Études de fonctions

I. Applications

I.1. Notion d'application

I.1.a) Définition

Définition

Soient E et F deux ensembles.

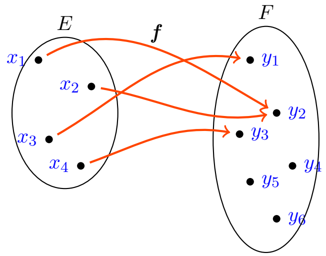
Une **application** f de E dans F (notée $f : E \to F$) est un procédé permettant d'associer à chaque élément x de l'ensemble E, un et un seul élément y de l'ensemble F.

- E s'appelle l'**ensemble de départ** de l'application.
- F s'appelle l'**ensemble d'arrivée** de l'application.
- On appelle **image** de f et on note $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble des éléments y de F qui admettent des antécédents par f.

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}}$$

- Par définition, on a toujours $\boxed{\mathrm{Im}(f) \ \subset \ F}$ mais pas forcément égalité.
- On note $\mathcal{A}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

Représentation graphique.
Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.



I.2. Image d'un ensemble par une application

Définition

Soient E et F deux ensembles et soit $A \subset E$.

Soit $f : E \to F$.

- L'**image** (**directe**) de l'ensemble A par l'application f, notée $f(A)$, est l'ensemble des images par f des éléments de A. Autrement dit :

$$\boxed{f(A) \ = \ \{y \in F \mid \exists x \in A, \ y = f(x)\}} \ = \ \{f(x) \mid x \in A\} \ \subset \ F$$

- En particulier, on a : $\boxed{f(E) \ = \ \mathrm{Im}(f)}$

Soit $f : E \to F$ une application. Il ne faut pas confondre :

- $\mathrm{Im}(f)$ l'image de l'application f.
  (l'ensemble des images : $\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\}$*)*
- F l'ensemble d'arrivée de l'application f.

Comme déjà précisé : $\mathrm{Im}(f) \subset F$ mais pas forcément $\mathrm{Im}(f) = F$.

I.3. Restriction

Définition

Soient E et F deux ensembles et A une partie de E.

Soit $f : E \to F$ une application.

- La **restriction** de f à A, notée $f|_A$, est l'application de A dans F définie par :

$$f|_A \ : \ \begin{array}{rcl} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

- Autrement dit, on a : $\boxed{\forall x \in A, \ f|_A(x) \ = \ f(x)}$
- On a alors : $\boxed{\mathrm{Im}\, f|_A = f(A)}$

I.4. Composée de deux applications

Définition

Soient E, F et G trois ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

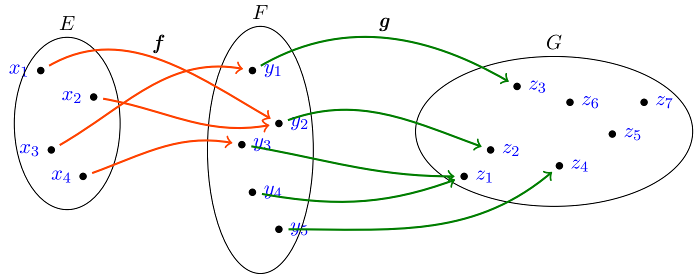
- La **composée** de f par g, notée $g \circ f$, est l'application :

$$g \circ f \ : \left| \begin{array}{rcl} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

- Autrement dit, on a : $\boxed{\forall x \in E, \ (g \circ f)(x) = g(f(x))}$

Représentation graphique.

Soient E, F et G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications.



Propriété

Soient E, F, G trois ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

Soit $h : G \to H$ une application.

On a alors : $\boxed{h \circ (g \circ f) \ = \ (h \circ g) \circ f}$

(la loi $\circ$ est associative)

Remarque

Avec les notations précédentes, on a :

- $h \circ g : F \to H$,
- $g \circ f : E \to G$,
- $h \circ g \circ f : E \to H$.
  (la notation $h \circ g \circ f$ est autorisée du fait de l'associativité de la loi $\circ$)

I.5. Caractère injectif, surjectif, bijectif des applications

I.5.a) Injectivité

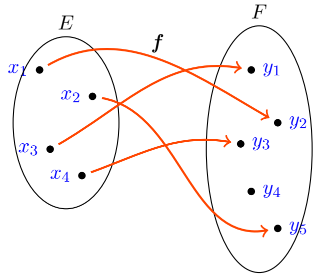
Définition

Soient E et F deux ensembles.

- Une application $f : E \to F$ est **injective** si tout couple d'éléments distincts de E fournit deux images distinctes par f.

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq f(x_2)}$$

Représentation graphique.
Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application.



Exemple d'application injective et non injective.

1) L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ est injective.
En effet, si x_1 et x_2 sont deux éléments de E tels que $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2)$.

2) L'application $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est non injective.
En effet, $-1 \neq 1$ et $g(-1) = 1 = g(1)$.

3) Par contre, $g_{|\mathbb{R}^+}$ est bien injective.

Propriété

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

$$\boxed{f \text{ injective } \Leftrightarrow \text{ Tout élément } y \in F \text{ admet au plus un antécédent par } f}$$

Démonstration.
On raisonne par double implication.

($\Rightarrow$) Supposons par l'absurde que f est injective et qu'il existe un élément $y \in F$ admettant strictement plus d'un antécédent par f.
Alors il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = y = f(x_2)$.
Ceci contredit l'injectivité de f.

($\Leftarrow$) Supposons que tout élément $y \in F$ admet au plus un antécédent par f.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $x_1 \neq x_2$. Notons $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
Alors on a forcément $y_1 \neq y_2$ car sinon y_1 posséderait deux antécédents distincts x_1 et x_2. □

Démontrer qu'une application est injective
On peut utiliser la définition équivalente, stipulant qu'une application est injective si et seulement si :

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$$

Cette définition est l'écriture contraposée de la définition initiale.
(on a même : $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$)

```
Démontrons que f : E → F injective.

 Soit (x1, x2) ∈ E².
 On suppose que f(x1) = f(x2).  ...démonstration
 ...
 Alors x1 = x2.
 On a donc démontré que f est injective.
```

Propriété

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ est injective} \\ g \text{ est injective} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad g \circ f : E \to G \text{ est injective}}$$

Autrement dit, la composée de deux applications injectives est injective.

Démonstration.
Supposons f et g injectives et démontrons que $g \circ f : E \to G$ est injective.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.
Autrement dit : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.
Or, comme g est injective, on en déduit que : $f(x_1) = f(x_2)$.
Or, comme f est injective, on en déduit que : $x_1 = x_2$.

Ainsi $g \circ f$ est injective. □

Propriété

Soient E, F, G des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

$$\boxed{g \circ f \text{ est injective} \quad \Rightarrow \quad f \text{ injective}}$$

Démonstration.
Supposons $g \circ f$ injective et démontrons que $f : E \to F$ est injective.
Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.
On a alors : $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$.
(égalité obtenue en composant chaque membre de l'égalité précédente par g)
Autrement dit : $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.
Or, comme $g \circ f$ est injective, on en déduit que : $x_1 = x_2$.

Ainsi f est injective. □

Propriété

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.

$$\boxed{f \text{ strictement croissante} \quad \Rightarrow \quad f \text{ est injective}}$$

Démonstration.
Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 \neq x_2$.
Quitte à renommer x_1 et x_2, on peut supposer que : $x_1 > x_2$.
Or, la fonction f est strictement croissante. On a donc : $f(x_1) > f(x_2)$.
Ainsi : $f(x_1) \neq f(x_2)$.

On en conclut que f est injective. □

I.5.b) Surjectivité

Définition

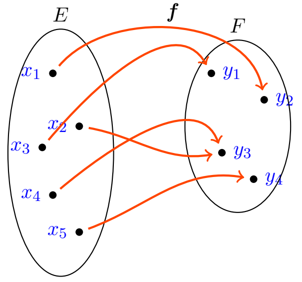
Soient E et F deux ensembles.

- Une application f de E dans F est **surjective** si tout élément de F admet au moins un antécédent par f.

$$\boxed{\forall y \in F, \exists x \in E, \ y = f(x)}$$

- Autrement dit, f surjective si : $\boxed{\text{Im}(f) = F}$

Représentation graphique.
Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application surjective.



Exemple d'application surjective et non surjective.

1) L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ est surjective. En effet, tout élément y de $\mathbb{R}$ est atteint par f puisque $y = f(y)$.

2) L'application $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est non surjective. En effet, -1 ne peut s'écrire comme le carré d'un réel (il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $-1 = x^2$).

3) Par contre, $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est bien surjective. En effet, tout $y \in \mathbb{R}^+$ peut s'écrire sous la forme $y = h(\sqrt{y})$. On a bien $h(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$.

Démontrer qu'une application est surjective

La propriété définissant la surjectivité fournit le schéma de rédaction suivant.

> `Démontrons que` $f : E \to F$ `surjective.`
>
> `Soit` $y \in F$`.`
> `Exhibons` $x \in E$ `tel que` $y = f(x)$`.`
> ... *démonstration* ...
> `Alors` $y = f(x)$`.`
> `On a donc démontré que` f `est surjective.`

Remarque

- L'élément y nommé au début de la démonstration est un élément de l'ensemble F. Le but de la démonstration est de démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, ce qui signifie que $y \in \mathrm{Im}(f)$ $(= f(E))$.
- On démontre donc que tout élément $y \in F$ vérifie $y \in \mathrm{Im}(f)$. Autrement dit : $F \subset \mathrm{Im}(f)$.
- Comme on a toujours $\mathrm{Im}(f) \subset F$, on démontre ainsi : $\mathrm{Im}(f) = F$.

> On l'a déjà dit : il ne faut pas confondre F et $\mathrm{Im}(f)$.
> Ces deux ensembles ne sont égaux que si f est surjective.

Propriété

Soient E, F, G des ensembles.
Soit $f : E \to F$ une application.
Soit $g : F \to G$ une application.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ est surjective} \\ g \text{ est surjective} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad g \circ f : E \to G \text{ est surjective}}$$

Autrement dit, la composée de deux applications surjectives est surjective.

Démonstration.
Supposons f et g surjectives et démontrons que $g \circ f$ est surjective.
Soit $y \in G$.
Démontrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
Comme $g : F \to G$ est surjective, il existe $u \in F$ tel que $y = g(u)$.
Comme $f : E \to F$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $u = f(x)$.
On a alors : $y = g(u) = g(f(x)) = g \circ f(x)$.

Ainsi $g \circ f$ est surjective. □

Propriété

Soient E, F, G des ensembles.
Soit $f : E \to F$ une application.
Soit $g : F \to G$ une application.

$$\boxed{g \circ f \text{ est surjective} \quad \Rightarrow \quad g \text{ surjective}}$$

Démonstration.
Supposons $g \circ f$ surjective et démontrons que g est surjective.
Soit $y \in G$.
Démontrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$.
Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $u \in E$ tel que $y = g \circ f(u) = g(f(u))$.
Notons $x = f(u)$. Alors $x \in F$ et x vérifie $y = g(x)$.

Ainsi f est surjective. □

Propriété

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

$$\boxed{\text{Alors l'application } \begin{array}{cccc} \tilde{f} & : & E & \to & f(E) \\ & & x & \mapsto & f(x) \end{array} \text{ est surjective.}}$$

Démonstration.

Soit $y \in f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$.
Alors, par définition de $f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x) = \tilde{f}(x)$.
Ainsi $\tilde{f}$ est surjective. □

Remarque

- C'est une manière classique de rendre une fonction surjective.
- Cette propriété est notamment utilisé dans le théorème de la bijection.

  Plus précisément, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est telle que :
  × f est strictement croissante sur $[a, b]$,
  × f est continue sur $[a, b]$,
  alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $f([a, b])$. En effet :
  a) Comme f est strictement croissante, elle est injective.
  b) On rend alors cette fonction surjective modifiant son ensemble d'arrivée. Plus précisément, $f : [a, b] \to f([a, b])$ est surjective.
- Notez que nous n'avons pas eu besoin dans la démonstration précédente du caractère continue de la fonction f. Dès lors, à quoi sert cette hypothèse ?
  (i) Si f est continue, alors $f([a, b])$ est l'image d'un intervalle par une fonction continue. C'est donc un intervalle.
  (ii) Sous l'hypothèse de continuité de f on a la propriété :

  $$f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ strictement monotone}$$

  La réciproque étant toujours vérifiée, on obtient une caractérisation des applications strictement monotones. Si f est continue, on a :

  $$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ strictement monotone}$$

I.5.c) Bijectivité

Définition

Soient E et F deux ensembles.
Soit $f : E \to F$ une application.

- On dit que l'application $f : E \to F$ est **bijective** ou définit une **bijection** de E dans F si f est injective et surjective.
- Ainsi, l'application $f : E \to F$ est **bijective** si tout élément $y \in F$ admet un et un seul antécédent $x \in E$ par f. Autrement dit :

$$\boxed{\forall y \in F, \exists! x \in E, \ y = f(x)}$$

Remarque

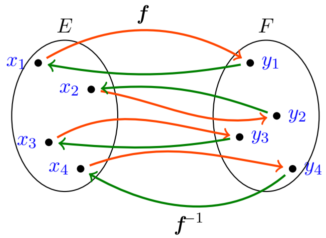
Si $f : E \to F$ est une application bijective :
× f est une application : donc à tout élément x de E correspond un et un seul élément y de F,
× f est bijective : donc à tout élément y de F est associé un unique élément x de E par f (x est l'antécédent de y par f).
On en conclut qu'il y a « autant » d'éléments dans E que dans F.

Définition

Soient E et F deux ensembles.
Soit $f : E \to F$ une application **bijective**.

- La (bijection) réciproque associée à f, notée $f^{-1} : F \to E$, est l'application de F dans E qui, à chaque y de F, associe son unique antécédent x par f.
- On a alors : $\boxed{\forall x \in E, \forall y \in F, \ x = f^{-1}(y) \ \Leftrightarrow \ y = f(x)}$
  ($f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f)

Représentation graphique.
Soient E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application bijective.



Exemple d'application bijective et non bijective.

1) L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ est bijective car elle est à la fois injective et surjective.

2) L'application $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ n'est pas bijective. En fait, elle n'est ni injective ni surjective.

3) Par contre, $t : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est bien bijective puisqu'elle est à la fois injective est surjective. Tout $y \in \mathbb{R}^+$ s'écrit d'une unique manière comme un carré : $y = (\sqrt{y})^2 = t(y)$.

Propriétés

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application **bijective**.

a. L'application réciproque f^{-1} est bijective et $\boxed{\left(f^{-1}\right)^{-1} = f}$

b. *1)* $\boxed{\forall x \in E, \forall y \in F, \ (y = f(x) \ \Leftrightarrow \ x = f^{-1}(y))}$

2) $\boxed{\forall y \in F, \ f(f^{-1}(y)) \ = \ y}$ *3)* $\boxed{\forall x \in E, \ f^{-1}(f(x)) \ = \ x}$

Proposition 1.

Soient E et F deux ensembles.

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to E$ des applications.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} f \textit{ et } g \textit{ sont bijectives.} \\ \textit{De plus : } g = f^{-1} \textit{ et } f = g^{-1} \end{array}}$$

Démonstration.

a. On sait que $g \circ f = \mathrm{id}_E$. Or id_E est une bijection de E dans E.
Donc $g \circ f$ est bijective. On en déduit que $g \circ f$ est notamment surjective.
Ainsi g est surjective.

De même, $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Or id_F est une bijection de F dans F.
Donc $f \circ g$ est bijective. On en déduit que $f \circ g$ est notamment injective.
Ainsi g est injective.

On en déduit que g est bijective.
On démontre de la même manière que f est bijective.

b. La réciproque de f est par définition l'application qui à $y \in F$ associe son unique antécédent par f.
Soit $y \in F$. Alors $f(g(y)) = f \circ g(y) = \mathrm{id}_F(y) = y$.
L'élément $g(y)$ est un antécédent de y par f.
Comme f est bijective, cet élément est unique. D'où $g(y) = f^{-1}(y)$.
Ainsi : $\forall y \in F, \ g(y) = f^{-1}(y)$.
Autrement dit : $g = f^{-1}$. □

Proposition 2.

Soient E, F et G des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application.

Soit $g : F \to G$ une application.

- *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux bijections, alors la composée $g \circ f : E \to G$ est une bijection, et on a :*

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

Démonstration.
Le caractère associatif de la loi $\circ$ (parenthésage comme bon nous semble) nous permet d'écrire :

$$\begin{array}{rlcrl} & (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) & \qquad & & (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) \\ = & g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} & & = & f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f \\ = & g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} & & = & f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ = & g \circ \mathrm{id}_F \circ g^{-1} & & = & f^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ f \\ = & (g \circ \mathrm{id}_F) \circ g^{-1} & & = & (f^{-1} \circ \mathrm{id}_F) \circ f \\ = & g \circ g^{-1} \ = \ \mathrm{id}_G & & = & f^{-1} \circ f \ = \ \mathrm{id}_E \end{array}$$

D'après la proposition 1, $g \circ f$ est bijective, de réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Méthodologie : déterminer la réciproque d'une application

- Par une étude théorique : via la proposition 1.

  Exercice
  Soit $f : E \to E$ une application vérifiant $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_E$.
  Montrer que f est bijective et déterminer son inverse.

- Par calcul : en inversant l'égalité $y = f(x)$

  Exercice
  On considère l'application :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{-5\} & \to & \mathbb{R}\backslash\{2\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x-3}{x+5} \end{array}$$

  a. Démontrer que g est une bijection et déterminer sa réciproque.

  b. Répondre aux mêmes questions pour $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to &]-1,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{x}{1+|x|} \end{array} \right.$

Exercice. `(HEC 2018 - Oral)`
Justifier que la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{2x}\right)$ définit une bijection de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$ et trouver sa bijection réciproque.

Exercice
Soit $f : E \to E$ une application vérifiant $f \circ f \circ f = \mathrm{id}_E$.
Montrer que f est bijective et déterminer son inverse.

Démonstration.
Il suffit de remarquer que : $\begin{array}{rcl} (f \circ f) \circ f & = & \mathrm{id}_E \\ f \circ (f \circ f) & = & \mathrm{id}_E \end{array}$.
Par la proposition 1, on en conclut que f est bijective et que $f^{-1} \ = \ f \circ f$. □

Le cas particulier des fonctions réelles d'une variable réelle

Proposition 3.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1) *Si f est strictement monotone sur I, alors f est injective de I sur $\mathbb{R}$.*

2) *Si f est strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.*

Démonstration.
On fait la démonstration dans le cas de la croissance (autre cas analogue).

1) Supposons f strictement croissante. Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ tel que $x_1 \neq x_2$. Quitte à renommer x_1 et x_2, supposons $x_1 < x_2$. Par stricte croissance de f, on a : $f(x_1) < f(x_2)$ et donc : $f(x_1) \neq f(x_2)$.

2) L'image de f coïncide avec son ensemble d'arrivée. La fonction f est donc surjective. Étant de plus injective (cf précédent), elle réalise une bijection de I sur $f(I)$. □

II. Propriétés générales des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$

Dans la suite, I sera un intervalle (même si la plupart des opérations restent vraies sur une réunion d'intervalles).

II.1. Fonctions paires / impaires

Définition

Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0.

- Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **paire** si : $\boxed{\forall x \in I, \quad f(-x) \ = \ f(x)}$
- Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **impaire** si : $\boxed{\forall x \in I, \quad f(-x) \ = \ -f(x)}$

Remarque

- La courbe représentative d'une fonction paire (resp. impaire) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (resp. par rapport à l'origine).
- Si $I = \mathbb{R}$, on peut écrire la propriété de parité comme suit :

$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est paire} \quad \Leftrightarrow \quad f \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \ = \ \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \circ f}$$

$$\boxed{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ est impaire} \quad \Leftrightarrow \quad f \circ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \ = \ (-\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) \circ f}$$

Propriété *(jouons avec la définition ...)*

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

1) $\boxed{f \text{ paire} \ \Rightarrow \ g \circ f \text{ paire}}$

2) $\boxed{f \text{ et } g \text{ impaires} \ \Rightarrow \ g \circ f \text{ impaire}}$

3) $\boxed{f \text{ impaire et } g \text{ paire} \ \Rightarrow \ g \circ f \text{ paire}}$

II.2. Bornes d'une fonction

II.2.a) Notion de minorant / majorant

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1) f est **minorée** (sur I) si elle admet un minorant :

$$\boxed{\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \ m \leqslant f(x)}$$

2) f est **majorée** (sur I) si elle admet un majorant :

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \ f(x) \leqslant M}$$

3) f est **bornée** (sur I) si elle est à la fois majorée et minorée :

$$\boxed{\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, \ m \leqslant f(x) \leqslant M}$$

ce qu'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\boxed{\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I, \ |f(x)| \leqslant M}$$

Remarque

Si une fonction f admet un majorant M (resp. un minorant m) alors elle en admet une infinité. En effet, tout élément plus grand que M (resp. plus petit que m) est un majorant (resp. minorant) de f.

Les bornes m et M évoquées dans ces définitions ne sont pas forcément des valeurs prises par f.

Par exemple, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$ est majorée par 1 (donc par 1.1, 1.5, e, 37, 10^{18} ...) mais 1 n'est pas atteint par f.

II.2.b) Notion de minimum / maximum global

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1) f admet un **minimum** sur l'intervalle I si :

$$\boxed{\exists x_0 \in I, \forall x \in I,\ f(x) \geqslant f(x_0)}$$

Si tel élément existe, on dit que f atteint son **minimum** au point x_0.

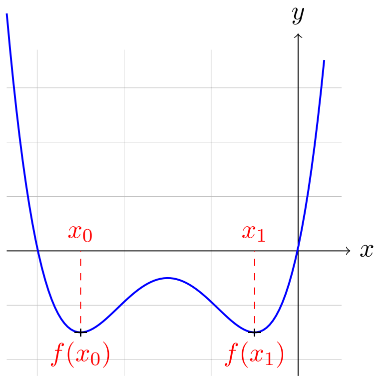
2) f admet un **maximum** sur l'intervalle I si :

$$\boxed{\exists x_0 \in I, \forall x \in I,\ f(x) \leqslant f(x_0)}$$

Si tel élément existe, on dit que f atteint son **maximum** au point x_0.

Remarque

- S'il existe, le maximum (resp. minimum) d'une fonction sur I est unique. Cependant, ce maximum peut être atteint en plusieurs points de I.
- Le maximum (resp. minimum) de f sur I, s'il existe, est un majorant (resp. minorant) de f qui est atteint par f.



La fonction f admet le minimum $-\frac{3}{2}$. Ce minimum est atteint en les deux points x_0 et x_1 :

- $f(x_0) = -\frac{3}{2}$.
- $f(x_1) = -\frac{3}{2}$.

II.2.c) Notion de minimum / maximum local

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

1) On dit que f admet un **maximum local** en x_0 si :

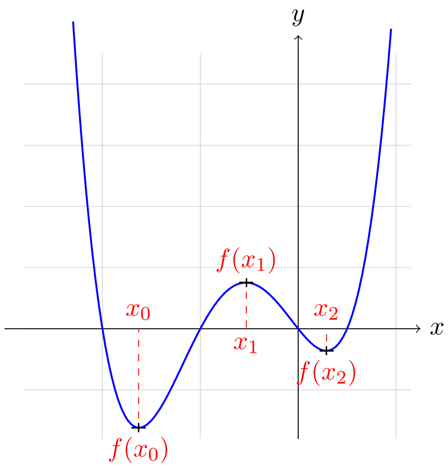
$$\boxed{\exists \alpha > 0, \forall x \in I,\ |x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(x_0)}$$

2) On dit que f admet un **minimum local** en x_0 si :

$$\boxed{\exists \alpha > 0, \forall x \in I,\ |x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x_0) \leqslant f(x)}$$

Remarque

- Une fonction f peut admettre plusieurs maxima (resp. minima) locaux.
- Un maximum (resp. minimum) local d'une fonction f est un majorant (resp. minorant) local de f.



La fonction f admet :

- un minimum local en x_0.
- un maximum local en x_1.
- un minimum local en x_2.

La fonction f :

- n'admet pas de maximum.
- admet un minimum (global) au point x_0.

La fonction f n'admet pas de majorant. Elle admet une infinité de minorants : tout réel $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leqslant f(x_0)$ est un minorant de f. Parmi ses minorants, on peut distinguer celui qui a le plus d'intérêt.

II.2.d) Notion de borne supérieure / inférieure

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1) Si f est minorée sur I, on appelle **borne inférieure de** f sur I le plus grand des minorants de f sur I. Cet élément est noté $\inf\limits_I f$ ou $\inf\limits_{x \in I} f(x)$.

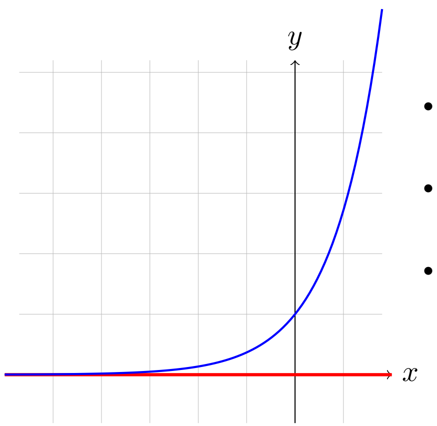
2) Si f est majorée sur I, on appelle **borne supérieure de** f sur I, le plus petit des majorants de f sur I. Cet élément est noté $\sup\limits_I f$ ou $\sup\limits_{x \in I} f(x)$.

3) Si f est bornée sur I, on peut donc définir $\sup\limits_I |f|$.

La borne supérieure (resp. inférieure) de f n'est pas forcément une valeur atteinte par f. Si c'est le cas il s'agit du minimum (resp. maximum) de la fonction.

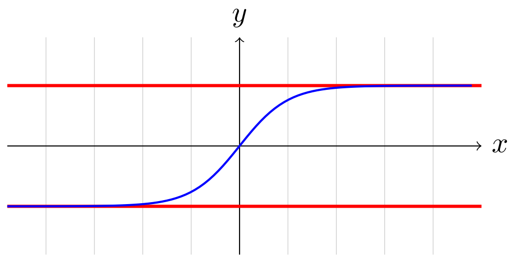
- si $\inf\limits_I f \in f(I)$, alors $\inf\limits_{x \in I} f(x) = \min\limits_{x \in I} f(x)$
- si $\sup\limits_I f \in f(I)$, alors $\sup\limits_{x \in I} f(x) = \max\limits_{x \in I} f(x)$

- Considérons la fonction $f : x \mapsto e^x$.



- La fonction f n'admet pas de minimum sur $\mathbb{R}$.
- Elle est minorée par tout réel $m \leqslant 0$.
- Sa borne inférieure est : $\inf\limits_{\mathbb{R}} f = 0$.

- La fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ n'admet pas de minimum / maximum.



- La fonction g n'admet pas de minimum / maximum.
- Elle est minorée par tout réel $m \leqslant -1$.
- Elle est majorée par tout réel $M \geqslant 1$.
- $\inf\limits_{\mathbb{R}} g = -1$ et $\sup\limits_{\mathbb{R}} g = 1$.

II.3. Fonctions monotones

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1) La fonction f est **croissante** sur I si :

$$\boxed{\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant f(y)}$$

2) La fonction f est **strictement croissante** sur I si :

$$\boxed{\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) < f(y)}$$

3) La fonction f est **décroissante** sur I si :

$$\boxed{\forall (x, y) \in I^2,\ x \leqslant y \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant f(y)}$$

4) La fonction f est **strictement décroissante** sur I si :

$$\boxed{\forall (x, y) \in I^2,\ x < y \ \Rightarrow\ f(x) > f(y)}$$

5) La fonction f est **monotone** sur I si :

$$(f \text{ est croissante sur } I) \ \texttt{OU}\ (f \text{ est décroissante sur } I)$$

On définit de même la notion de **stricte monotonie**.

Théorème 1. *(théorème de la limite monotone)*

Soit f une fonction monotone sur $I =]a, b[$ $(a < b)$.

(avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$)

1) *Si $x_0 \in I$: f admet une limite* **finie** *à gauche et à droite en x_0.*

2) *Si $x_0 = a$: f admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en x_0.*

a) *si f est croissante,* $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

b) *si f est décroissante,* $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

3) *Si $x_0 = b$: f admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ en x_0.*

a) *si f est croissante,* $\boxed{\lim\limits_{x \to b} f(x) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

b) *si f est décroissante,* $\boxed{\lim\limits_{x \to b} f(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}}$

Démonstration. `(CULTURE)`
Pour faire la démonstration, il faut connaître la notion de borne supérieure (et inférieure) d'une partie de $\mathbb{R}$ et sa caractérisation.

Si $E \subset \mathbb{R}$ alors le plus petit des majorants de E, lorsqu'il existe, est appelé borne supérieure de E et est noté $M = \sup E$.
On peut caractériser cette borne supérieure M de la façon suivante.

- $\forall x \in E,\ x \leqslant M \quad (M \text{ est un majorant})$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in E,\ M - \varepsilon < x \quad (M - \varepsilon \text{ n'est jamais un majorant})$

On se limite ici au cas où f est croissante (cas f décroissante analogue) et on s'intéresse au cas $x_0 = b$. On distingue alors deux cas :

× soit f est majorée.
On note alors $M = \sup\limits_{x \in I} f(x) = \sup \{f(x) \mid x \in I\}$.
Soit $\varepsilon > 0$. De par la caractérisation précédente, on sait que $M - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\{f(x) \mid x \in I\}$.
Ainsi, il existe $u \in I$ (*i.e.* $a < u < b$) tel que : $M - \varepsilon < f(u) \leqslant M$.
Pour tout x tel que $u \leqslant x < b$, on a, par croissance de f :

$$M - \varepsilon < f(u) \leqslant f(x) \leqslant M$$

En notant $\alpha = b - u > 0$, on a donc :

$$\forall x \in I, (b - \alpha \leqslant x < b \ \Rightarrow\ |f(x) - M| \leqslant \varepsilon)$$

× soit f est non majorée.
Soit $A \in \mathbb{R}$.
Comme f non majorée, il existe $u \in I$ (*i.e.* $a < u < b$) tel que : $f(u) > A$.
Pour tout x tel que $u \leqslant x < b$, on a, par croissance de f :

$$A < f(u) \leqslant f(x)$$

En notant $\alpha = b - u > 0$, on a donc :

$$\forall x \in I, (b - \alpha \leqslant x < b \ \Rightarrow\ f(x) > A)$$

□

Ceci ne signifie pas qu'une fonction monotone admet une limite en tout point de $]a, b[$. Par exemple, on peut considérer la fonction

$$f : \left| \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x < 3 \\ 3 & \text{si } x = 3 \\ \dfrac{1}{3}x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases} \end{array} \right.$$

qui est (strictement) croissante mais n'admet pas de limite en 3.

III. Continuité sur un intervalle

III.1. Continuité globale

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

- La fonction f est continue sur I si elle est continue en tout point de I.
- Autrement dit, f est continue sur I si elle admet une limite finie en tout point de I. Ceci s'écrit :

$$\boxed{\forall x_0 \in I, \exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon)}$$

Rappel : notion de limite d'une fonction

Dire que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie sur un intervalle I) admet la limite ℓ en $x_0 \in I$, c'est dire que $f(x)$ peut approcher ℓ aussi près que l'on veut pour peu que x soit suffisamment proche de x_0. Cela s'exprime comme suit :

$$\forall v \in \mathcal{V}_\ell, \exists U \in \mathcal{V}_{x_0}, \forall x \in I \cap U,\ f(x) \in V$$

ou encore : $\boxed{\forall v \in \mathcal{V}_\ell, \exists U \in \mathcal{V}_{x_0}, \forall x \in I, x \in U \ \Rightarrow\ f(x) \in V}$.

Il est à noter que cette définition est valable pour x_0 (resp. ℓ) fini ou non.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I. Soient $x_0 \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

- **Limites finies en un point**

a. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$$

b. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (x_0 - \alpha \leqslant x < x_0 \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$$

c. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (x_0 < x \leqslant x_0 + \alpha \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$$

- **Limites infinies en un point**

Limite $+\infty$

a. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B\ )}$$

b. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (x_0 - \alpha \leqslant x < x_0 \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B\ )}$$

c. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (x_0 < x \leqslant x_0 + \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B\ )}$$

Limite $-\infty$

d. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (|x - x_0| \leqslant \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B\ )}$$

e. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (x_0 - \alpha \leqslant x < x_0 \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B\ )}$$

f. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ (x_0 < x \leqslant x_0 + \alpha \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B\ )}$$

- **Limites en l'infini**

Limites en $+\infty$

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B\ )}$$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \geqslant A \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B\ )}$$

Limites en $-\infty$

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \leqslant -A \ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon\ )}$$

e. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \leqslant -A \ \Rightarrow\ f(x) \geqslant B\ )}$$

f. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si :

$$\boxed{\forall B > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \in I,\ (x \leqslant -A \ \Rightarrow\ f(x) \leqslant -B\ )}$$

III.2. Opérations algébriques sur les fonctions continues

Théorème 2.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors les fonctions $f + g$, λf, $f \times g$ sont des fonctions continues sur I.

De plus, si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont aussi continues sur I.

III.3. Composée de deux fonctions continues

Proposition 4.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I.

Soit $g : J \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle J.

On suppose de plus que : $f(I) \subset J$ (pour que $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ soit bien définie).

Alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I.

Démonstration.
Encore une fois, ce résultat global est un corollaire direct du résultat du chapitre précédent sur la limite en un point de la composée $g \circ f$. $\square$

III.4. Fonctions continues par morceaux

Définition *(continuité par morceaux sur un segment)*

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

On dit que f est **continue par morceaux** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

1) $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est continue *(i.e. continue sur $]a_i, a_{i+1}[$)*,

2) $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ est prolongeable par continuité sur l'intervalle fermé $[a_i, a_{i+1}]$.

Définition (équivalente)
La fonction f est continue par morceaux sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

- f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$,
- f admet une limite finie à droite en a_i,
- f admet une limite finie à gauche en a_{i+1}.

(et ces limites ne sont pas forcément égales et peuvent aussi être différentes de $f(a_i)$ et $f(a_{i+1})$)

IV. Fonction partie entière

IV.1. Définition

Définition
On appelle fonction **partie entière** la fonction suivante.

$$\begin{array}{rccl} \lfloor\,.\,\rfloor & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ & & x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \ = \ \text{le pus grand entier } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n \leqslant x \end{array}$$

Remarque
On peut aussi définir $\lfloor x \rfloor$ comme l'unique entier relatif vérifiant la propriété : $n \leqslant x < n+1$.

IV.2. Propriétés

Propriété fondamentale

1) De par la définition :

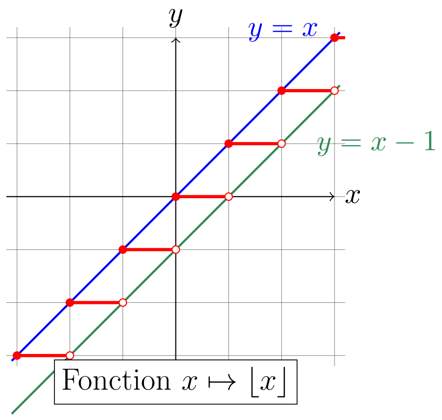
$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ (\lfloor u \rfloor = n \quad \Leftrightarrow \quad n \ \leqslant \ u \ < \ n+1)}$$

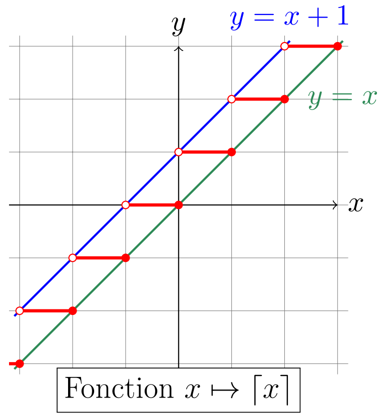
2) $\boxed{\forall u \in \mathbb{R},\ u - 1 < \lfloor u \rfloor \leqslant u}$

Propriété

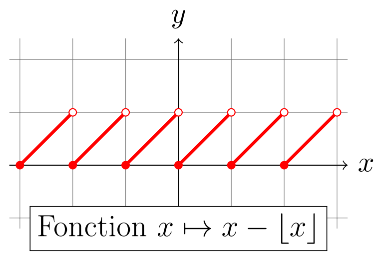
- Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :
  - × sur tout intervalle $[k, k+1[$, la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est constante égale à k,
  - × sur tout intervalle $]k, k+1[$, la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue.
- On a : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty}$

IV.3. Représentation graphique





Exercice
Tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$.
Quelle est cette fonction ?



Remarque

- Cette fonction est appelée **partie fractionnaire** (ou parfois **mantisse**).
- La fonction partie entière est à l'origine d'exercices sur les v.a.r. à densité et discrètes. On peut par exemple demander dans un premier temps l'étude de la loi d'une v.a.r. X à densité. Puis demander la loi de $Y = \lfloor X \rfloor$ (v.a.r. discrète car d'ensemble image $Y(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ dénombrable).

V. Les grands théorèmes de la continuité sur I

V.1. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3. *(Théorème des Valeurs Intermédiaires)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ***intervalle*** *I.*

Si a et b sont deux points de I $(a < b)$ tels que : $f(a)f(b) \leqslant 0$.

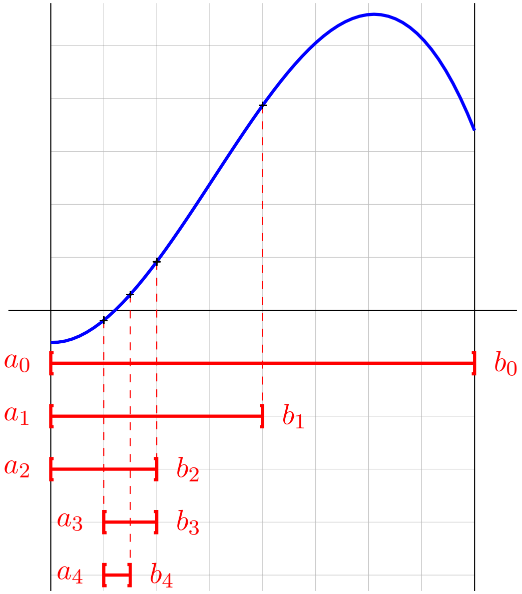
Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration.

a) Cas $f(a) = f(b) = 0$: trivial. Prendre $c = a$.

b) Cas $f(a) \leqslant 0$ et $f(b) \geqslant 0$ (l'autre cas est analogue)

La démonstration se base sur une méthode dite « de dichotomie » qu'on peut résumer par le schéma suivant.



On construit une suite de segments emboîtés $[a_n, b_n]$ tels que :

- $f(a_n) \leqslant 0$,
- $f(b_n) \geqslant 0$.

On définit les suites (a_n) et (b_n) par récurrence.

0) Initialement, on pose $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $c_0 = \dfrac{a+b}{2}$.

1) Si $f(c_0) \leqslant 0$, on pose $a_1 = c_0$ et $b_1 = b$.
Si $f(c_0) > 0$, on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$.

2) ...

$\vdots$

n+1) On note $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.
Si $f(c_n) \leqslant 0$, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
Si $f(c_n) > 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

Les suites (a_n) et (b_n) ainsi construites sont adjacentes. En effet :

- $a_{n+1} \geqslant a_n$,
- $b_{n+1} \leqslant b_n$,
- $b_n - a_n = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \dots = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, (a_n) et (b_n) sont convergentes et convergent vers la même limite $c = \sup a_n = \inf b_n$. On note au passage que $a = a_0 \leqslant c \leqslant b_0 = b$.

Or, par définition de a_n et b_n, on a : $f(a_n) \leqslant 0$ et $f(b_n) \geqslant 0$.
Comme f est continue, $f(a_n)$ et $f(b_n)$ sont convergentes de limite $f(c)$.
Par passage à la limite dans les inégalités précédentes, on obtient :

$$f(c) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad f(c) \geqslant 0$$

Ainsi, on a bien exhibé $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. $\square$

Théorème 4. *(TVI - énoncé(s) bis)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un **intervalle** *I.*
Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$.

1) *Alors toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par f sur $[a, b]$.*

2) *Ce théorème peut aussi s'énoncer sous la forme suivante :*
« L'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle ».

Démonstration.

1) On suppose (par exemple) $f(a) \leqslant f(b)$. Soit $z \in [f(a), f(b)]$.
Il suffit alors d'appliquer le TVI à la fonction $g = f - z$.

2) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur un intervalle I.
Soient u et v deux éléments de $f(I) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in I,\ y = f(x)\}$.
On suppose (quitte à renommer ces éléments) que : $u < v$.

Pour montrer que $f(I)$ est un intervalle, il suffit de démontrer que toute valeur comprise entre u et v est dans $f(I)$.
Par définition de $f(I)$, il existe $a \in I$, tel que : $u = f(a)$.
De même, il existe $b \in I$ tel que $v = f(b)$.
Or, par le TVI, pour tout $z \in [f(a), f(b)]$ il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $z = f(\alpha)$. Ainsi, $z \in f(I)$. □

L'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle qui n'est pas forcément de même nature.

(considérer $g : x \to x^2$ et $I =]-1, 1[$ par exemple)
Cette propriété est vérifiée si l'on suppose de plus que f est strictement monotone sur l'intervalle dont on cherche l'image.

V.2. Théorème de compacité

Théorème 5. *(théorème des bornes)*

- *Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.*
- *L'image par une fonction continue d'un segment est un segment.*
  Ce qu'on écrit sous la forme : « $f([a, b]) = [m, M]$ ».

Démonstration.
La démonstration requiert des outils dont nous ne disposons pas en ECE.
Admis. □

V.3. Théorème de la bijection

Théorème 6.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction :

1) *continue sur I,*

2) *strictement monotone sur I.*

On a alors :

- *$f(I)$ est un intervalle de même nature que I,*
- *$f : I \to f(I)$ est une application bijective,*
- *$f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et strictement monotone sur $f(I)$.*
  Plus précisément, f^{-1} possède le même sens de monotonie que f.

Démonstration.

- $f(I)$ est un intervalle car c'est l'image d'un intervalle par une fonction continue (TVI - ter).
- La fonction $f : I \to f(I)$ est bijective (résultat de la Proposition 3).
- Montrons alors que $f^{-1} : f(I) \to I$ est aussi strictement monotone.
  Supposons f strictement croissante (le cas f décroissante est similaire).
  Il s'agit de montrer : $\forall (u_1, u_2) \in (f(I))^2,\ u_1 < u_2 \Rightarrow f^{-1}(u_1) < f^{-1}(u_2)$.

  Soient u_1 et u_2 deux éléments de $f(I)$. Ainsi :
  - × il existe $x_1 \in I$ tel que $u_1 = f(x_1)$,
  - × il existe $x_2 \in I$ tel que $u_2 = f(x_2)$.

  D'où $f^{-1}(u_1) = f^{-1}(f(x_1)) = x_1$ et $f^{-1}(u_2) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2$.
  L'implication à montrer s'écrit donc : $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$.
  On la démontre par contraposée :
  si $x_1 \geqslant x_2$ alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ car f est croissante.
- Il reste à démontrer que f^{-1} est continue sur $f(I)$. Admis. □

VI. Dérivabilité sur un intervalle

VI.1. Dérivabilité en un point

Dans la suite, on notera $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et on notera x_0 un point de I.

Définition

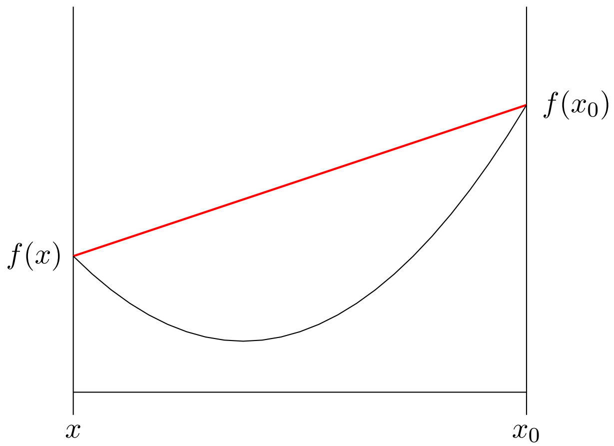
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

On appelle **taux d'accroissement** de f en x_0 la fonction :

$$\tau_{x_0}(f) \ : \ \left| \begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array} \right.$$

Interprétation graphique

Notons $M(x, f(x))$ et $M_0(x_0, f(x_0))$ points de la courbe représentative de f.
Alors $\tau_{x_0}(f)(x)$ est la pente de la corde M_0M.



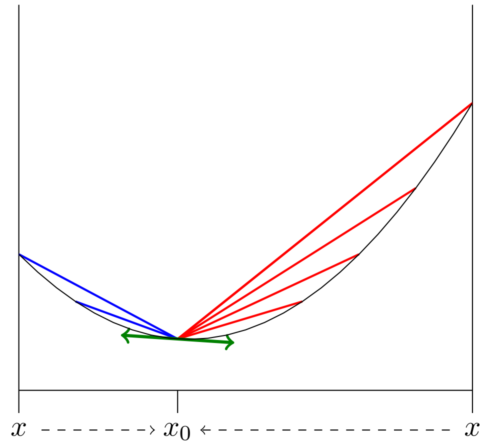
Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

- On dit que f **est dérivable en** x_0 lorsque la fonction $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie en x_0.
- Lorsque cette limite existe, elle est appelée **nombre dérivé de** f **en** x_0 et est noté $f'(x_0)$. Autrement dit :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Interprétation graphique



VI.2. Propriétés des fonctions dérivables en un point

Théorème 7.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } x_0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ est continue en } x_0}$$

Démonstration.
Supposons que f est dérivable en $x_0 \in I$ et soit $x \neq x_0$.

Par définition, on a : $\tau_{x_0}(f)(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Ainsi : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, \tau_{x_0}(f)(x)$.

On en déduit que f est continue en x_0 car somme de :

× $x \mapsto f(x_0)$ continue en x_0 car constante.

× $x \mapsto (x - x_0)\, \tau_{x_0}(f)(x)$ continue en x_0 car produit de :

  (i) $x \mapsto x - x_0$ continue en x_0 car polynomiale,

  (ii) $x \mapsto \tau_{x_0}(f)(x)$ continue en x_0 car f est dérivable en x_0. □

Remarque
La réciproque est fausse. Contre-exemples à cette réciproque :

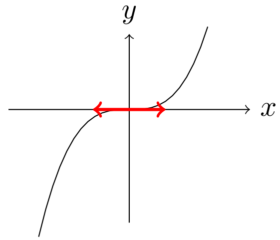
- La fonction $x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 mais pas dérivable en 0.
- Les fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ $(n > 1)$ continues en 0 mais pas dérivables en 0.

Théorème 8.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathring{I}$.
(x_0 n'est pas une extrémité de I : c'est un point intérieur à I)

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ est dérivable en } x_0 \\ f \text{ admet un extremum local en } x_0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0}$$

Remarque
La réciproque est fausse.
Le contre exemple classique est la fonction $x \mapsto x^3$ qui est de dérivée nulle en 0 mais qui n'atteint pas de maximum (resp. minimum) en ce point.



VI.3. Tangente de f en x_0

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

- Si f est dérivable en x_0, on appelle **tangente de f en x_0** la droite passant par $(x_0, f(x_0))$ de cœfficient directeur $f'(x_0)$.
- Autrement dit, c'est la droite d'équation : $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)\ (x - x_0)}$

Définition *(Tangente de la forme $x = x_0$)*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

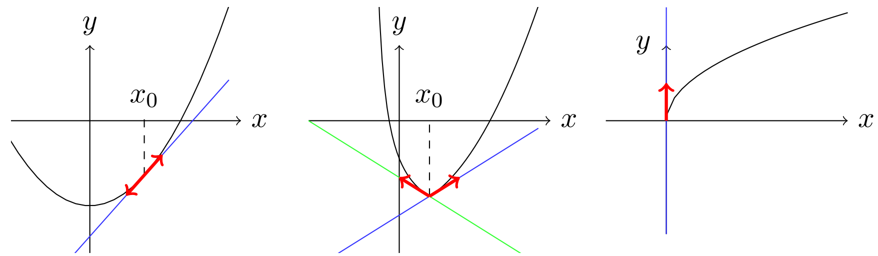
Supposons que :

× f est continue en x_0

× $\lim\limits_{x \to x_0} \tau_{x_0}(f)(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) *(f est donc non dérivable en x_0)*

- On appelle **tangente verticale de f en x_0** la droite verticale passant par le point $(x_0, f(x_0))$.
- Autrement dit, c'est la droite d'équation $x = x_0$.

Représentation graphique



Tangente   Demi-tangentes   Tangente verticale

VI.4. Dérivabilité globale

VI.4.a) Notion de fonction dérivable sur un ensemble

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- La fonction f est dite **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point de I. On appelle alors **fonction dérivée** et on note f' la fonction suivante.

$$f' : \left| \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$$

- Une fonction est dite dérivable sur une réunion finie d'intervalles D si elle est dérivable sur chacun des intervalles composant D.
  (la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$:
  en effet, elle est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.)

VI.4.b) Dérivabilité et opérations algébriques

Théorème 9.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Supposons que f et g sont dérivables sur I.

Alors les fonctions $f + g$, λf, $f \times g$ sont dérivables sur I.

Si de plus, g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur I.

VI.4.c) Dérivabilité des fonctions composées

Théorème 10.

Soient $h : J \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ avec $g(I) \subset J$.

Supposons g est dérivable sur I et que h est dérivable sur J.

Alors $h \circ g : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I et $\boxed{(h \circ g)' = (h' \circ g) \times g'}$

VI.4.d) Dérivabilité des fonctions réciproques

Théorème 11.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ (où I est un intervalle).

Supposons que f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

Supposons que f est dérivable sur I.

Supposons que f' ne s'annule pas sur I.

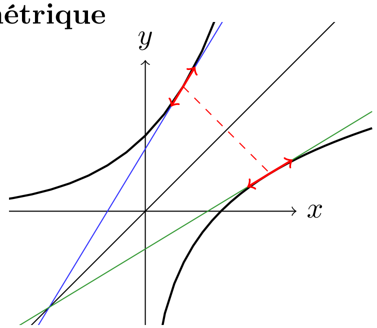
Alors $f^{-1} : f(I) \to I$ est dérivable sur $f(I)$, et : $\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}}$

Remarque

- L'hypothèse de bijectivité est généralement obtenue par le théorème de la bijection. On rappelle que si f est continue et strictement croissante sur I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
- On peut retrouver la formule du théorème via l'égalité $f \circ f^{-1} = \text{id}$.
  En effet, en dérivant formellement cette égalité, on obtient :

$$\left(f' \circ f^{-1}\right) \times \left(f^{-1}\right)' = 1$$

Interprétation géométrique



- La formule : $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ signifie que le coefficient directeur de la tangente en y_0 de f^{-1} est l'inverse de la tangente en x_0 de f.

- Les tangentes de f^{-1} en y_0 et de f en x_0 sont symétriques par rapport à l'axe $y = x$.

VI.5. Dérivées successives

VI.5.a) Définition

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

Supposons que f est dérivable sur I.

- On dit que f est n **fois dérivable** sur I si :
  - × f est $n-1$ fois dérivable sur I,
  - × $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I.

  On note alors : $f^{(n)} = (f^{(n-1)})' : I \to \mathbb{R}$.
- On dit que f est **indéfiniment dérivable** sur I si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur I.

VI.5.b) Caractère $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est de **classe $\mathcal{C}^n$ sur** I si
  - × f est n fois dérivable sur I,
  - × $f^{(n)}$ est continue sur I.
- Ainsi, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I si f est continue sur I.
- Enfin, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur I.

VI.5.c) Opérations algébriques sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème 12.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que f et g sont n fois dérivables (resp. $\mathcal{C}^n/\mathcal{C}^\infty$) sur I.

- *Les fonctions $f+g$, λf, $f \times g$ sont n fois dérivables (resp. $\mathcal{C}^n/\mathcal{C}^\infty$) sur I.*
- *Si la fonction g ne s'annule pas sur I alors le quotient $\dfrac{f}{g}$ est n fois dérivable (resp. $\mathcal{C}^n/\mathcal{C}^\infty$) sur I.*

De plus, si f et g sont n fois dérivables, on a la formule suivante, dite formule de Leibniz : $\boxed{(f \times g)^{(n)} \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} \ f^{(n-k)} \times g^{(k)}}$

VI.5.d) Composées de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Théorème 13.

Soient $h : J \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $g(I) \subset J$.

Supposons que h est n fois dérivable (resp. $\mathcal{C}^n/C^\infty$) sur J.

Supposons que g est n fois dérivable (resp. $\mathcal{C}^n/C^\infty$) sur I.

Alors $h \circ g : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable (resp. $\mathcal{C}^n/C^\infty$) sur I.

VII. Les grands théorèmes de la dérivabilité sur un intervalle

VII.1. Théorème de Rolle

Théorème 14.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

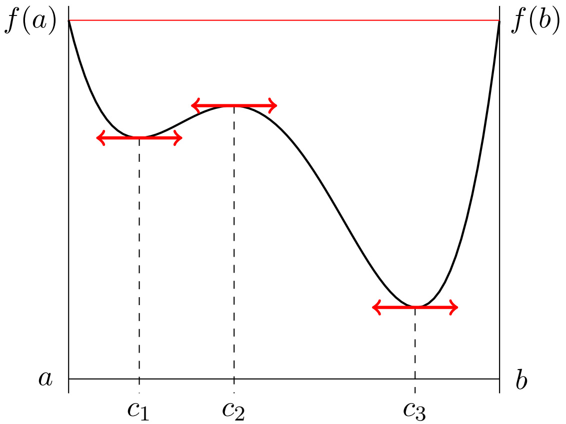
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a,b] \\ \bullet\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ \bullet\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ il existe } c \in\,]a,b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

On peut aussi opter pour la formulation (légèrement différente) suivante.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $(a, b) \in I^2$ où I est un intervalle.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ dérivable sur un intervalle } I \\ \bullet\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ il existe } c \in\,]a,b[\text{ tel que } f'(c) = 0$$

Interprétation géométrique.



La courbe représentative de f possède (au moins) une tangente parallèle à l'axe des abscisses (et donc parallèle à la corde joignant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$).

Démonstration.

- Tout d'abord, on sait qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
  Ainsi, $f([a, b]) = [m, M]$ où $m = \min\limits_{[a,b]} f = f(c_1)$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f = f(c_2)$ avec $c_1 \in [a, b]$ et $c_2 \in [a, b]$.
- Le but est alors de démontrer que l'un de ces deux extrema est atteint sur $]a, b[$. Si c'est le cas, on conclut par le théorème 8 que $f'(c) = 0$.
- On distingue alors deux cas :
  1) Si $m = M$ alors pour tout $x \in [a, b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M = m$.
  Donc f est constante sur $[a, b]$.
  Ainsi $f' = 0$ sur $[a, b]$ et tout $c \in\,]a, b[$ est tel que $f'(c) = 0$.

  2) Si $m \neq M$, trois cas se présentent :
  - × soit $c_1 = a$: on démontre dans ce cas que $c_2 \in\,]a, b[$.
    Comme $c_1 = a$, on a $m = f(c_1) = f(a)$. Rappelons que $M = f(c_2)$.
    $c_2 \neq a$ (sinon $f(c_2) = f(a)$ et alors $M = f(a) = m$),
    $c_2 \neq b$ (sinon $f(c_2) = f(b)$ et alors $M = f(b) = f(a) = m$).
    Ainsi, $c_2 \in\,]a, b[$. Enfin, comme f est dérivable en $c_2 \in\,]a, b[$ et y atteint son maximum, on a $f'(c_2) = 0$.
  - × soit $c_1 \in\,]a, b[$: comme f est dérivable en $c_1 \in\,]a, b[$ et y atteint son minimum, on a $f'(c_1) = 0$.
  - × soit $c_1 = b$: on démontre, comme dans le premier cas que $c_2 \in\,]a, b[$.
    Comme $c_1 = b$, on a $m = f(c_1) = f(b)$. Rappelons que $M = f(c_2)$.
    $c_2 \neq a$ (sinon $f(c_2) = f(a)$ et alors $M = f(a) = f(b) = m$),
    $c_2 \neq b$ (sinon $f(c_2) = f(b)$ et alors $M = f(b) = m$).
    Ainsi, $c_2 \in\,]a, b[$. Enfin, comme f est dérivable en $c_2 \in\,]a, b[$ et y atteint son maximum, on a $f'(c_2) = 0$.

□

VII.2. Théorème des accroissements finis

Théorème 15.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

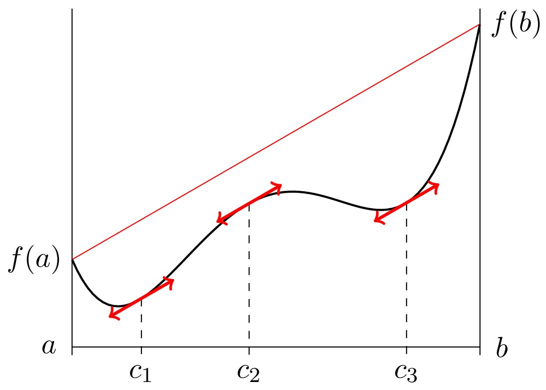
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a,b] \\ \bullet\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \text{il existe } c \in\ ]a,b[\text{ tel que} \\ f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \end{array}$$

Démonstration.
Il s'agit de comparer f à sa corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.
Cette corde a pour équation $y = g(x)$ où g est définie par :

$$g : x \mapsto f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ (x - a)$$

appliquer le théorème de Rolle à la fonction $h = f - g$. □

Interprétation géométrique.



La courbe représentative de f possède (au moins) une tangente parallèle à sa corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

VII.3. Inégalité des accroissements finis

Théorème 16.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ continue sur } [a,b] \\ \bullet\ f \text{ dérivable sur }]a,b[\\ \bullet\ \text{il existe } m \text{ et } M \text{ tels que} \\ \quad \forall u \in\ ]a,b[,\ m \leqslant f'(u) \leqslant M \end{array}\right\} \Rightarrow\ m \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$$

On peut aussi opter pour la formulation suivante.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $(x, y) \in I^2$ où I est un <u>intervalle</u>.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \text{ dérivable sur } I \\ \bullet\ \text{il existe } M \geqslant 0, \\ \quad \forall u \in I,\ |f'(u)| \leqslant M \end{array}\right\} \Rightarrow\ \forall (x,y) \in I^2,\ |f(y) - f(x)| \leqslant M\ |y - x|$$

Application à l'étude de suites de type $u_{n+1} = f(u_n)$

Théorème 17 (*le redémontrer dans chaque exercice*)**.**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I intervalle.

On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{array}\right.$

Supposons que f est dérivable sur I.

Supposons qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que : $\forall u \in I,\ |f'(u)| \leqslant M$.

Supposons que I est stable par f (i.e. $f(I) \subset I$).

Supposons que f admet un point fixe $\ell \in I$ (i.e. $f(\ell) = \ell$).

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n \in I}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{|u_{n+1} - \ell| \leqslant M\ |u_n - \ell|}$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{|u_n - \ell| \leqslant M^n\ |u_0 - \ell|}$

4) Si on sait de plus que $0 \leqslant M < 1$, alors (u_n) est convergente, de limite ℓ.

VIII. Dérivation et sens de variation

VIII.1. Caractérisation des fonctions monotones par le signe de la dérivée

Théorème 18.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I (où I intervalle de $\mathbb{R}$).

a)	*f est croissante sur I*	$\Leftrightarrow$	*f' est positive ou nulle sur I*
b)	*f est décroissante sur I*	$\Leftrightarrow$	*f' est négative ou nulle sur I*
c)	*f est constante sur I*	$\Leftrightarrow$	*f' est nulle sur I*

d)	*f' strictement positive sur I*	$\Rightarrow$	*f strictement croissante sur I*
e)	*f' strictement négative sur I*	$\Rightarrow$	*f strictement décroissante sur I*

Remarque
Il n'y a pas équivalence. Pour s'en convaincre, on peut considérer par exemple la fonction $f : x \mapsto x^3$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais dont la dérivée $f' : x \mapsto 3x^2$ n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$ (car $f'(0) = 0$).

Théorème 19.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I (où I intervalle de $\mathbb{R}$).

a)	*$f' \geqslant 0$ sur I et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points*	$\Rightarrow$	*f strictement croissante sur I*
b)	*$f' \leqslant 0$ sur I et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points*	$\Rightarrow$	*f strictement décroissante sur I*

VIII.2. Extremum local d'une fonction dérivable

Théorème 20.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I (où I intervalle de $\mathbb{R}$).

Soit $x_0 \in \mathring{I}$.

f' s'annule en changeant de signe en $x_0 \in \mathring{I}$	$\Rightarrow$	*f admet un extremum local en $x_0 \in \mathring{I}$*

Démonstration.
Supposons que f' s'annule en changeant de signe en x_0.
Il existe donc $\alpha > 0$ tel que (par exemple) :

- $f' \leqslant 0$ sur $[x_0 - \alpha, x_0[$.
  La fonction f est donc décroissante sur $[x_0 - \alpha, x_0[$.
- $f' \geqslant 0$ sur $]x_0, x_0 + \alpha]$.
  La fonction f est donc croissante sur $]x_0, x_0 + \alpha]$.

Ainsi, elle admet un minimum en x_0.

x	$x_0 - \alpha$		x_0		$x_0 + \alpha$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	

$\square$

IX. Fonctions convexes

IX.1. Définition et premières caractérisations

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- La fonction f est dite **convexe** sur l'intervalle I si :

$$\left.\begin{array}{l} \forall (x_1, x_2) \in I^2 \\ \forall (t_1, t_2) \in [0,1]^2 \\ \text{ tels que } t_1 + t_2 = 1, \end{array}\right\} \quad f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \ \leqslant\ t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$$

- De manière équivalente, f est **convexe** sur I si

$$\left.\begin{array}{l} \forall (x_1, x_2) \in I^2 \\ \forall \lambda \in [0,1] \end{array}\right\} \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \ \leqslant\ \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

- La fonction f est dite **concave** sur l'intervalle I si $-f$ est convexe sur I. Autrement dit, f est concave sur I si :

$$\left.\begin{array}{l} \forall (x_1, x_2) \in I^2 \\ \forall \lambda \in [0,1] \end{array}\right\} \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \ \geqslant\ \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

(permet de traduire les propriétés de convexité pour les fonctions concaves)

Remarque

- De manière générale, si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ avec $v > u$, alors

$$\{\lambda u + (1-\lambda) v \mid \lambda \in [0,1]\} = [u, v]$$

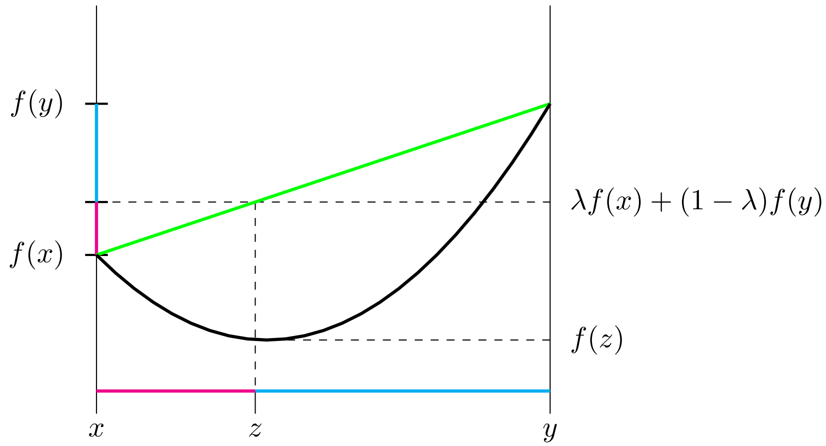
- Ceci se démontre facilement par double inclusion :

($\subseteq$) Si $z = \lambda u + (1-\lambda) v$ pour $\lambda \in [0,1]$, alors $z \geqslant \lambda u + (1-\lambda) u = u$ et $z \leqslant \lambda v + (1-\lambda) u = v$.

($\supseteq$) Si $z \in [u, v]$, il suffit de poser $\lambda = \dfrac{z-v}{u-v}$.

Interprétation graphique.

- L'inégalité de convexité correspond donc à comparer l'image par f d'un point de $[x_1, x_2]$ avec un point de $[f(x_1), f(x_2)]$.
- Plus précisément, cette inégalité signifie que si A et B sont deux points de la courbe représentative de f alors l'arc de courbe joignant A à B est situé en dessous de la corde de f joignant A à B.



Proposition 5.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

f est convexe sur I si et seulement si **pour tout** $x_0 \in I$ *:*

la fonction $\tau_{x_0}(f) : \begin{array}{|ccc} I \setminus \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array}$ *est croissante*

IX.2. Convexité et dérivabilité

Théorème 21.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I.

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } I \ \Leftrightarrow \ f' \text{ est croissante sur } I}$$

Théorème 22.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur I.

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } I \ \Leftrightarrow \ f'' \text{ est positive sur } I}$$

Théorème 23.

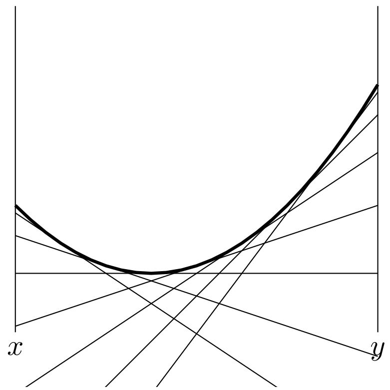
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur I.

f est convexe sur I	$\Leftrightarrow$	*La courbe de f est située au-dessus de ses tangentes :* $\forall (a,x) \in I^2,\ f(x) \ \geqslant \ f(a) + (x-a) f'(a)$

Application

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$
- $\forall x \in \,]0, +\infty[,\ \ \ln x \leqslant x - 1$

Interprétation graphique.



Remarque

Encore une fois, il faut traduire ces propriétés dans le cas où la fonction f est concave. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On a alors :

f est concave sur I	$\Leftrightarrow$	f' est décroissante sur I
	$\Leftrightarrow$	f'' est négative sur I
	$\Leftrightarrow$	La courbe de f est située sous ses tangentes : $\forall (a,x) \in I^2,\ \ f(x) \ \leqslant \ f(a) + (x-a) f'(a)$

IX.3. Point d'inflexion

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in I$.

- Le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f si f change de convexité en ce point.
- Plus précisément, deux cas sont possibles.

1) $\exists \alpha > 0, \ \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0],\ f \text{ est concave} \\ \textit{(la courbe de } f \textit{ est située en dessous de sa tangente en } x_0\textit{)} \\ \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha],\ f \text{ est convexe} \\ \textit{(la courbe de } f \textit{ est située au-dessus de sa tangente en } x_0\textit{)} \end{array} \right.$

2) $\exists \alpha > 0, \ \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in [x_0 - \alpha, x_0],\ f \text{ est convexe} \\ \textit{(la courbe de } f \textit{ est située au-dessus de sa tangente en } x_0\textit{)} \\ \forall x \in [x_0, x_0 + \alpha],\ f \text{ est concave} \\ \textit{(la courbe de } f \textit{ est située en dessous de sa tangente en } x_0\textit{)} \end{array} \right.$

- En un tel point $(x_0, f(x_0))$, la tangente de f en x_0 traverse la courbe de f.

Théorème 24.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur I et soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.

$(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe de f	$\Leftrightarrow$	*f'' s'annule et change de signe en x_0*

X. Relations de comparaisons et théorème des croissances comparées

X.1. Négligeabilité

Définition

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de x_0.

- On dit que f **est négligeable devant** g **en** x_0 si :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

- Si c'est le cas, on dit que « f est un petit o de g en x_0 » (o $=$ 15$^{\text{ème}}$ lettre de l'alphabet) et on note : $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\, g(x)$.

X.2. Croissances comparées

Théorème 25.

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, \ \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0}$$

et

$$\boxed{\forall a > 0, \forall q > 1, \ \lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{q^x} = 0}$$

X.3. Équivalence

X.3.a) Définition

Définition

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Supposons que g ne s'annule pas dans un voisinage épointé de x_0.

- On dit que f **est équivalente à** g **en** x_0 et on note $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$ si :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$$

X.3.b) Propriétés générales

Théorème 26.

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, des fonctions.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$).
(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de x_0)

La relation $\underset{x \to x_0}{\sim}$ vérifie les propriétés suivantes.

1) Réflexivité :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)}$$

2) Symétrie :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \ \Rightarrow \ g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)}$$

3) Transitivité :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x) \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x)}$$

X.3.c) Équivalents et limites

Théorème 27.

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, des fonctions.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$). (lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de x_0)

1) *Calcul de limites à l'aide d'un équivalent :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell}$$

(avec ℓ limite éventuellement infinie)

2) *Calcul d'équivalents à l'aide d'une limite :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \ell}$$

(avec ℓ limite finie)

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)}$$

(avec ℓ limite finie)

Remarque

L'hypothèse $\ell \neq 0$ est primordiale pour les propriétés du point *2*.

Par exemple :

$$\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{mais} \quad \frac{1}{x} \cancel{\underset{x\to+\infty}{\sim}} \frac{1}{x^2}$$

X.3.d) Calculs d'équivalents en pratique : compatibilité avec le produit, le quotient, l'élévation à la puissance α

Théorème 28.

Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, des fonctions.

Soit $x_0 \in \overline{I}$ ou $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$) si I est d'extrémité $+\infty$ (resp. $-\infty$). (lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces fonctions ne s'annulent pas dans un voisinage épointé de x_0)

1) *Compatibilité avec le produit :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)\times h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\times t(x)}$$

2) *Compatibilité avec le quotient :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \frac{g(x)}{t(x)}}$$

3) *Compatibilité avec l'élévation à la puissance $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \quad \Rightarrow \quad \big(f(x)\big)^n \underset{x\to x_0}{\sim} \big(g(x)\big)^n}$$

4) *Compatibilité avec l'élévation à la puissance $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ g > 0 \text{ dans un voisinage de } x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \big(f(x)\big)^\alpha \underset{x\to x_0}{\sim} \big(g(x)\big)^\alpha}$$

5) *Compatibilité avec la valeur absolue :*

$$\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \quad \Rightarrow \quad \big|f(x)\big| \underset{x\to x_0}{\sim} \big|g(x)\big|}$$

XI. Notion de développement limité

XI.1. Développement limité à l'ordre 1 au voisinage d'un point

XI.1.a) $\mathrm{DL}_1(x_0)$ et approximation affine de f en x_0

Définition (et théorème d'existence d'un $\mathrm{DL}_1(x_0)$)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

- On dit que f possède **un développement limité d'ordre 1 en x_0** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie au voisinage de x_0) tels que, au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = a + b\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0}$$

- L'existence d'un $\mathrm{DL}_1(x_0)$ équivaut à la dérivabilité de f en x_0. Plus précisément, le résultat suivant est vérifié.

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ est dérivable} \\ \text{en } x_0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} f \text{ admet un développement limité} \\ \text{d'ordre 1 en } x_0 \end{array}}$$

Lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont : $\left\{ \begin{array}{l} a = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \end{array} \right.$

Ainsi, si f est dérivable en x_0, il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + (x - x_0)\,\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0}$$

XI.1.b) $\mathrm{DL}_1(x_0)$ et négligeabilité / équivalence

Formule de Taylor-Young (à l'ordre 1)

Si f est dérivable en x_0, son $\mathrm{DL}_1(x_0)$ s'écrit sous la forme :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)}$$

Exemple

Avec cette notation, au voisinage de 0, on a :

$$\boxed{\ln(1 + x) = x + \underset{x \to 0}{o}(x)} \qquad \boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \underset{x \to 0}{o}(x)}$$

$$\boxed{\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}\,x + \underset{x \to 0}{o}(x)} \qquad \boxed{\frac{1}{1 + x} = 1 - x + \underset{x \to 0}{o}(x)}$$

Remarque

Il est à noter que le premier terme non nul de ces développements fournit un équivalent de la fonction considérée.

On retrouve ainsi : $\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x \quad$ (*i.e.* $\dfrac{\ln(1 + x)}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$).

XI.2. Développement limité à l'ordre 2 au voisinage d'un point

XI.2.a) Définition

Définition $\mathrm{DL}_2(x_0)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

- On dit que f possède **un développement limité d'ordre 2 en x_0** s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$ une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie au voisinage de x_0) tels que, au voisinage de x_0 :

$$\boxed{f(x) = a + b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\,\varepsilon(x) \text{ et } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0}$$

- Ce que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{f(x) = a + b\,(x - x_0) + c\,(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^2\big)}$$

XI.2.b) Formule de Taylor-Young

Théorème 29.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

f est deux fois dérivable en x_0	$\Rightarrow$	*f admet un développement limité d'ordre 2 en x_0*

- *Lorsque ce développement limité existe, ses coefficients sont :*

$$\left\{\begin{array}{l} a = f(x_0) \\ b = f'(x_0) \\ c = \dfrac{f''(x_0)}{2} \end{array}\right.$$

- *Ainsi, si f est deux fois dérivable en x_0, il existe $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (définie au voisinage de x_0) telle que, au voisinage de x_0 :*

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x-x_0)^2 + (x-x_0)^2\,\varepsilon(x)}$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

- *Ce que l'on peut encore écrire :*

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x-x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}\big((x-x_0)^2\big)}$$

Remarque

Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) en x_0, on peut écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre n :

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n + \underset{x\to x_0}{o}\big((x-x_0)^n\big)}$$

XI.2.c) Développements limités usuels en 0

Théorème 30.

Rappelons que si f est deux fois dérivable en 0 alors son $\mathrm{DL}_2(0)$ s'écrit :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)$$

- $\boxed{e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)}$
- $\boxed{\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)}$
- $\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\big(x^2\big)}$

XI.2.d) Calcul pratique des développements limités

Théorème 31. *(manipulation pratique des $\underset{x\to 0}{o}(.)$)*

Afin de déterminer de matnière mécanique le $\mathrm{DL}_2(0)$ d'une somme ou d'un produit de fonctions, on pourra utiliser les propriétés suivantes.

Pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

1) $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) + \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big)}$ *2)* $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) - \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big)}$

3) Si on suppose de plus $m < n$: $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\big(x^m\big) + \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^m\big)}$

4) $\boxed{x^m \times \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^{m+n}\big)}$

5) $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\big(x^m\big) \times \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^{m+n}\big)}$

6) Pour tout $c \in \mathbb{R}$: $\boxed{\underset{x\to 0}{o}\big(c\,x^n\big) = \underset{x\to 0}{o}\big(x^n\big)}$

Développement limités et composition

On peut aussi, sous certaines hypothèses, agir par composition. Considérons une fonction f définie dans un voisinage de 0 et deux fois dérivable en 0.

- D'après la formule de Taylor-Young, pour tout u au voisinage de 0, on a :

$$f(u) = f(0) + f'(0)\, u + \frac{f''(0)}{2}\, u^2 + u^2\, \varepsilon(u)$$

  où ε est une fonction définie au voisinage de 0 et telle que : $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0$.
  Soit x dans un voisinage de 0. Alors $u = 2x$ est lui aussi dans un voisinage de 0. En appliquant l'égalité précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} f(2x) &= f(0) + f'(0)\,(2x) + \frac{f''(0)}{2}\,(2x)^2 + (2x)^2\, \varepsilon(2x) \\ &= f(0) + 2\, f'(0) x + 2\, f''(0)\, x^2 + x^2\, \big(4\, \varepsilon(2x)\big) \end{aligned}$$

  Et comme, par composition de limite : $\lim\limits_{x \to 0} 4\, \varepsilon(2x) = 4 \times 0 = 0$, l'égalité au-dessus est bien le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $g : x \mapsto f(2x)$.
- On peut procéder de même pour $u = \psi(x)$ si l'on sait que $\psi(x)$ est dans un voisinage de 0 lorsque x l'est (autrement dit pour une fonction ψ telle que : $\psi(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$). On définit alors le $\mathrm{DL}_2(0)$ de la fonction $g : x \mapsto f\big(\psi(x)\big)$.
- Il est conseillé, lorsque l'on souhaite écrire un $\mathrm{DL}_2(0)$ à l'aide d'une composition, de repasser par l'écriture à l'aide des fonctions ε.

XI.2.e) Position locale d'une courbe par rapport à sa tangente

Théorème 32.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.

On suppose que f est définie dans un voisinage de x_0.

On supppose de plus que f est deux fois dérivable en x_0.

On a alors, dans un voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^2\big)$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\big) &= \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \underset{x \to x_0}{o}\big((x - x_0)^2\big) \\ &\underset{x \to x_0}{\sim} \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 \end{aligned}$$

La position locale de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en x_0 est donnée par le signe de $f''(x_0)$. Plus précisément :

× *si $f''(x_0) > 0$, alors, au voisinage de x_0, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de sa tangente.*

× *si $f''(x_0) < 0$, alors, au voisinage de x_0, $\mathcal{C}_f$ est située en-dessus de sa tangente.*