Oraux - HEC

Sujet E 90

Exercice avec préparation 1

Toutes les variables aléatoires utilisées dans cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

1. Question de cours : loi faible des grands nombres.
Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, de loi uniforme sur $[0, 1]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n la variable aléatoire $\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

a) Calculer la fonction de répartition de U_n.

b) Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, la probabilité $\mathbb{P}([U_n \geqslant \varepsilon])$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

3. Compléter la deuxième ligne du code **Scilab** suivant pour que la fonction `minu` simule la variable U_k pour la valeur k du paramètre.

```
1  function u = minu(k)
2      x = ..........
3      u = min(x)
4  endfunction
```

4. Soit $p \in]0, 1[$ et Z une variable aléatoire telle que, pour tout réel x :

$$\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \sum_{k=1}^{+\infty} p\,(1-p)^{k-1}\,\mathbb{P}([U_k \leqslant x])$$

(on admet qu'il existe une telle variable aléatoire et qu'elle possède une densité).

a) Justifier, pour tout $x \in [0, 1]$, l'égalité : $\mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 1 - \dfrac{p(1-x)}{p + (1-p)x}$.

b) En déduire une densité de Z.

5. *a)* Justifier que la fonction **Scilab** suivante fournit une simulation de la variable aléatoire Z de la question précédente.

```
function z = geomin(p)
    z = minu(grand(1, 1, 'geom', p))
endfunction
```

b) De quel nombre réel les instructions suivantes fournissent-elles une valeur approchée et pourquoi ?

```
p = 0.5 ;
R = [] ;
for k = 1:10000
    R = [R, geomin(p)]
end ;
disp(mean(R))
```

Exercice sans préparation 1
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{nt^2}\ dt - \int_x^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\ dt.$$

1. Montrer que la fonction f_n est strictement monotone sur $[0,1]$.

2. Établir l'existence d'un unique réel de $[0,1]$, noté c_n, tel que $\displaystyle\int_0^{c_n} \mathrm{e}^{nt^2}\ dt = \int_{c_n}^1 \mathrm{e}^{-nt^2}\ dt$.

3. Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.