Oraux - HEC

Sujet E 79

Exercice avec préparation 1

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Soit a un paramètre réel et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, telle que :

$$F(x) = \begin{cases} 1 + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) & \text{si } x \geqslant a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

2. ***a)*** Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a = \dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$.

b) Étudier les variations de F et tracer l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

3. ***a)*** Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.

b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

4. Soit Y la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ définie par $Y = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). On pose : $Z = X - Y$.

a) Calculer $\mathbb{P}(Y = 0)$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathbb{P}(Y = n) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n(n+2)}\right)$.

b) Déterminer la fonction de répartition et une densité de Z.

c) Établir l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(Z)$ de Z. Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

Exercice sans préparation 1

Soit a, b et c des réels non nuls vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. On pose : $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

1. ***a)*** Calculer la matrice $M = U\,{}^tU$ (où ${}^tU$ est la matrice transposée de la matrice colonne U).

b) M est-elle diagonalisable ? inversible ?

2. ***a)*** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer M^n.

b) Quelles sont les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.