

HEC 2016

Sujet E 65

Exercice avec préparation 1

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On appelle *médiane* de X tout réel m qui vérifie les deux conditions :

$$\mathbb{P}([X \leq m]) \geq \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}([X \geq m]) \geq \frac{1}{2}$$

On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la loi exponentielle.

2. a) Montrer que X admet une unique médiane m que l'on calculera.

b) Soit M la fonction définie sur \mathbb{R} , à valeurs réelles, telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, M(x) = \mathbb{E}(|X - x|)$.

Étudier les variations de la fonction M sur \mathbb{R} et montrer que m est l'unique point en lequel M atteint son minimum.

3. On suppose que le paramètre λ est inconnu. Soit α un réel vérifiant $0 < \alpha < 1$.

Pour n entier de \mathbb{N}^* , soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un n -échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

a) Quelle est la loi de Z_n ?

b) Établir l'existence de deux réels c et d tels que : $\mathbb{P}\left(\left[Z_n \leq \frac{c}{\lambda}\right]\right) = \frac{\alpha}{2}$ et $\mathbb{P}\left(\left[Z_n \geq \frac{d}{\lambda}\right]\right) = \frac{\alpha}{2}$.

c) En déduire un intervalle de confiance du paramètre m au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Exercice sans préparation 1

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E admettant n valeurs propres distinctes.

Montrer qu'un endomorphisme g de E vérifie $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si les vecteurs propres de f sont des vecteurs propres de g .

Sujet E 82

Exercice avec préparation 2

On suppose que toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : Loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$; définition, propriétés.

2. Pour tout x réel, on note $[x]$ la partie entière de x .

a) Pour n entier de \mathbb{N}^* , montrer que pour tout x réel, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[nx]}{n} = x$.

b) Établir pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'équivalence suivante : $[y] \leq x \Leftrightarrow y < [x] + 1$.

c) Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ et soit $N_n(\alpha, \beta)$ le nombre d'entiers k qui vérifient $\alpha < \frac{k}{n} \leq \beta$. Exprimer $N_n(\alpha, \beta)$ en fonction de $[n\alpha]$ et $[n\beta]$.

3. Pour tout entier $n \geq 1$, on note Y_n la variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \mathbb{P}\left(\left[Y_n = \frac{k}{n}\right]\right) = \frac{1}{n}.$$

Soit Z une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la variable aléatoire Z_n par : $Z_n = \frac{\lfloor nZ \rfloor}{n}$. Soit α et β deux réels vérifiant $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$.

a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([\alpha < Y_n \leq \beta]) = \beta - \alpha$.

b) Comparer les fonctions de répartition respectives de Y_n et Z_n . Conclusion.

Exercice sans préparation 2

Soit x réel et $M(x)$ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par : $M(x) = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 2x & 2x \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de x la matrice $M(x)$ est-elle diagonalisable ?

Sujet E 83

Exercice avec préparation 3

Pour tout entier naturel n , on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

On définit l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.

On pose $H_0(X) = 1$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $H_k(X) = \frac{X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)}{k!}$.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Question de cours : Définition de deux matrices semblables.

2. a) Montrer que φ est un endomorphisme non bijectif de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Justifier que la famille $\mathcal{B}' = (H_0, H_1, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer la matrice M' de φ dans la base \mathcal{B}' .

d) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

3. Dans cette question, p est un entier fixé supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$, soit f_i l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans \mathbb{R} définie par : $\forall Q \in \mathbb{R}_p[X], f_i(Q) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} Q(k)$.

a) Justifier que pour tout $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$, l'application f_i est linéaire.

b) Soit $(i, j) \in \llbracket 0, p \rrbracket^2$. Établir la relation : $f_i(H_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

c) Soit a_0, a_1, \dots, a_p les réels vérifiant : $X^p = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \dots + a_p H_p$.

Déduire de la question précédente, la relation : $\forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_i = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{i}{k} k^p$.

Exercice sans préparation 3

Les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ et pour tout entier $n \geq 1$, on note Y_n une variable aléatoire à valeurs dans $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$ telle que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \mathbb{P}\left(\left[Y_n = \frac{k}{n}\right]\right) = \frac{1}{n}$$

Soit f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(f(Y_n)) = \mathbb{E}(f(Z))$.

Sujet E 85**Exercice avec préparation 4**

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la covariance de deux variables aléatoires discrètes. Soit p, q et r des réels fixés de l'intervalle $]0, 1[$ tels que $p + q + r = 1$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$, indépendantes et de même loi donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}([X_n = 1]) = p, \mathbb{P}([X_n = -1]) = q, \mathbb{P}([X_n = 0]) = r.$$

On pose pour tout entier $n \geq 1$: $Y_n = \prod_{k=1}^n X_k$.

2. a) Pour tout entier $n \geq 1$, préciser $Y_n(\Omega)$ et calculer $\mathbb{P}([Y_n = 0])$.
 b) Pour tout entier $n \geq 1$, calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(Y_n)$.
3. On pose pour tout entier $n \geq 1$, on a : $p_n = \mathbb{P}([Y_n = 1])$.
 a) Calculer p_1 et p_2 .
 b) Établir une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n .
 c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $p_n = \frac{(p+q)^n + (p-q)^n}{2}$.
 d) Pouvait-on à l'aide de la question 2, trouver directement la loi de Y_n ?
4. a) Établir l'inégalité : $(p+q)^n > (p-q)^{2n}$. Calculer $\mathbb{V}(Y_n)$.
 b) Calculer la covariance $\text{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$ des deux variables aléatoires Y_n et Y_{n+1} .

Sujet E 86**Exercice avec préparation 5**

1. Question de cours : Fonctions équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Pour tout entier naturel n , soit f_n la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par : $\forall x \geq 0, f_n(x) = \int_0^1 t^n e^{-tx} dt$.

2. a) Montrer que pour tout entier naturel n , la fonction f_n est décroissante sur \mathbb{R}_+ .
 b) Étudier la suite $(f_n(0))_{n \geq 0}$. En déduire pour tout réel $x \geq 0$ fixé, la limite de la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$.
3. a) Soit x un réel strictement positif. Établir pour tout entier $n \geq 1$, la relation :

$$f_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} f_n(x) - \frac{e^{-x}}{x}$$

- b) Expliciter les fonctions f_0 et f_1 .
 c) Montrer que pour tout entier naturel n , $f_n(x)$ est équivalent à $\frac{n!}{x^{n+1}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
4. a) Montrer que pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$, on a : $f_n(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n e^{-u} du$.
 b) En déduire que la fonction f_n est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et déterminer sa dérivée f'_n .
 c) Comparer pour tout réel $y \geq 0$, les deux réels y et $1 - e^{-y}$.
 En déduire que pour tout entier naturel n , la fonction f_n est continue en 0.

Exercice sans préparation 4

Soit c et r deux réels strictement positifs.

- Justifier que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \begin{cases} \frac{rc^r}{x^{r+1}} & \text{si } x > c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de probabilité.
- Soit X une variable aléatoire de densité f . Identifier la loi de la variable aléatoire $Y = \ln(X) - \ln(c)$.
- Compléter les lignes du code **Scilab** suivant pour que V soit un vecteur ligne contenant 100 réalisations de la loi de la variable aléatoire X .

```

1  c = input('c=')
2  r = input('r=')
3  U = grand(?, ?, ?, ?)
4  V = c * exp(U)

```

Sujet E 88**Exercice avec préparation 6**

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Question de cours : Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
- a) On pose : $T = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). Montrer que la loi de T est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([T = k]) = (1 - e^{-\lambda}) (e^{-\lambda})^k$$

- b) Quelle est la loi de $T + 1$? En déduire l'espérance et la variance de T .
- On pose : $Z = X - \lfloor X \rfloor$.
Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Z .
- Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$.
Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice sans préparation 5

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme de E tel que $f^4 = f^2$ et $\text{rg}(f^2) = 1$. Montrer que le spectre de f est $\{0\}$ ou $\{0, 1\}$ ou $\{-1, 0\}$.

Sujet E 89**Exercice avec préparation 7**

- Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} x^n \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. a) Établir la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.
- b) Calculer I_0 et I_1 .
3. a) Montrer que f_1 est une densité de probabilité.
- b) Tracer la courbe représentative de f_1 dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admettant f_1 pour densité.
- c) Déterminer la fonction de répartition F de X .
- d) Justifier l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de la variance $\mathbb{V}(X)$ de X . Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
4. On pose : $Y = X^2$.
- a) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité.
- b) Quelle est la loi de Y ?

Exercice sans préparation 6

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice A dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
2. On admet sans démonstration que $A^3 = 0$. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
- a) Quelles sont les valeurs propres de M ? La matrice M est-elle diagonalisable ?
- b) Justifier que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de A et I (matrice identité de $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

Sujet E 90

Exercice avec préparation 8

Toutes les variables aléatoires utilisées dans cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : loi faible des grands nombres.
Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de loi uniforme sur $[0, 1]$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n la variable aléatoire $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.
- a) Calculer la fonction de répartition de U_n .
- b) Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité $\mathbb{P}([U_n \geq \varepsilon])$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
3. Compléter la deuxième ligne du code **Scilab** suivant pour que la fonction `minu` simule la variable U_k pour la valeur k du paramètre.

```

1  function u = minu(k)
2      x = .....
3      u = min(x)
4  endfunction

```

4. Soit $p \in]0, 1[$ et Z une variable aléatoire telle que, pour tout réel x :

$$\mathbb{P}([Z \leq x]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} \mathbb{P}([U_k \leq x])$$

(on admet qu'il existe une telle variable aléatoire et qu'elle possède une densité).

a) Justifier, pour tout $x \in [0, 1]$, l'égalité : $\mathbb{P}([Z \leq x]) = 1 - \frac{p(1-x)}{p+(1-p)x}$.

b) En déduire une densité de Z .

5. a) Justifier que la fonction **Scilab** suivante fournit une simulation de la variable aléatoire Z de la question précédente.

```

1  function z = geomin(p)
2      z = minu(grand(1, 1, 'geom', p))
3  endfunction

```

b) De quel nombre réel les instructions suivantes fournissent-elles une valeur approchée et pourquoi ?

```

1  p = 0.5 ;
2  R = [] ;
3  for k = 1:10000
4      R = [R, geomin(p)]
5  end ;
6  disp(mean(R))

```

Exercice sans préparation 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2} dt - \int_x^1 e^{-nt^2} dt.$$

1. Montrer que la fonction f_n est strictement monotone sur $[0, 1]$.

2. Établir l'existence d'un unique réel de $[0, 1]$, noté c_n , tel que $\int_0^{c_n} e^{nt^2} dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2} dt$.

3. Montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.