# Oraux - HEC

## Sujet E 94

### Exercice avec préparation 1

*1.* Question de cours

*a)* Définition et représentation graphique de la fonction partie entière.

*b)* Donner un programme **Scilab** permettant de représenter la fonction partie entière sur l'intervalle $\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $X_n$ une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ dont une densité $f_n$ est donnée par :

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n} \mathrm{e}^{-\frac{t}{n}} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*2.* Reconnaître la loi de $X_n$, puis en donner l'espérance et la variance.

*3.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \mathbb{P}([|X_n - \mathbb{E}(X_n)| < 1])$.

*a)* Montrer que $u_n = \left(\mathrm{e}^{\frac{2}{n}} - 1\right)\mathrm{e}^{-\frac{n+1}{n}}$.

*b)* Déterminer un équivalent de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, de la forme $\frac{\alpha}{n}$ où $\alpha$ est un réel que l'on déterminera.

*4.* Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère l'événement $A_k = \left[k + \frac{1}{2} < X_n < k+1\right]$.

*a)* Exprimer l'événement $B_n = \left[X_n - \lfloor X_n \rfloor > \frac{1}{2}\right]$ en fonction des événements $A_k$ $(k \in \mathbb{N})$.

*b)* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \mathbb{P}(B_n)$. Calculer $v_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

*5.* On suppose désormais que les variables aléatoires $X_1$, $X_2$, ..., $X_n$, ... sont indépendates et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$M_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

*a)* Déterminer la loi de $M_n$.

*b)* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $w_n = \mathbb{P}([|M_n - \mathbb{E}(M_n)| < 1])$. Calculer $w_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n$.

### Exercice sans préparation 1

On considère les deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\begin{cases} F &= \operatorname{Vect}((1,1,1)) \\ G &= \operatorname{Vect}((1,-1,0),(0,2,1)) \end{cases}$$

*1.* Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont l'image est $F$ et le noyau $G$.

*2.* Peut-on le choisir diagonalisable ?