Oraux - HEC

Sujet E 68

Exercice avec préparation 1

Dans cet exercice, toutes les variables sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

1. Question de cours : Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.

2. Soit X une variable aléatoire strictement positive suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
On pose : $Z = -\ln(X)$ et on note F_Z la fonction de répartition de Z.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F_Z(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$.

b) Montrer que Z admet une densité de probabilité continue f_Z qui atteint sa valeur maximale en un unique point x_0.

c) Tracer l'allure de la courbe représentative de F_Z dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

d) Que représente le point d'abscisse x_0 et d'ordonnée $F_Z(x_0)$ pour cette courbe ?

3. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ indépendantes et de même loi que X.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_n = Y_n - \ln(n)$.

a) Déterminer les fonctions de répartition F_{Y_n} et F_{Z_n} de Y_n et Z_n respectivement.

b) Montrer que la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Z.

c) Établir pour tout réel $c > 0$, l'inégalité : $\mathbb{E}(Y_n) \geqslant c\mathbb{P}(Y_n \geqslant c)$.

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(Y_n)$.

Exercice sans préparation 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ? inversible ?

2. On note I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'existence d'une matrice N telle que $A = I + N$. Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k.

3. On rappelle l'identité remarquable : $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$. Déterminer A^{-1}.