Oraux - HEC

Sujet E 76

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
Dans cet exercice, les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$ *et admettent une densité.*
Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance $\mathbb{E}(X)$. On note respectivement F et f, la fonction de répartition et une densité de X.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

2. Pour $x \geqslant 0$:

a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt$.

b) Établir les inégalités : $\displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,dt \geqslant x(1 - F(x)) \geqslant 0$.

c) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que : $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F(t))\,dt$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, G_n la fonction de répartition de Z_n et g_n une densité de Z_n.

a) Exprimer pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_n(t)$ en fonction de $F(t)$.

b) Établir l'existence de $\mathbb{E}(Z_n)$.

c) Pour $n \geqslant 2$, montrer que : $\mathbb{E}(Z_n) - \mathbb{E}(Z_{n-1}) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (F(t))^{n-1}(1 - F(t))\,dt$.

d) Soit $m > 0$. On suppose que X suit la loi exponentielle de paramètre m (d'espérance $\dfrac{1}{m}$).
Calculer $\mathbb{E}(Z_n)$.
Donner un équivalent de $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice sans préparation 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et X une matrice colonne non nulle de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On pose : $A = X\,{}^tX$.

1. Montrer que A est diagonalisable.

2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.