Oraux - HEC

Sujet E 89

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} x^n \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. ***a)*** Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\ dx$.

b) Calculer I_0 et I_1.

3. ***a)*** Montrer que f_1 est une densité de probabilité.

b) Tracer la courbe représentative de f_1 dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant f_1 pour densité.

c) Déterminer la fonction de répartition F de X.

d) Justifier l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de la variance $\mathbb{V}(X)$ de X. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

4. On pose : $Y = X^2$.

a) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

b) Quelle est la loi de Y ?

Exercice sans préparation 1

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.

2. On admet sans démonstration que $A^3 = 0$. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Quelles sont les valeurs propres de M ? La matrice M est-elle diagonalisable ?

b) Justifier que M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de A et I (matrice identité de $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$).