Applications linéaires, matrices et réduction

I. Applications linéaires

I.1. Notion d'application linéaire

I.1.a) Définition

Définition

Soient E et F des espaces vectoriels.

- Une application $f : E \to F$ est dite **linéaire** si :

$$\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2,\ f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y})$$

(l'image d'une somme est la somme des images)

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \overrightarrow{x} \in E^2,\ f(\lambda \cdot \overrightarrow{x}) = \lambda \cdot f(\overrightarrow{x})$$

(l'image d'une multiplication par un scalaire est la multiplication scalaire de l'image)

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.
- Lorsque $E = F$, on notera simplement $\mathscr{L}(E)$.
  Une application linéaire de E dans E est appelée **endomorphisme** de E.

I.1.b) Exemple fondamental

Théorème 1.

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Soit $h \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$.

Alors, il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telle que h s'écrit sous la forme :

$$h \ : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & MX \end{array} \right.$$

I.2. Structure de l'ensemble des applications linéaires

Théorème 2.

Soient E et F des espaces vectoriels.

- *L'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est muni :*
  - × *d'une loi de composition interne, notée $+$*
    Pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$, pour tout $v \in \mathscr{L}(E, F)$, $u + v$ est l'application linéaire de E dans F définie par :

$$u + v : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \overrightarrow{x} & \mapsto & u(\overrightarrow{x}) + v(\overrightarrow{x}) \end{array}$$

  - × *d'une loi de composition externe, notée $\cdot$*
    Pour tout $u \in \mathscr{L}(E, F)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot u$ est l'application linéaire de E dans F définie par :

$$\lambda \cdot u : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ \overrightarrow{x} & \mapsto & \lambda \cdot u(\overrightarrow{x}) \end{array}$$

- *L'espace $\mathscr{L}(E, F)$ muni de $+$ et $\cdot$ est un espace vectoriel.*

I.3. Notion d'isomorphisme, d'automorphisme

I.3.a) Définition

Définition

Soient E et F des espaces vectoriels.

- Une application $u : E \to F$ est un **isomorphisme de E dans F** si :
  (i) $u \in \mathscr{L}(E, F)$.
  (ii) u est bijective.
  S'il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que E et F sont isomorphes.
- Une application $u : E \to E$ est un **automorphisme de E dans F** si :
  (i) $u \in \mathscr{L}(E)$ (autrement dit, u est un endomorphisme de E).
  (ii) u est bijective.

Rappels de première année

Soient E et F des ensembles.

Soit $f : E \to F$ une application. On suppose que f est bijective.

- On appelle **application réciproque de** f et on note $f^{-1} : F \to E$:

$$\begin{array}{rccl} f^{-1} : & F & \to & E \\ & y & \mapsto & f^{-1}(y) \quad : \begin{array}{l}\text{l'unique antécédent de } y \\ \text{par l'application } f\end{array} \end{array}$$

Ainsi : $\forall x \in E, \forall y \in F,$ $\boxed{y = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x}$

- Si $f : E \to F$ application bijective, les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. L'application f^{-1} est bijective et de récirpoque f : $\boxed{\left(f^{-1}\right)^{-1} = f}$

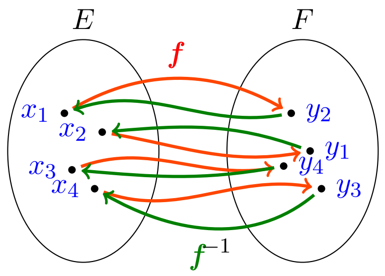
2. a) $\boxed{\forall y \in F, \ \ f(f^{-1}(y)) = y}$

b) $\boxed{\forall x \in E, \ \ f^{-1}(f(x)) = x}$

3. Si $f : E \to F$ et $g : F \to E$ sont deux applications, alors :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} g \circ f = \mathrm{id}_E \\ f \circ g = \mathrm{id}_F \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l}\text{Les applications } f \text{ et } g \text{ sont bijectives et} \\ \text{réciproques l'une de l'autre :} \\ \qquad g = f^{-1} \quad \text{et} \quad f = g^{-1}\end{array}}$$

Représentation graphique.



- Une application $f : E \to F$ bijective établit une correspondance un à un entre des éléments de E vers les éléments de F.
- Son application réciproque f^{-1} établit la même correspondance mais dans l'autre sens : des éléments de F vers les éléments de E.

I.3.b) Application réciproque d'un isomorphisme

Théorème 3.

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

- *Supposons que u est un isomorphisme de E dans F.*
  Alors l'application réciproque u^{-1} est un isomorphisme de F dans E.
  (en particulier, $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$)
- *Supposons que u et v sont des isomorphismes.*

  1) *Alors $v \circ u : E \to G$ est un isomorphisme de E.*
  (on a notamment $v \circ u \in \mathscr{L}(E, G)$)

  2) *De plus :* $\boxed{(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}}$

II. Noyau et image d'une application linéaire

II.1. Noyau d'une application linéaire

II.1.a) Définition

Définition

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- On appelle **noyau de** f et on note $\text{Ker}(f)$ l'ensemble :

$$\boxed{\text{Ker}(f) = \{\overrightarrow{x} \in E \mid f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0_F}\}}$$

- Le noyau $\text{Ker}(f)$ d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de E.

II.1.b) Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau

Théorème 4.

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{f \textit{ injective} \Leftrightarrow \text{Ker}(f) = \{\overrightarrow{0_E}\}}$$

II.2. Image d'une application linéaire

II.2.a) Définition

Définition

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- On appelle **image de** f et on note $\text{Im}(f)$ l'ensemble :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{\overrightarrow{y} \in F \mid \exists \overrightarrow{x} \in E,\ y = f(\overrightarrow{x})\} \\ &= \{f(\overrightarrow{x}) \in F \mid \overrightarrow{x} \in E\} \end{aligned}}$$

- L'image $\text{Im}(f)$ d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F.

II.2.b) Caractérisation de la surjectivité d'une application

Théorème 5.

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{f \textit{ surjective} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = F}$$

III. Applications linéaires en dimension finie

III.1. Image d'une application linéaire en dimension finie

Théorème 6.

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Suppposons E de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_n})$ une base de E.

$$\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_n})\right)}$$

III.2. Une première caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité en dimension finie

Théorème 7.

Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions finies.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

	u est injective
$\Leftrightarrow$	*L'image par f de toute famille libre finie de E est une famille (finie) libre de F.*

	u est surjective
$\Leftrightarrow$	*L'image par f de toute famille génératrice finie de E est une famille (finie) génératrice de F.*

	u est bijective
$\Leftrightarrow$	*L'image par f de toute base finie de E est une base (finie) de F.*

III.3. Rang d'une application linéaire

Définition

Soient E et F des ev de dimensions finies.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

On appelle rang de l'application f et on note $\text{rg}(F)$:

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

Théorème 8 (Théorème du rang)**.**

Soit E et F des espaces vectoriels.

On suppose que E est **de dimension finie**.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \dim(E) & = & \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \\ & = & \dim(\ker(f)) + \text{rg}(f) \end{array}}$$

III.4. Caractérisation de l'injectivité / surjectivité / bijectivité en dimension finie

Théorème 9.

Soient E et F des ev de dimensions finies.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Alors :

$$\boxed{f \textit{ est injective} \ \Leftrightarrow\ \text{rg}(f) = \dim(E)}$$

$$\boxed{f \textit{ est surjective} \ \Leftrightarrow\ \text{rg}(f) = \dim(F)}$$

Théorème 10.

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie.

On suppose que $\dim(E) = \dim(F)$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{f \textit{ est bijective} \ \Leftrightarrow\ f \textit{ est injective} \ \Leftrightarrow\ f \textit{ est surjective}}$$

$$\boxed{f \textit{ est bijective} \ \Leftrightarrow\ \ker(f) = \{\overrightarrow{0_E}\} \ \Leftrightarrow\ \text{rg}(f) = \dim(F)}$$

IV. Notion de matrice et lien avec les applications linéaires en dimension finie

Remarque

- En première année, l'esprit du programme est de considérer qu'une matrice est un tableau de nombres.
- En deuxième année, dans les chapitre Applications linéaires / Réduction, on axe sur le lien entre applications linéaires et matrices.

IV.1. Matrice colonne associée à un vecteur

Définition *Matrice colonne associée à un vecteur*

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E.

- Soit $\overrightarrow{x} \in E$. Il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que :
$$\overrightarrow{x} \ = \ x_1 \cdot \overrightarrow{e_1} + \dots + x_p \cdot \overrightarrow{e_p}$$
La base $\mathscr{B}_E$ étant fixée, le vecteur $\overrightarrow{x}$ est entièrement déterminé par la donnée du p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$, que l'on nomme **coordonnées de $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathscr{B}_E$**.
- Le vecteur $\overrightarrow{x}$ admet alors naturellement une représentation matricielle. Il s'agit du vecteur colonne :
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$$
On parle alors de **vecteur (ou matrice) colonne associé à $\overrightarrow{x}$ dans la base $\mathscr{B}$**. Dans la suite, on notera :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

IV.2. Matrice de passage

Définition

Soit E un espace vectoriel.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.

Notons $\mathscr{B} = (\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p})$ et $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e_1}', \dots, \overrightarrow{e_p}')$ deux bases de E.

- On appelle **matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$** et on note $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$, la matrice :
$$\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{e_1}') \ \dots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{e_n}')\Big)}$$
Autrement dit, la matrice obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à $\overrightarrow{e_j}'$ dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque

- On considère E un espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E. On considère enfin $\overrightarrow{x} \in E$ et on note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x})$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{x})$. Alors :
  1. $\boxed{X = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \ X'}$ ou encore $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x}) \ = \ P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{x})}$
  2. $\boxed{P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}}$
  3. La matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et : $\boxed{(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}}$
- On peut dégager de cette formule une règle d'écriture : les bases en regard de deux objets successifs doivent être les mêmes. Plus précisément :
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x}) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{x}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{x}) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x})$$
Cela revient à appliquer une règle de type « relation de Chasles ».

Remarque

On considère E un espace vectoriel de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E. Alors l'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi & : & E & \to & \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \\ & & \overrightarrow{x} & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\overrightarrow{x}) \end{array}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

- Une fois les base $\mathscr{B}_E$ fixée, ce résultat signifie que :
  - × tout vecteur $\overrightarrow{x}$ possède une unique représentation matricielle dans la base $\mathscr{B}_E$.
    (cela signifie simplement que φ est une application)
  - × réciproquement, toute matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ est la représentation matricielle d'un unique vecteur de E.
    (c'est le caractère bijectif)
- Évidemment, si $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont deux bases différentes de E, on obtient généralement des représentations matricielles $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(\overrightarrow{x})$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2}(\overrightarrow{x})$ différentes pour $\overrightarrow{x}$.

IV.3. Matrice associée à une application linéaire

IV.3.a) Matrice associée à une application linéaire

Définition

Soit E et F des espaces vectoriels.

On suppose que E est de dimension finie $p \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathscr{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ une base de E.

On suppose que F est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
On note $\mathscr{B}_F = (\overrightarrow{f_1}, \ldots, \overrightarrow{f_n})$ une base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

- On appelle **matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$** la matrice :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = \Big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(f(\overrightarrow{e_1})\big) \ \ldots \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\big(f(\overrightarrow{e_p})\big)\Big)}$$

  Autrement dit, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ obtenue par concaténation des vecteurs colonnes associés à $f(\overrightarrow{e_j})$ dans la base $\mathscr{B}_F$.

Remarque

- Si E et F sont de même dimension finie p (par exemple lorsque $E = F$), la matrice associée à f est une matrice carrée de taille n.
- On pourra retenir le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(.)"'] & F \arrow[d, "\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(.)"] \\ \mathscr{M}_{p1}(\mathbb{R}) \arrow[r] & \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

IV.3.b) Comportement de l'application Mat(.) vis à vis des opérations classiques

Théorème 11. *Isomorphisme de représentation matricielle*

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie.

On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.

Les applications :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & Mat_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & \mathscr{M}_{n}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & Mat_{\mathscr{B}_E}(f) \end{array} \right.$$

sont des isomorphismes. En particulier, on a :

$$\boxed{\dim(\mathscr{L}(E,F)) = np} \quad \text{et} \quad \boxed{\dim(\mathscr{L}(E)) = n^2}$$

Remarque

- Une fois les base $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ fixées, ce résultat signifie que :
  - × toute application linéaire f possède une unique représentation matricielle relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.
    (cela signifie simplement que φ est une application)
  - × réciproquement, toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la représentation matricielle relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ d'une unique application linéaire φ.
    (c'est le caractère bijectif)
- En plus d'être une application bijective, φ est linéaire. Ainsi, la matrice d'une combinaison linéaire d'applications est la combinaison linéaire des matrices des applications.
  Plus précisément, si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$Mat_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda_1 \cdot f + \lambda_2 \cdot g) \;=\; \lambda_1 \cdot Mat_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) + \lambda_2 \cdot Mat_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g)$$

Théorème 12.

Soient E, F, et G des vectoriels de dimensions finies.

On note $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}_F$ et $\mathscr{B}_G$ des bases respectives de E, F, et G.

1) *Pour tout $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$:*

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_G}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)}$$

(la composition des applications linéaires correspond à la multiplication des matrices associées)

2) *Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:*

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}\big(f^k\big) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(f)\big)^k}$$

(où l'on a noté $f^k = f \circ \ldots \circ f$)

Théorème 13.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

On note $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

1) $\boxed{f \text{ est bijective } \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est inversible}}$

2) *Si f est bijective alors :* $\boxed{\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(f^{-1}\big)}$

IV.3.c) Noyau d'une application linéaire via la matrice associée

Théorème 14.

Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions finies.

On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Soient $\overrightarrow{x} \in E$ et $\overrightarrow{y} \in F$.

1.
$$\boxed{\begin{aligned} \overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(\overrightarrow{y}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}\Big(f(\overrightarrow{x})\Big) \\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_F}(\overrightarrow{y}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\overrightarrow{x}) \end{aligned}}$$

2. *En particulier :* $\boxed{\overrightarrow{x} \in \mathrm{Ker}(f) \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E}(\overrightarrow{x}) = 0}$

IV.3.d) Lien entre le rang d'une application linéaire et le rang de la matrice associée

Théorème 15.

Soient E et F des espaces vectoriels de dimensions finies.

On note $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ base de F.

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f))}$$

Théorème 16.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{A \text{ est inversible} \Leftrightarrow A \text{ est la matrice associée à un isomorphisme}}$$

V. Matrices semblables

V.1. Définition

Définition *Matrices semblables*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Les matrices M et N sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que :

$$\boxed{M = PNP^{-1}}$$

V.2. Puissances $k^{\text{ème}}$ de matrices semblables

Théorème 17.

Soient M et N deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que M et N sont semblables et donc qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que : $M = PNP^{-1}$.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k = PN^kP^{-1}$.

(autrement dit, si M et N sont semblables via la matrice P, M^k et N^k le sont aussi via la même matrice P)

Exercice *(d'après* `EDHEC 2016`*)*
On considère les matrices :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = 2I + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer N^2 et en déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, N^k.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.

V.3. Lien entre relation de similitude et applications linéaires

Théorème 18.

Soit E un ev de dimension finie.

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $N = Mat_{\mathscr{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$.

1. Alors :

$$\boxed{M = P\ N\ P^{-1}}$$

ce qui signifie :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\ (P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1}}$$

2. De manière générale :

Les matrices $M \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont semblables	$\Leftrightarrow$	*M et N sont les matrices représentatives d'un même endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dans des bases différentes*

Remarque
On peut retenir cette formule sous la forme :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)\ P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}}$$

que l'on peut rapprocher une nouvelle fois de la relation de Chasles.

VI. Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

VI.1. Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

VI.1.a) Définition

Définition *(Valeur propre)*

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

- On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de l'endomorphisme f s'il existe un vecteur $u \in E$ **non nul** tel que :

$$\boxed{f(u) = \lambda\, u}$$

- L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme f est appelé **spectre de** f et est noté $\mathrm{Sp}(f)$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists u \neq 0_E,\ f(u) = \lambda\, u\}}$$

2) Cas des matrices carrées

- On dit qu'un réel λ est une **valeur propre** de la matrice A s'il existe un vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **non nul** tel que :

$$\boxed{AX = \lambda\, X}$$

- L'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée A est appelé **spectre de** A et est noté $\mathrm{Sp}(A)$.

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists X \neq 0,\ AX = \lambda\, X\}}$$

Définition *(Vecteur propre)*

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que f (resp. A) admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.
(ce n'est pas forcément le cas !)

1) Cas des endomorphismes

- On appelle **vecteur propre** de f associé à la valeur propre λ, tout vecteur **non nul** u de E tel que $f(u) = \lambda\, u$.

2) Cas des matrices carrées

- On appelle **vecteur propre** de A associé à la valeur propre λ, tout vecteur colonne $U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **non nul** tel que $AU = \lambda\, U$.

VI.1.b) Nombre maximal de valeurs propres

Théorème 19.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$ et soit $(U_1, \dots, U_p) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^p$.

Soit f un endomorphisme de E.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

u_1, ..., u_p sont vecteurs propres associés à des valeurs propres **distinctes** *λ_1, ..., λ_p de f*	$\Rightarrow$	*La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre*

On en déduit que l'endomorphisme f possède au plus n valeurs propres **distinctes**.

2) Cas des matrices carrées

$U_1, \ldots, U_p$ *sont vecteurs propres associés à des valeurs propres* **distinctes** $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ *de* A	$\Rightarrow$	*La famille* $(U_1, \ldots, U_p)$ *est libre*

On en déduit que la matrice A possède au plus n valeurs propres **distinctes**.

Théorème 20. *(Généralisation)*

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit f un endomorphisme de E.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

- *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ p valeurs propres* **distinctes** *de f.*
- *Soient $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_p$ p familles de vecteurs de E telles que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:*
  - × *les familles $\mathcal{F}_i$ sont libres.*
  - × *les vecteurs de $\mathcal{F}_i$ sont des vecteurs propres associés à λ_i.*

Alors la famille $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_p$ est une famille libre de E.

2) Cas des matrices carrées

- *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ p valeurs propres* **distinctes** *de A.*
- *Soient $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_p$ p familles de vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:*
  - × *les familles $\mathcal{F}_i$ sont libres.*
  - × *les vecteurs de $\mathcal{F}_i$ sont des vecteurs propres associés à λ_i.*

Alors la famille $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_p$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

VI.1.c) Caractérisation des valeurs propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Théorème 21.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit f un endomorphisme de E.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

λ est valeur propre de f	$\Leftrightarrow$	$\mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$
	$\Leftrightarrow$	*L'endomorphisme $f - \lambda\, \mathrm{id}_E$ n'est pas injectif*
	$\Leftrightarrow$	*L'endomorphisme $f - \lambda\, \mathrm{id}_E$ n'est pas bijectif*

2) Cas des matrices carrées

λ est valeur propre de A	$\Leftrightarrow$	$\{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid (A - \lambda I)\, U = 0\} \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$
	$\Leftrightarrow$	*La matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible*

VI.1.d) Lien entre éléments propres d'un endomorphisme et éléments propres de sa matrice représentative dans une base

Théorème 22.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathscr{B}$ une base de E.
On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
Soit $u \in E$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1) Alors : $\boxed{f(u) = \lambda u \ \Leftrightarrow\ AU = \lambda U}$

2) En conséquence :

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } f \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \text{ est valeur propre de } A}$$

$$\boxed{\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)}$$

Le vecteur u est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ	$\Leftrightarrow$	*Le vecteur colonne U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ*

MÉTHODO **Déterminer les valeurs propres d'un endomorphisme**

λ est valeur propre de f	$\Leftrightarrow$	λ est valeur propre de A
	$\Leftrightarrow$	$\exists U \neq 0,\ AU = \lambda U$
	$\Leftrightarrow$	$\exists U \neq 0,\ (A - \lambda\, I_n)\, U = 0$
	$\Leftrightarrow$	$A - \lambda I_n$ n'est pas inversible
	$\Leftrightarrow$	l'un (au moins) des coefficients diagonaux de la réduite (**triangulaire supérieure**) de $A - \lambda I_n$ est nul

Plus précisément, on procède comme suit.

1) On écrit la matrice $A - \lambda I_n$ où λ est inconnu.

2) On calcule le rang de $A - \lambda I_n$.
En opérant par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice (ce qui ne modifie pas le rang), on obtient une matrice réduite sous forme triangulaire supérieure.
(cela consiste à appliquer l'algorithme du pivot de Gauss)

3) Les valeurs propres de la matrice A sont exactement les valeurs de λ qui annulent un des coefficients diagonaux de la matrice réduite.

Remarque

- Pour $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, il faut s'habituer à déterminer les ensembles $E_\lambda(A)$ par lecture de la matrice $A - \lambda\, I$. Illustrons la méthode avec le cas particulier de la valeur propre $\lambda = 0$. On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $E_0(A)$ c'est-à-dire les vecteurs tels que : $A\, X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$. Or :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot C_1 + y \cdot C_2 + z \cdot C_3$$
$$= x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir le vecteur nul à l'aide de cette combinaison linéaire, on doit forcément choisir $z = 0$. On peut alors remarquer que le choix $x = 1$ et $y = 1$ permet d'obtenir une combinaison linéaire nulle. Ce n'est qu'une reformulation du fait que les colonnes C_1 et C_2 de la matrice A sont opposées.
On en déduit alors :

$$E_0(A) \ \supset\ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

L'égalité peut alors s'obtenir à l'aide d'un argument de dimension.
Plus précisément, on obtient, par théorème du rang :

$$\dim\big(E_1(A)\big) \ = \ \dim\big(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})\big) - \mathrm{rg}(A) \ = \ 3 - 2 \ = \ 1$$

- Pour les matrices carrées d'ordre 2 on utilise la caractérisation suivante :

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ est valeur propre de } A & \Leftrightarrow & A - \lambda I_2 \text{ n'est pas inversible} \\ & \Leftrightarrow & \det(A - \lambda I_2) = 0 \end{array}$$

Théorème 23.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) *La matrice A est triangulaire supérieure (resp. inférieure)* $\Rightarrow$ *Les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux*

2) *La matrice A est diagonale* $\Rightarrow$ *Les valeurs propres de A sont ses coefficients diagonaux*

`À RETENIR`

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) se lisent sur sa diagonale.

VI.1.e) Valeurs propres de matrices semblables

Théorème 24.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient M et N des matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) *M et N sont semblables* $\Rightarrow$ $\text{rg}(M) = \text{rg}(N)$

2) *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:*

M et N sont semblables $\Rightarrow$ $\text{rg}(M - \lambda I_n) = \text{rg}(N - \lambda I_n)$

3) *M et N sont semblables* $\Rightarrow$ $\text{Sp}(M) = \text{Sp}(N)$

VI.1.f) Cas particulier de la valeur propre 0

Théorème 25.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f un endomorphisme de E.
Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) *Cas des endomorphismes*

$$\begin{array}{rcl} \textit{Le réel } 0 \textit{ est une valeur propre de } f & \Leftrightarrow & \text{Ker}(f) \neq \left\{0_E\right\} \\ & \Leftrightarrow & f \textit{ n'est pas injective} \\ & \Leftrightarrow & f \textit{ n'est pas bijective} \end{array}$$

Évidemment, on peut aussi écrire :

f est bijective $\Leftrightarrow$ *Le réel 0 n'est pas valeur propre de f*

2) *Cas des matrices carrées*

Le réel 0 est une valeur propre de A $\Leftrightarrow$ *A n'est pas inversible*

Évidemment, on peut aussi écrire :

A est inversible $\Leftrightarrow$ *Le réel 0 n'est pas valeur propre de A*

VI.2. Sous-espaces propres d'un endomorphisme

VI.2.a) Définition

Définition

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

On appelle **sous-espace propre** de f associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(f)$ défini par :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} E_\lambda(f) & = & \big\{u \in E \,|\, f(u) = \lambda \cdot u\big\} \\ & = & \big\{u \in E \,|\, (f - \lambda \mathrm{id})(u) = 0_E\big\} \;=\; \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}) \end{array}}$$

$$\boxed{E_\lambda(f) \;=\; \left\{ \begin{array}{l} \text{vecteurs propres associés} \\ \text{à la valeur propre } \lambda \end{array} \right\} \;\cup\; \{0_E\}}$$

2) Cas des matrices carrées

On appelle **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ, l'ensemble noté $E_\lambda(A)$ défini par :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} E_\lambda(A) & = & \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \,|\, AU = \lambda \cdot U\} \\ & = & \{U \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \,|\, (A - \lambda I) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\} \end{array}}$$

Lien entre endomorphisme et représentation matricielle (rappel)

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

On note maintenant $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Considérons $u \in E$ et notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.

Alors : $\boxed{f(u) = \lambda \cdot u \;\Leftrightarrow\; AU = \lambda \cdot U}$

VI.2.b) Structure d'un sous-espace propre

Théorème 26.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

Soit λ une valeur propre de f.

a. $\boxed{E_\lambda(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

b. *$E_\lambda(f) \neq \{0_E\}$. En particulier :* $\boxed{\dim(E_\lambda(f)) \geqslant 1}$

2) Cas des matrices carrées

Soit λ une valeur propre de A.

a. $\boxed{E_\lambda(A) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

b. *$E_\lambda(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$. En particulier :* $\boxed{\dim(E_\lambda(A)) \geqslant 1}$

VI.2.c) Détermination d'un sous-espace propre

`MÉTHODO` **Déterminer $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre de f associé à une valeur propre λ donnée**

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Soit $u \in E$. Notons $U = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Soit λ est une valeur propre de f.

On rappelle :
$$\begin{array}{rcl} u \in E_\lambda(f) & \Leftrightarrow & f(u) = \lambda \cdot u \\ & \Leftrightarrow & (f - \lambda\, \mathrm{id}_E)(u) = 0_E \\ & \Leftrightarrow & (A - \lambda\, I_n) \times U = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \end{array}$$

On se ramène ainsi à la résolution d'un système linéaire.

VI.3. Polynômes annulateurs

VI.3.a) Polynômes d'endomorphismes, de matrices carrées

Définition

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Il existe donc $r \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$ tel que :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{r} a_k \, X^k$$

1) Cas des endomorphismes

On note $P(f)$ l'endomorphisme de E défini par $P(f) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k f^k$.

C'est un polynôme d'endomorphimsmes.

2) Cas des matrices carrées

On note $P(A)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $P(A) = \sum\limits_{k=0}^{r} a_k A^k$.

C'est un polynôme de matrices.

Lien entre les deux

Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, on a alors :

$$P(A) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P(f))$$

VI.3.b) Polynômes annulateurs

Définition

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) Cas des endomorphismes

On dit que P est un polynôme annulateur de f si $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2) Cas des matrices carrées

On dit que P est un polynôme annulateur de A si $P(A) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

VI.3.c) Existence d'un polynôme annulateur non nul

Théorème 27.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

Il existe un polynôme annulateur **non nul** *de f.*

2) Cas des matrices carrées

Il existe un polynôme annulateur **non nul** *de A.*

VI.3.d) Intérêt des polynômes annulateurs

Théorème 28.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) Cas des endomorphismes

Si P est un polynôme annulateur de f alors :

$$\boxed{\lambda \text{ une valeur propre de } f \quad \Rightarrow \quad \lambda \text{ est une racine de } P}$$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Sp}(f) \ \subset \ \{\textit{racines de } P\}}$

2) Cas des matrices carrées

Si P est un polynôme annulateur de A alors :

$$\boxed{\lambda \text{ une valeur propre de } A \quad \Rightarrow \quad \lambda \text{ est une racine de } P}$$

Ainsi : $\boxed{\mathrm{Sp}(A) \ \subset \ \{\textit{racines de } P\}}$

VII. Théorèmes de réduction

VII.1. Endomorphisme diagonalisable, matrice diagonalisable

VII.1.a) Définition

Définition *(Endomorphisme / matrice carrée diagonalisable)*

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Cas des endomorphismes

- On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est diagonale.
- Autrement dit, $f \in \mathscr{L}(E)$ est **diagonalisable** s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = D$.

2) Cas des matrices carrées
On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice **diagonalisable** s'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

VII.1.b) Caractérisation de la diagonalisabilité

Théorème 29.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

1) *Cas des endomorphismes*

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe une base de } E \text{ formée de vecteurs propres de } f}$$

2) *Cas des matrices carrées*

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \text{il existe une base de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ formée de vecteurs propres de } A}$$

3) *Lien entre endomorphisme et représentation matricielle*

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ est diagonalisable}}$$

VII.2. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

VII.2.a) Critère de diagonalisabilité

Théorème 30.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) *Cas des endomorphismes*

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de f.

Notons $E_{\lambda_1}(f), \ldots, E_{\lambda_m}(f)$ les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

a. $\sum\limits_{i=1}^{m} \dim(E_{\lambda_i}(f)) \leqslant \dim(E)$

b. $\boxed{f \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{m} \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \dim(E)}$

2) *Cas des matrices carrées*

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de A.

Notons $E_{\lambda_1}(A), \ldots, E_{\lambda_m}(A)$ les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

a. $\sum\limits_{i=1}^{m} \dim(E_{\lambda_i}(A)) \leqslant n$

b. $\boxed{A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{m} \dim(E_{\lambda_i}(A)) = n}$

VII.2.b) Condition suffisante de diagonalisabilité

Théorème 31.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) *Cas des endomorphismes*

$$\boxed{f \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes} \Rightarrow f \text{ est diagonalisable}}$$

2) *Cas des matrices carrées*

$$\boxed{A \text{ admet } n \text{ valeurs propres distinctes} \Rightarrow A \text{ est diagonalisable}}$$

VII.2.c) Démontrer par l'absurde la non diagonalisabilité

Théorème 32.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) *Cas des endomorphismes*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ est diagonalisable} \\ f \text{ n'admet qu'une seule valeur propre } \lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow f = \lambda \, \mathrm{id}_E}$$

2) *Cas des matrices carrées*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} A \text{ est diagonalisable} \\ A \text{ n'admet qu'une seule valeur propre } \lambda \end{array}\right\} \Leftrightarrow A = \lambda \, I_n}$$

VII.3. Caractère diagonalisable des matrices symétriques

Définition *(Matrice symétrique)*

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- La matrice A est dite **symétrique** si ${}^tA = A$.
- Autrement dit, A est **symétrique** si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}$$

Théorème 33.

Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) *Cas des endomorphismes*

Il existe une base dans laquelle la matrice représentative de f est symétrique	$\Rightarrow$	*f est diagonalisable*

2) *Cas des matrices carrées*

$$\boxed{A \text{ est symétrique} \quad \Rightarrow \quad A \text{ est diagonalisable}}$$