la donnée des réels :

$$\mathbb{P}_{[Y=y]}([X=x]) \text{ pour tout } x \in X(\Omega)$$

2) • Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([X=x]) \neq 0$, on appelle **loi conditionnelle de Y sachant (que l'événement)** $[X=x]$ (est réalisé) l'application :

$$\begin{array}{rcl} Y(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \mathbb{P}_{[X=x]}([Y=y]) = \dfrac{\mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y])}{\mathbb{P}([X=x])} \end{array}$$

• Autrement dit, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=x]$ est la donnée des réels :

$$\mathbb{P}_{[X=x]}([Y=y]) \text{ pour tout } y \in Y(\Omega)$$

II.2. Lois marginales

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

- On appelle 1ère **loi marginale du couple** (X, Y) la loi de la v.a.r. X.
- On appelle 2ème **loi marginale du couple** (X, Y) la loi de la v.a.r. Y.

Théorème 1. *(Détermination en pratique des lois marginales)*

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

1) *Loi de X via la loi du couple (X, Y)*

$$\boxed{\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}([X=x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X=x] \cap [Y=y])}$$

Loi de X via les lois conditionnelles de X sachant $[Y=y]$ pour tout $y \in Y(\Omega)$. On suppose : $\forall y \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}([Y=y]) \neq 0$. Alors :

$$\boxed{\mathbb{P}([X=x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y=y]) \, \mathbb{P}_{[Y=y]}([X=x])}$$

2) *Loi de Y via la loi du couple (X, Y)*

$$\boxed{\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([Y=y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([Y=y] \cap [X=x])}$$

Loi de Y via les lois conditionnelles de Y sachant $[X=x]$ pour tout $x \in X(\Omega)$. On suppose : $\forall x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}([X=x]) \neq 0$. Alors :

$$\boxed{\mathbb{P}([Y=y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=x]) \, \mathbb{P}_{[X=x]}([Y=y])}$$

III. Indépendance de variables aléatoires discrètes

III.1. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes.

- Les **v.a.r. X et Y sont indépendantes** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) si :

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$$

- Autrement dit, les v.a.r. X et Y sont indépendantes si pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$, les événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ sont indépendants.

MÉTHODO **Démontrer que deux v.a.r. discrètes ne sont pas indépendantes**

- Pour démontrer que X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que :

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) \ \neq\ \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y = y])$$

- Souvent, on essaiera de trouver $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$ tels que :

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}([X = x]) \neq 0,\ \mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$$

Remarque

Soient X et Y sont deux v.a.r. discrètes indépendantes.

Alors, tout événement ne dépendant que de la variable X est indépendant de tout événement ne dépendant que de la variable Y.
Plus précisément, pour tout $x \in X(\Omega)$, pour tout $y \in Y(\Omega)$:

- $\mathbb{P}\left([X = x] \cap [Y \leqslant y]\right) = \mathbb{P}([X = x]) \times \mathbb{P}([Y \leqslant y])$,
- $\mathbb{P}\left([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant y]\right) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) \times \mathbb{P}([Y \leqslant y])$,
- $\mathbb{P}\left([X \leqslant x] \cap [Y > y]\right) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) \times \mathbb{P}([Y > y])$,
- $\mathbb{P}\left([X > x] \cap [Y < y])\right) = \mathbb{P}([X > x] \times \mathbb{P}([Y < y])$,
- $\dots$

Théorème 2.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes.

1) *Supposons que : $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}([X = x]) \neq 0$. Alors :*

$$\boxed{\begin{array}{rl} & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{[X=x]}([Y = y]) \ = \ \mathbb{P}([Y = y]) \end{array}}$$

2) *Supposons que : $\forall y \in X(\Omega),\ \mathbb{P}([Y = y]) \neq 0$. Alors :*

$$\boxed{\begin{array}{rl} & X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ \Leftrightarrow & \forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega),\ \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x]) \ = \ \mathbb{P}([X = x]) \end{array}}$$

III.2. Indépendance mutuelle de variables aléatoires discrètes

Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ (avec $n \geqslant 2$) des v.a.r. discrètes.

- Les v.a.r. $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont **(mutuellement) indépendantes** (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \\ \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i = x_i]\right) \ = \ \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i = x_i]) \end{array}}$$

- Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de var aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables (mutuellement) indépendantes (pour la probabilité $\mathbb{P}$) lorsque :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \text{les variables } X_1, X_2, \dots, X_n \text{ sont mutuellement indépendantes}$$

Remarque
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes.
Alors toute famille de n événements dont chacun est construit à l'aide d'une v.a.r. X_i est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Plus précisément, pour tout $x_1 \in X_1(\Omega)$, $\ldots$, $x_n \in X_n(\Omega)$:

- les événements $[X_1 = x_1], [X_2 \leqslant x_2], \ldots [X_n \leqslant x_n]$ sont mutuellement indépendants,
- les événements $[X_1 \leqslant x_1], [X_2 > x_2], \ldots [X_n \leqslant x_n]$ sont mutuellement indépendants,
- $\ldots$

Théorème 3 (Lemme des coalitions)**.**
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
Soient X et Y deux v.a.r. discrètes.
Soient $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $g : Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ deux fonctions.

- *Cas de 2 v.a.r.*

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \ \Rightarrow\ f(X) \text{ et } g(Y) \text{ sont indépendantes}}$$

- *Généralisation à n v.a.r.*
  Soient X_1, $\ldots$, X_n des v.a.r. discrètes.
  Soient $f_1 : X_1(\Omega) \to \mathbb{R}$, $\ldots$, $f_n : X_n(\Omega) \to \mathbb{R}$ des fonctions.

$X_1, \ldots, X_n$ v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes	$\Rightarrow$	*$f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes*

$X_1, \ldots, X_n$ v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes	$\Rightarrow$	*Toute v.a.r. s'exprimant en fonction des v.a.r. $X_1, \ldots, X_p$ est indépendante de toute v.a.r. s'exprimant en fonction des v.a.r. $X_{p+1}, \ldots, X_n$ (pour $p \in [\![2, n-1]\!]$)*

Exemple

- Soient $X_1, \ldots, X_5$ des v.a.r. discrètes mutuellement indépendantes. Alors :
  × les v.a.r. X_1, ${X_2}^2$, $2\,X_3$, $\mathrm{e}^{X_4}-1$ et $|X_5|$ sont mutuellement indépendantes.
  × les v.a.r. $2\,X_1X_3 - X_5$ et ${X_2}^2$ sont indépendantes.
  × les v.a.r. $\min(X_1, X_2)$ et $\max(X_3, X_4, X_5)$ sont indépendantes.
- Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. mutuellement indépendantes.
  Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et X_{n+1} sont indépendantes.
- Si X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes, alors, en procédant par l'absurde, on démontre que X et Y ne le sont pas non plus.

IV. Opérations sur les v.a.r. discrètes

Dans cette section, on étudie des v.a.r. du type $Z = g(X,Y)$ où (X,Y) est un couple de v.a.r. discrètes et $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$.

IV.1. Cas général : loi de $g(X,Y)$

Théorème 4.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes.

Soit $g : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$.

- *Z est un v.a.r. discrète.*
- *L'ensemble des valeurs prises par $Z = g(X,Y)$ est donnée par :*

$$\begin{array}{rcl} Z(\Omega) & = & \{g(X(\omega), Y(\omega)) \mid \omega \in \Omega\} \\ & \subseteq & \{g(x,y) \mid x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega)\} \end{array}$$

- *La loi de $Z = g(X,Y)$ est donnée par :*

$$\boxed{\forall z \in Z(\Omega),\ \mathbb{P}(Z = z) \ = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ z = g(x,y)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])}$$

Démonstration.
Il suffit de remarquer que :

$$\forall z \in Z(\Omega),\ [Z = z] \ = \bigcup_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ z = g(x,y)}} [X = x] \cap [Y = y]$$

et que $([X = x] \cap [Y = y])_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles (car c'est un sce). □

IV.2. Cas particuliers (opérations classiques)

IV.2.a) Loi de la somme de deux v.a.r. discrètes

Théorème 5.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X,Y) un couple de v.a.r. discrètes.

- *$X + Y$ est une v.a.r. discrète.*
- *On détermine la loi de $X + Y$ à l'aide d'une des deux rédactions suivantes.*

  1) La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un sce.
  Soit $z \in (X+Y)(\Omega)$. D'après la formule des probabiltés totales :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X+Y=z]) & = & \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [X+Y = z]) \\ & = & \displaystyle\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ tq\ z - x \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = z - x]) \end{array}}$$

  2) La famille $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ est un sce.
  Soit $z \in (X+Y)(\Omega)$. D'après la formule des probabiltés totales :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}([X+Y=z]) & = & \displaystyle\sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y] \cap [X+Y = z]) \\ & = & \displaystyle\sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ tq\ z - y \in X(\Omega)}} \mathbb{P}([Y = y] \cap [X = z - y]) \end{array}}$$

Le choix de l'introduction du sce $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ ou $([X = x])_{x \in Y(\Omega)}$ est guidé par les lois de X et Y. On optera toujours pour le sce le plus simple.

MÉTHODO **Trouver les indices convenables lors de la détermination de la loi de $X+Y$**

Il est fréquent, lors de l'étape de restriction des indices de la somme de tomber sur une contrainte s'exprimant par deux inégalités :

$$a \leqslant i \leqslant b \ \ \texttt{ET} \ \ c \leqslant i \leqslant d \quad \text{où } (a,b,c,d) \in \left(\overline{\mathbb{R}}\right)^4$$

On pourra alors utiliser le résultat suivant :

$$\boxed{(a \leqslant i \leqslant b \ \ \texttt{ET} \ \ c \leqslant i \leqslant d) \quad \Leftrightarrow \quad \max(a,c) \leqslant i \leqslant \min(b,d)}$$

(à gauche c'est le plus grand élément qui contraint le plus, à droite c'est le plus petit élément qui contraint le plus)

Stabilité des lois classiques

Théorème 6.

1) **Stabilité des lois binomiales**

Soit $p \in \,]0,1[$ et soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- *$X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$*
- *X et Y indépendantes*

$\Rightarrow \quad X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m+n,p)$

2) **Stabilité des lois de Poisson**

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mu \in \mathbb{R}_+^*$.

- *$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$*
- *X et Y indépendantes*

$\Rightarrow \quad X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

Démonstration.

1) Comme $X(\Omega) = [\![0,m]\!]$ et $Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$, on a : $(X+Y)(\Omega) \subset [\![0,m+n]\!]$.
La famille $([X=i])_{i \in [\![0,m]\!]}$ est un sce.
Soit $k \in [\![0,m+n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X+Y=k]) \\
= \ & \sum_{i=0}^{m} \mathbb{P}([X=i] \cap [X+Y=k]) \\
= \ & \sum_{i=0}^{m} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=k-i]) \\
= \ & \sum_{i=0}^{m} \mathbb{P}([X=i]) \, \mathbb{P}([Y=k-i]) && \textit{(par indépendance)} \\
= \ & \sum_{\substack{i=0 \\ k-i \in [\![0,m]\!]}}^{m} \mathbb{P}([X=i]) \, \mathbb{P}([Y=k-i]) \\
& + \cancel{\sum_{\substack{i=0 \\ k-i \notin [\![0,m]\!]}}^{m} \mathbb{P}([X=i]) \, \mathbb{P}([Y=k-i])} && \textit{(car si } k-i \notin [\![0,n]\!], \\
& && [Y=k-i] = \varnothing \textit{)} \\
= \ & \sum_{\substack{i=0 \\ k-i \in [\![0,n]\!]}}^{m} \binom{m}{i} p^i \, (1-p)^{m-i} \, \binom{n}{k-i} p^{k-i} \, (1-p)^{n-k+i} \\
= \ & p^k \, (1-p)^{n+m-k} \sum_{\substack{i=0 \\ k-i \in [\![0,n]\!]}}^{m} \binom{m}{i} \binom{n}{k-i} \\
= \ & \binom{n+m}{k} \, p^k \, (1-p)^{n+m-k}
\end{aligned}$$

en utilisant la formule de Vandermonde.
Ainsi, $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m+n,p)$.

2) • Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on a : $(X+Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

• La famille $([X = i])_{i\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X+Y=k]) \\
= \ & \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \cap [X+Y=k]) \\
= \ & \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=k-i]) \\
= \ & \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i]) && \textit{(par indépendance de } X \textit{ et } Y\textit{)} \\
= \ & \sum_{\substack{i=0 \\ k-i \in Y(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i]) \\
& + \cancel{\sum_{\substack{i=0 \\ k-i \notin Y(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i])} && \textit{(car } [Y=k-i] = \varnothing \textit{ si } k-i \notin Y(\Omega)\textit{)} \\
= \ & \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i])
\end{aligned}$$

• La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} k-i \in Y(\Omega) = \mathbb{N} \\ i \in [\![0,+\infty[\![\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant k-i \\ 0 \leqslant i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i \leqslant k \\ 0 \leqslant i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ 0 \leqslant i \leqslant k\right.$$

• Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X+Y=k]) \\
= \ & \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}([X=i])\ \mathbb{P}([Y=k-i]) \\
= \ & \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!}\ \mathrm{e}^{-\lambda}\ \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}\ \mathrm{e}^{-\mu} && \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \textit{ et } Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)\textit{)} \\
= \ & \mathrm{e}^{-\lambda}\ \mathrm{e}^{-\mu} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!\,(k-i)!}\ \lambda^i\, \mu^{k-i} \\
= \ & \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\ \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!\,(k-i)!}\ \lambda^i\, \mu^{k-i} \\
= \ & \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\ \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\ \lambda^i\, \mu^{k-i} \\
= \ & \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\ \frac{1}{k!}\ (\lambda+\mu)^k && \textit{(d'après la formule du binôme de Newton)}
\end{aligned}$$

Finalement : $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$. □

Exercice
Soient $X_1, \dots, X_k$ des v.a.r. mutuellement indépendantes.
Déterminer la loi de $X_1 + \cdots + X_k$ lorsque :

(i) $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, …, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

(ii) $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$, …, $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n_k, p)$.

(iii) $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$, …, $X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k)$.

IV.2.b) Loi du produit de deux v.a.r. discrètes

Théorème 7.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

- *XY est une v.a.r. discrète.*
- *On détermine la loi de XY à l'aide d'une des deux rédactions suivantes.*

  1) *La famille $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$ est un sce.*
  Ainsi, d'après la formule des probabiltés totales :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall z \in (XY)(\Omega),\ \mathbb{P}([XY = z]) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [XY = z]) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [xY = z]) \end{aligned}}$$

  2) *La famille $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ est un sce.*
  Ainsi, d'après la formule des probabiltés totales :

$$\boxed{\begin{aligned} \forall z \in (XY)(\Omega),\ \mathbb{P}([XY = z]) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y] \cap [XY = z]) \\ &= \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y] \cap [yX = z]) \end{aligned}}$$

Le choix de l'introduction du sce $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$ ou $([X = x])_{x \in Y(\Omega)}$ est guidé par les lois de X et Y. On optera toujours pour le sce le plus simple.

IV.2.c) Loi d'un maximum de deux v.a.r. discrètes

Théorème 8.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes **indépendantes**.

On note F_X et F_Y les fonctions de répartition de ces v.a.r.

On note $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

Remarquons tout d'abord :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ [\max(X, Y) \leqslant t] \ = \ [X \leqslant t] \cap [Y \leqslant t]}$$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ [\min(X, Y) > t] \ = \ [X > t] \cap [Y > t]}$$

1) • *$U = \min(X, Y)$ est une v.a.r. discrète.*

• *La fonction de répartition de $U = \min(X, Y)$ vérifie :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_U(t) = 1 - \big(1 - F_X(t)\big)\ \big(1 - F_Y(t)\big)$$

2) • *$V = \max(X, Y)$ est une v.a.r. discrète.*

• *La fonction de répartition de $V = \max(X, Y)$ vérifie :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_V(t) = F_X(t)\ F_Y(t)$$

Exercice

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$ où p_1 et p_2 sont dans $]0, 1[$.

Démontrer que la v.a.r. $U = \min(X, Y)$ suit la loi $\mathcal{G}(1 - q_1\, q_2)$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([U > n]) &= \mathbb{P}([X > n] \cap [Y > n]) \\ &= \mathbb{P}([X > n])\ \mathbb{P}([Y > n]) && \textit{(par indépendance de } X \textit{ et } Y\textit{)} \\ &= q_1^n\ q_2^n \ = \ (q_1\, q_2)^n \end{aligned}$$

□

V. Calculs d'espérance

V.1. Espérance de $Z = g(X,Y)$

Théorème 9 (Théorème de transfert).

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X,Y) un couple de v.a.r. discrètes.

Alors, sous réserve de convergence absolue :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X,Y)) &= \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x,y)\ \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]) \\ &= \sum_{x\in X(\Omega)} \Big(\sum_{y\in Y(\Omega)} g(x,y)\ \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]) \Big) \\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)} \Big(\sum_{x\in X(\Omega)} g(x,y)\ \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]) \Big)\end{aligned}$$

Précisons l'expression « sous réserve de convergence absolue ».

1) **Si X et Y sont finies**

Notons alors $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$.
La v.a.r. $g(X,Y)$ admet (sans autre hypothèse !) une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X,Y)) &= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j]) \Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j]) \Big)\end{aligned}$$

2) **Si X est finie et Y infinie**

- *Notons alors $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$.*
La v.a.r. $g(X,Y)$ admet une espérance ssi pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, la série $\sum\limits_{j\geqslant 0} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])$ est absolument convergente.

  Dans ce cas :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X,Y)) &= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=0}^{+\infty} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j]) \Big) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \Big(\sum_{i=1}^{m} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j]) \Big)\end{aligned}$$

- *Le cas X infinie et Y finie est similaire.*

3) **Si X est infinie et Y infinie**

Notons alors $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j \mid j \in \mathbb{N}\}$.
La v.a.r. $g(X,Y)$ admet une espérance ssi :

a) *pour tout $i \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{j\geqslant 0} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j])$ est absolument convergente.*

b) *la série $\sum\limits_{i\geqslant 0} \Big(\sum\limits_{j=0}^{+\infty} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j]) \Big)$ est absolument convergente.*

Dans ce cas :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(g(X,Y)) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \Big(\sum_{j=0}^{+\infty} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j]) \Big) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \Big(\sum_{i=0}^{+\infty} g(x_i,y_j)\ \mathbb{P}([X=x_i]\cap[Y=y_j]) \Big)\end{aligned}$$

Exercice
Considérons deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est définie par :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X=i] \cap [Y=j]) = \frac{i+j}{\mathrm{e}\ 2^{i+j}\ i!\ j!}$$

Calculer l'espérance de $Z = 2^{X+Y}$.

Démonstration.
(il s'agit du cas 3) précédent)
Ici, $Z = 2^{X+Y} = g(X,Y)$ pour $g : (x,y) \mapsto 2^{x+y}$.

a) Soit $i \in \mathbb{N}$. On remarque que :

$$g(i,j)\ \mathbb{P}([X=i] \cap [Y=j]) \ = \ \cancel{2^{i+j}} \frac{i+j}{\mathrm{e}\ \cancel{2^{i+j}}\ i!\ j!} \ = \ \frac{i+j}{\mathrm{e}\ i!\ j!}$$

La série $\sum\limits_j \frac{i+j}{\mathrm{e}\ i!\ j!}$ est à termes positifs. Démontrer qu'elle est absolument convergente revient donc à démontrer qu'elle est convergente.
Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N} \frac{(i+j)}{\mathrm{e}\ i!\, j!} \ &= \ \sum_{j=0}^{N} \left(\frac{i}{\mathrm{e}\ i!}\ \frac{1}{j!} + \frac{1}{\mathrm{e}\ i!}\ \frac{j}{j!} \right) \\ &= \ \frac{i}{\mathrm{e}\ i!} \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!} + \frac{1}{\mathrm{e}\ i!} \sum_{j=0}^{N} \frac{j}{j!} \end{aligned}$$

Or $\sum\limits_{j=0}^{N} \frac{1}{j!} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$ et $\sum\limits_{j=0}^{N} \frac{j}{j!} = \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{j}{j!} = \sum\limits_{j=1}^{N} \frac{1}{(j-1)!} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$.
Ainsi la série $\sum\limits_j \frac{i+j}{\mathrm{e}\ i!\ j!}$ est convergente de somme :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{\mathrm{e}\ i!\ j!} \ = \ \frac{i}{\cancel{\mathrm{e}}\ i!}\ \cancel{\mathrm{e}} + \frac{1}{\cancel{\mathrm{e}}\ i!}\ \cancel{\mathrm{e}} \ = \ \frac{i}{i!} + \frac{1}{i!}$$

b) La série $\sum\limits_i \frac{i}{i!} + \frac{1}{i!}$ étant à termes positifs, démontrer qu'elle est absolument convergente revient donc à démontrer qu'elle est convergente. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{i=0}^{N} \left(\frac{i}{i!} + \frac{1}{i!} \right) \ = \ \sum_{i=0}^{N} \frac{i}{i!} + \sum_{i=0}^{N} \frac{i}{i!}$$

Or, comme vu précédemment : $\sum\limits_{i=0}^{N} \frac{i}{i!} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$ et $\sum\limits_{i=0}^{N} \frac{1}{i!} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1$.

Ainsi la série $\sum\limits_i \left(\frac{i}{i!} + \frac{1}{i!} \right)$ est convergente et on peut alors conclure :

$$\mathbb{E}\left(2^{X+Y}\right) \ = \ \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{i+j}{\mathrm{e}\ i!\ j!} \right) \ = \ \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{i}{i!} + \frac{1}{i!} \right) \ = \ 2\ \mathrm{e}$$

□

V.2. Espérance d'une somme

Théorème 10 (Linéarité de l'espérance)**.**
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.
Soient $X_1, \dots, X_n$ *des v.a.r. discrètes admettant une espérance.*

1) *Alors* $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n$ *admet une espérance.*

2) *De plus :*

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i\right) \ = \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, \mathbb{E}(X_i)}$$

En particulier, lorsque pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i = 1$, *on obtient :*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$$

MÉTHODO **Démontrer qu'une v.a.r. admet une espérance**

On retiendra que si une v.a.r. s'écrit comme combinaison linéaire (resp. somme) de v.a.r. qui admettent une espérance, alors cette v.a.r. admet une espérance.

V.3. Espérance d'un produit

Théorème 11.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2.

1) Alors XY admet une espérance.

2) De plus :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \left(\sum_{y\in Y(\Omega)} xy\ \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]) \right) \\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)} \left(\sum_{x\in X(\Omega)} xy\ \mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y]) \right)\end{aligned}$$

Théorème 12.

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes.

On suppose que :
- *X et Y admettent une espérance.*
- *X et Y sont indépendantes.*

Alors XY admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$$

Ce théorème n'énonce pas un équivalence. Autrement dit, il existe des variables aléatoires X et Y :

× qui ne sont pas indépendantes,

× qui vérifient $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

Exemple

On reprend l'exemple issu de `EML 2007`.

- U v.a.r. telle que :
  × $U(\Omega) = \{-1, 1\}$.
  × $\mathbb{P}([U=1]) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}([U=-1]) = \frac{1}{2}$.
- Y v.a.r. telle que :
  × $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
  × $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y=n]) = \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\ \mathrm{e}^{-n}$.
- On considère enfin $T = U \times Y$.

a) Les v.a.r. Y et $T = UY$ **ne sont pas indépendantes**. En effet :

$$\mathbb{P}([Y=0]\cap[UY=1]) \ = \ \mathbb{P}([U=0]\cap[0=1]) \ = \ 0$$

puisque $[0=1] = \varnothing$. Or : $\mathbb{P}([Y=0]) \neq 0$ et $\mathbb{P}([UY=1]) \neq 0$.

b)
- $YT = Y\,UY = UY^2$
  Or U et Y sont indépendantes.
  Donc, d'après le lemme des coalitions, U et Y^2 sont indépendantes. Ces deux v.a.r. admettant une espérance (Y^2 admet une espérance car Y admet une variance - déjà démontré). Ainsi :

$$\mathbb{E}(YT) \ = \ \mathbb{E}(UY^2) \ = \ \mathbb{E}(U)\ \mathbb{E}(Y^2) \ = \ 0 \times \mathbb{E}(Y^2) \ = \ 0$$

- De même : $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(U\,Y) = \mathbb{E}(U)\,\mathbb{E}(Y) = 0 \times \mathbb{E}(Y) = 0$

Les v.a.r. X et Y ne sont pas indépendantes et pourtant :

$$\mathbb{E}(YT) \ = \ 0 \ = \ \mathbb{E}(Y)\ \mathbb{E}(T)$$

VI. Calculs de variance et covariance

VI.1. Covariance

VI.1.a) Définition

Définition

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

On suppose que X et Y admettent chacun un moment d'ordre 2.

La **covariance** de X et Y est définie par :

$$\boxed{\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\right)}$$

En particulier :

$$\boxed{\text{Cov}(X, X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{V}(X)}$$

VI.2. Formule de Kœnig-Huygens

Théorème 13.

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes.

On suppose que X et Y admettent chacun un moment d'ordre 2.

Alors : $\boxed{\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)}$

Démonstration.

- Par définition :

$$\begin{aligned} & \text{Cov}(X, Y) \\ = \ & \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))\big) \\ = \ & \mathbb{E}\big(XY - \mathbb{E}(Y)X - \mathbb{E}(X)Y + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\big) \\ = \ & \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \quad \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ = \ & \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

- $\text{Cov}(X, X) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))\big) = \mathbb{E}\big((X - \mathbb{E}(X))^2\big) = \mathbb{V}(X)$ □

VI.3. Propriétés de la covariance

Théorème 14.

Soient X, Y, X_i, Y_i des v.a.r. discrètes.

Supposons que ces v.a.r. admettent chacune un moment d'ordre 2.

L'opérateur de covariance vérifie les propriétés suivantes.

1) $\boxed{\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)}$

(propriété de symétrie)

2) $\boxed{\forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \text{Cov}(\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y) = \lambda_1 \text{Cov}(X_1, Y) + \lambda_2 \text{Cov}(X_2, Y)}$

(linéarité à gauche)

3) $\boxed{\forall (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2,\ \text{Cov}(X, \mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2) = \mu_1 \text{Cov}(X, Y_1) + \mu_2 \text{Cov}(X, Y_2)}$

(linéarité à droite)

4) $\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \text{Cov}(X, a) = \text{Cov}(a, X) = 0}$

VI.4. Covariance et indépendance

Théorème 15.

Soient X et Y deux v.a.r. (discrètes).

On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2.

$$\boxed{X \textit{ et } Y \textit{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \text{Cov}(X, Y) = 0}$$

Remarque

- Généralement c'est la contraposée de cet énoncé qui est utilisée. Elle permet de démontrer que deux v.a.r. X et Y ne sont pas indépendantes.

$$\boxed{\text{Cov}(X, Y) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$$

> Ce résultat `N'EST PAS` une équivalence. Autrement dit, il existe des variables aléatoires X et Y :
>
> × qui ne sont pas indépendantes,
>
> × qui vérifient $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

VI.5. Variance d'une somme

Théorème 16.

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes.

On suppose que X et Y admettent chacune un moment d'ordre 2.
(i.e. X et Y admettent une variance)

1) *Alors $X + Y$ admet une variance.*

2) $\boxed{\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + 2\,\text{Cov}(X, Y) + \mathbb{V}(Y)}$

3) $\boxed{X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)}$

4) **Généralisation**
De manière générale, si $X_1, \dots, X_n$ admettent une variance alors la v.a.r. $X_1 + \dots + X_n$ admet une variance. De plus :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + \sum_{\substack{1 \leqslant i,j \leqslant n \\ i \neq j}} \text{Cov}(X_i, X_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \text{Cov}(X_i, X_j) \end{aligned}}$$

Si on sait de plus que $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors :

$$\mathbb{V}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_n)$$

VI.6. Cœfficient de corrélation linéaire

Définition

Soient X et Y deux v.a.r. discrètes.

On suppose que X et Y admettent des variances non nulles.

Le **cœfficient de corrélation linéaire de X et de Y** est :

$$\boxed{\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\ \sigma(Y)}}$$

Théorème 17.

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. discrètes.

On suppose que X et Y admettent des variances non nulles.

1) *Inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\boxed{|\ \text{Cov}(X, Y)\ | \ \leqslant \ \sigma(X)\ \sigma(Y)}$$

On en déduit (reformulation) : $\boxed{|\rho(X, Y)| \leqslant 1}$

2) • $\boxed{\rho(X, Y) \ = \ 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{une des v.a.r. est une fonction affine strictement croissante de l'autre v.a.r.}}$

• *Autrement dit, $\rho(X, Y) = 1$ ssi il existe $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$X = a\,Y + b \qquad \texttt{OU} \qquad Y = a\,X + b$$

3) • $\boxed{\rho(X, Y) \ = \ -1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{une des v.a.r. est une fonction affine strictement décroissante de l'autre v.a.r.}}$

• *Autrement dit, $\rho(X, Y) = -1$ ssi il existe $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$X = -a\,Y + b \qquad \texttt{OU} \qquad Y = -a\,X + b$$

Remarque

- Les valeurs intermédiaires entre -1 et 1 renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux v.a.r. Plus le cœfficient est proche des valeurs extrêmes -1 et 1, plus la corrélation entre les v.a.r. est forte.
- Deux v.a.r. dont la covariance est nulle (et donc le coefficient de corrélation linéaire est nul) sont dites non corrélées.

Démonstration.

1) • Considérons la fonction $f : t \mapsto \mathbb{V}(X+tY)$.
Remarquons tout d'abord que cette fonction est bien définie. En effet, la v.a.r. $X+tY$ admet une variance en tant que somme de v.a.r. qui admettent une variance.

• Par ailleurs :

$$\begin{array}{rcll}
f(t) & = & \mathbb{V}(X+tY) \ = \ \mathrm{Cov}(X+tY, X+tY) & \\
& = & \mathrm{Cov}(X, X+tY) + \mathrm{Cov}(tY, X+tY) & \textit{(par linéarité à gauche)} \\
& = & \mathrm{Cov}(X,X) \ + \ \mathrm{Cov}(X,tY) \ + \ \mathrm{Cov}(tY,tY) \ + \ \mathrm{Cov}(tY,X) & \textit{(par linéarité à droite)} \\
& = & \mathrm{Cov}(X,X) \ + \ t\ \mathrm{Cov}(X,Y) \ + \ t\ \mathrm{Cov}(Y,tY) \ + \ t\ \mathrm{Cov}(Y,X) & \\
& = & \mathrm{Cov}(X,X) \ + \ 2t\ \mathrm{Cov}(X,Y) \ + \ t^2\ \mathrm{Cov}(Y,Y) & \\
& = & \mathbb{V}(X) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)\ t + \mathbb{V}(Y)t^2 &
\end{array}$$

Ainsi, la fonction f est polynomiale de degré 2.

• Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = \mathbb{V}(X+tY) \geqslant 0$$

Cette fonction polynomiale étant de signe constant, on en déduit que le discriminant du polynôme associé est de signe négatif. Or :

$$\Delta \ = \ (2\mathrm{Cov}(X,Y))^2 - 4\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) \ = \ 4(\mathrm{Cov}(X,Y))^2 - 4\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)$$

Et enfin :

$$\begin{array}{rcll}
\Delta \leqslant 0 & \Leftrightarrow & \cancel{4}\ (\mathrm{Cov}(X,Y))^2 \leqslant \cancel{4}\ \mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y) & \\
& \Leftrightarrow & \sqrt{(\mathrm{Cov}(X,Y))^2} \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)} & \textit{(par stricte croissance de } \sqrt{\cdot}\textit{)} \\
& \Leftrightarrow & |\ \mathrm{Cov}(X,Y)\ | \leqslant \sqrt{\mathbb{V}(X)}\sqrt{\mathbb{V}(Y)} & \\
& \Leftrightarrow & |\ \mathrm{Cov}(X,Y)\ | \leqslant \sigma(X)\ \sigma(Y) & \\
& \Leftrightarrow & \dfrac{|\ \mathrm{Cov}(X,Y)\ |}{\sigma(X)\ \sigma(Y)} \leqslant 1 & \\
& \Leftrightarrow & |\ \rho(X,Y)\ | \leqslant 1 &
\end{array}$$

□

VII. BONUS : HEC 2010

Exercice

Soit p un réel de $]0,1[$ et $q=1-p$. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes de même loi géométrique de paramètre p (d'espérance $\frac{1}{p}$).

On pose : $Y = X_1 - X_2$, $T = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.
On rappelle que $T+Z = X_1 + X_2$ et $T - Z = |X_1 - X_2| = |Y|$.

1. a) Rappeler sans démonstration les valeurs respectives de $\mathbb{V}(X_1)$ et de $\mathbb{P}([X_1 \leqslant k])$, pour tout k de $X_1(\Omega)$.

b) Calculer $\mathbb{E}(X_1+X_2)$, $\mathbb{V}(X_1+X_2)$, $\mathbb{E}(X_1-X_2)$, $\mathbb{V}(X_1-X_2)$.

c) Établir la relation :

$$\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1+q}$$

2. a) Montrer que Z suit la loi géométrique de paramètre $1-q^2$.
En déduire $\mathbb{E}(Z)$, $\mathbb{V}(Z)$ et $\mathbb{E}(T)$.

b) Soit k un entier de $\mathbb{N}^*$. Justifier l'égalité :

$$[Z=k] \cup [T=k] = [X_1 = k] \cup [X_2 = k]$$

En déduire la relation suivante : $\mathbb{P}([T=k]) = 2\,\mathbb{P}([X_1=k]) - \mathbb{P}([Z=k])$.

c) Établir la formule :

$$\mathbb{V}(T) = \frac{q(2q^2+q+2)}{(1-q^2)^2}$$

3. a) Préciser $(T-Z)(\Omega)$.
Exprimer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'évènement $[Z=j]\cap[Z=T]$ en fonction des évènements $[X_1 = j]$ et $[X_2 = j]$.
En déduire pour tout j de $\mathbb{N}^*$, l'expression de $\mathbb{P}([Z=j]\cap[Z=T])$.

b) Montrer que pour tout couple (j,l) de $(\mathbb{N}^*)^2$, on a :

$$\mathbb{P}([Z=j]\cap[T-Z=l]) = 2\,p^2\,q^{2j+l-2}$$

c) Montrer que pour tout k de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{P}([X_1-X_2=k]) = \dfrac{pq^{|k|}}{1+q}$.
(on distinguera trois cas : $k=0$, $k>0$ et $k<0$)

d) En déduire la loi de la variable aléatoire $|X_1-X_2|$.

e) Établir à l'aide des questions précédentes que les variables Z et $T-Z$ sont indépendantes.

4. a) À l'aide du résultat de la question ***3.e)***, calculer $\mathrm{Cov}(Z,T)$.
Les variables Z et T sont-elles indépendantes ?

b) Calculer en fonction de q, le coefficient de corrélation linéaire ρ de Z et T.

c) Déterminer la loi de probabilité du couple (Z,T).

d) Déterminer pour tout j de $\mathbb{N}^*$, la loi de probabilité conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z=j]$.

e) Soit j un élément de $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une variable aléatoire D_j à valeur dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi de probabilité est la loi conditionnelle de T sachant l'évènement $[Z=j]$.
Calculer $\mathbb{E}(D_j)$.