Thème 1 : algèbre linéaire (matrices et endomorphismes)

I. Séance 1 : produit matriciel

Exercice 1

1. Pour les exemples suivants, dire si les produits matriciels AB et BA sont bien définis ou non. S'ils sont définis, les calculer ; s'ils ne sont pas définis, expliquer pourquoi.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 8 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$;

Démonstration.

Comme $A \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$, le produit $AB \in \mathscr{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ est bien défini et :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 8 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 8 & -5 & 0 \\ -16 & 12 & -7 & 12 \end{pmatrix}.$$

Le produit BA n'est pas défini car le nombre de colonnes de B (4) est différent du nombre de lignes de A (2).

Commentaire

- Considérons m, n et p trois entiers naturels non nuls ainsi que $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices. Alors la matrice produit $C = AB \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ est bien définie. De plus, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ et pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, le coefficient $c_{i,j}$ de la matrice produit est obtenu en effectuant le produit matriciel de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B. Plus précisément :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, m]\!],\ \forall j \in [\![1, p]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times b_{k,j}}$$

  Dans cette formule, k est un indice permettant de parcourir parallèlement les colonnes de A et les lignes de B. Pour que le produit AB soit bien défini, il faut donc que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.

- Il est classique de présenter un produit matriciel comme suit :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 8 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix} = B \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -13 & 8 & -5 & 0 \\ -16 & 12 & -7 & 12 \end{pmatrix} = C \end{array}$$

  Cette présentation permet de mettre en avant la taille de la matrice produit C obtenue ($C \in \mathscr{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ où 2 est le nombre de lignes de A et 4 est le nombre de colonnes de B). À terme, il est préférable de présenter un produit en écrivant les matrices côte à côte (comme dans le corrigé). **Seules ces deux présentations sont acceptables.** □

b) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

Comme $A \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$, le produit $AB \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ est bien défini et :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & 0 & 3 \\ 8 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Commentaire

- Comme mentionné précédemment, on peut présenter le produit sous la forme suivante :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B \\ A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & 0 & 3 \\ 8 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = C \end{array}$$

- La matrice produit obtenue a une forme particulière. En effet, chaque vecteur qui la compose est une copie, à multiplication près, de la matrice colonne A :

$$C = \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

Cette forme apparaît naturellement lorsque l'on multiplie une matrice colonne A par une matrice ligne B.

Comme $B \in \mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, le produit $BA \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ est bien défini et :

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}.$$

(on obtient une matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$, que l'on pourra considérer comme un réel)

Commentaire

Il faut faire particulièrement attention aux tailles des matrices que l'on souhaite multiplier. On peut résumer les situations rencontrées dans cet exercice dans un tableau.

Taille de A	Taille de B	Taille de $A \times B$
m × n	n × p	m × p
2 × 3	3 × 4	2 × 4
3 × 4	2 × 3	**NON !**
4 × 1	1 × 4	4 × 4
1 × 4	4 × 1	1 × 1

□

2. On considère un vecteur $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels non tous nuls.

Dans la suite, on note $M = X\,{}^tX$ et $m = {}^tX\,X$.

a) Calculer m.

Démonstration.

$$\boxed{\text{On a : } {}^tX\,X \;=\; \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

La matrice ${}^tX\,X \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ peut être traitée comme un réel.
L'écriture : ${}^tX\,X = a^2+b^2+c^2$, bien que non rigoureuse, sera donc acceptée. □

b) (i) Calculer M et en déduire qu'elle est symétrique.
Question réservée aux cubes : que peut-on en déduire ?

Démonstration.

La matrice : $M \;=\; X\,{}^tX \;=\; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix}$ est bien symétrique.

Réponse cubes : On en déduit que M est diagonalisable.

Commentaire

On peut remarquer, comme dans la question précédente, que la matrice obtenue apparaît comme la concaténation de copies (à multiplication par un réel près) de X :

$$\left(a\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad b\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad c\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)$$

□

(ii) Calculer $M\;X$.
Question réservée aux cubes : que peut-on en déduire ?

Démonstration.

$$\begin{aligned} M\;X \;&=\; \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a^3+ab^2+ac^2 \\ ba^2+b^3+bc^2 \\ ca^2+cb^2+c^3 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} a\,(a^2+b^2+c^2) \\ b\,(a^2+b^2+c^2) \\ c\,(a^2+b^2+c^2) \end{pmatrix} \;=\; (a^2+b^2+c^2)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \;=\; m\;X \end{aligned}$$

On a : $M\;X \;=\; m\;X$.
Réponse cubes : Comme X est un vecteur non nul, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre $a^2+b^2+c^2$.

Commentaire

Il est précisé dans l'énoncé que les réels a, b et c sont non tous nuls (la négation de la propriété « tous nuls »). Cela exclut uniquement la situation $a = b = c = 0$. Ceci ne doit pas être confondu avec la propriété « tous non nuls » qui signifie que ni a, ni b, ni c ne peuvent être nuls. Cette deuxième propriété est plus forte car elle exclut toutes les situations où l'un des réels a, b ou c serait nul. Par exemple :

$$a = 3, \quad b = 0, \quad c = 2$$

définit un triplet de réels non tous nuls mais pas tous non nuls. □

3. On considère maintenant un entier n non nul et un vecteur $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. On note :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad M \ = \ X\,{}^tX \quad \text{ et } \quad m = {}^tX\,X$$

a) Calculer m.

Démonstration.

$$\boxed{\text{On a : } {}^tX\,X \ = \ \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ = \ (x_1^2 + \ldots + x_n^2).}$$

□

b) (i) Démontrer que M est symétrique.
Question réservée aux cubes : que peut-on en déduire ?

Démonstration.

$$\begin{aligned} {}^tM \ &= \ {}^t\big(X\,{}^tX\big) \ = \ {}^t\big({}^tX\big)\ {}^t(X) && \textit{(par propriété de l'application transposée)} \\ &= \ X\,{}^tX \ = \ M \end{aligned}$$

La matrice M est donc bien symétrique.
Réponse cubes : On en déduit qu'elle est diagonalisable.

Commentaire

- On aurait pu procéder de même en ***2.b)(i)***.
- De manière générale, si la question consiste à démontrer qu'une matrice A est symétrique, le bon réflexe est de calculer ${}^tA$ et de démontrer que cette matrice n'est autre que A.

□

(ii) Calculer $M\,X$.
Question réservée aux cubes : que peut-on en déduire ?

Démonstration.

$$\begin{array}{rcll} M\,X & = & \big(X\,{}^tX\big)\,X \;=\; X\,\big({}^tX\,X\big) & \textit{(par associativité du produit matriciel)} \\ & = & X\,m \;=\; m\cdot X & \textit{(car } m \textit{ est un réel)} \end{array}$$

Commentaire

- La notation $X\,m$ est tout à fait correcte puisqu'il s'agit de la multiplication d'une matrice de taille $n \times 1$ et d'une matrice 1×1. La notation $m\,X$, par contre, n'est pas correcte si $n \neq 1$ (on ne peut multiplier une matrice 1×1 et une matrice $n \times 1$).
- En revanche, la notation $m\cdot X$ est correcte, si l'on accepte le léger abus consistant à confondre $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$. Il s'agit alors d'effectuer la multiplication du réel m et de la matrice X.

□

Exercice 2
Pour toute matrice $A = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A, c'est-à-dire $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. Montrer que l'application $\mathrm{tr} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}$, est linéaire.

Démonstration.
Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, soit $A = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $B = \big(b_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Tout d'abord, par définition de la somme de matrices : $\lambda A + \mu B = \big(\lambda\, a_{i,j} + \mu\, b_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
- Par définition de la trace :

$$\begin{array}{rcll} \mathrm{tr}\big(\lambda A + \mu B\big) & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \big(\lambda A + \mu B\big)_{i,i} & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{n} \big(\lambda\, a_{i,i} + \mu\, b_{i,i}\big) & \\ & = & \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i} + \mu \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i,i} & \textit{(par linéarité de la somme)} \\ & = & \lambda\ \mathrm{tr}(A) + \mu\ \mathrm{tr}(B) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, l'application tr est bien linéaire.}}$$

□

2. Montrer : $\forall (A,B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Démonstration.
On note $A = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et soit $B = \big(b_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
De plus, on note : $C = AB = \big(c_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $D = BA = \big(d_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

- Soit $i \in [\![1,n]\!]$ et soit $j \in [\![1,n]\!]$. Par définition du produit matriciel :

$$c_{i,j} = (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j} \qquad \text{et} \qquad d_{i,j} = (BA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\, a_{k,j}$$

- On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(AB) = tr(C) &= \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{k,i}\, a_{i,k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}\, a_{i,k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} d_{k,k} \right) = \mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}(BA)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).}$$

Commentaire

On utilise ici la formule permettant d'obtenir les coefficients de la matrice produit AB. Cette formule ne revêt pas de difficulté. Elle exprime le fait que le coefficient en position (i,j) de la matrice AB est obtenu en réalisant le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice B.

$$c_{i,j} = (AB)_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,j}$$

□

3. Vérifier, pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j,i}^2$.

Démonstration.
Notons $B = {}^tA$. Rappelons : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{i,j} = a_{j,i}$.
En reprenant la démonstration précédente :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\left({}^tAA\right) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}\, a_{i,k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\, a_{i,k} \right) \qquad \textit{(car } B = {}^tA\textit{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathrm{tr}\left({}^tAA\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}^2 \right).}$$

Commentaire

Les variables de sommation sont des variables muettes. On peut donc les renommer sans changer le résultat énoncé. Si on souhaite retrouver la même présentation que celle présente dans l'énoncé, on peut écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}^2 \right) = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\sum_{\beta=1}^{n} a_{\beta,\alpha}^2 \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 \right)$$

□

II. Séance 2 : calcul d'inverse

II.1. Définition de l'inverse et utilisation d'une relation matricielle

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Quelle propriété démontre que $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'inverse de A ?

Démonstration.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice B est l'inverse de A si $AB = BA = I_n$.
Si c'est le cas, B est notée A^{-1}.

Commentaire

- Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on utilise souvent le résultat suivant :

$$AB = I_n \ \Rightarrow \ A \text{ et } B \text{ sont inverses l'une de l'autre}$$

  ou autrement dit :

$$AB = I_n \ \Rightarrow \ AB = BA = I_n$$

  La propriété : $AB = I_n$ signifie que la matrice B est **l'inverse à droite** de la matrice A.
  Ce résultat signifie que dans l'espace des matrices carrées d'ordre n, l'inverse à droite de A est l'inverse (tout court) de A.

- Le résultat suivant est évidemment lui aussi vérifié :

$$BA = I_n \ \Rightarrow \ A \text{ et } B \text{ sont inverses l'une de l'autre}$$

  Si B est **l'inverse à gauche** de A alors B est l'inverse de A.

□

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrez que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Démonstration.
Par calcul, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

□

3. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Trouver une relation entre J^2, J et I.

Démonstration.

$$\begin{aligned} J^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3J - 2I_3 \end{aligned}$$

$$\boxed{J^2 = 3J - 2I}$$

□

b) Montrer que J est inversible et donner son inverse en fonction de J et I.

Démonstration.
On déduit de ce qui précède : $J^2 - 3J = -2I$.
Ainsi, $J(J - 3I) = -2I$ ou encore :

$$J \times \left(-\frac{1}{2}\,(J - 3I)\right) = I$$

$$\boxed{J \text{ est inversible, d'inverse } J^{-1} = -\frac{1}{2}\,(J - 3I).}$$

□

4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 - 4A$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$.

- Ainsi : $A^2 - 4A = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 8 & -4 & 8 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -4 & 4 \\ 8 & 0 & 8 \\ 4 & -4 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I$.

$$\boxed{A^2 - 4A = -4I}$$

□

b) En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et I.

Démonstration.
D'après la question précédente, $A^2 - 4A = -4I$.

On en déduit : $-\frac{1}{4}\,(A^2 - 4A) = I$. Et ainsi :

$$A \times \left(-\frac{1}{4}\,(A - 4I)\right) = I$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } A \text{ est inversible, d'inverse : } A^{-1} = -\frac{1}{4}\,(A - 4I).}$$

□

5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- Ensuite :
$$(A-I)^3 = (A-I)(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } (A-I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (A-I)^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

□

b) En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et I.

Démonstration.

- D'après ce qui précède : $(A-I)^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
- Les matrices A et I commutent puisque I commute avec toute matrice carrée de même ordre. D'après la formule du binôme de Newton :
$$(A-I)^3 \;=\; A^3(-I)^0 + 3A^2(-I)^1 + 3A^1(-I)^2 + A^0(-I)^3 \;=\; A^3 - 3A^2 + 3A - I$$
et ainsi : $A^3 - 3A^2 + 3A = I$. On en déduit :
$$A \times \left(A^2 - 3A + 3I\right) \;=\; I$$

$$\boxed{\text{On en conclut que } A \text{ est inversible, d'inverse } A^{-1} = A^2 - 3A + 3I.}$$

□

II.2. Reconnaître les matrices non inversibles

Exercice 4

Sans faire de calcul, expliquez pourquoi les matrices suivantes sont non inversibles.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & -6 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

- La matrice M est non inversible car elle possède une colonne constituée uniquement de 0.
- La matrice N est non inversible car ses deux colonnes sont égales.
- La matrice O est non inversible car c'est une matrice triangulaire (supérieure) qui possède un coefficient diagonal nul.

Commentaire

On peut aussi remarquer que les 2 premières colonnes de la matrice O sont colinéaires : $C_2 = \dfrac{3}{2}\, C_1$.

- La matrice P est non inversible car elle possède deux colonnes colinéaires : $C_3 = -2\ C_1$.
- La matrice Q est non inversible car elle possède deux lignes colinéaires : $L_3 = 2\ L_1$.

Commentaire

On reviendra dessus dans l'année, notamment lors de la définition du rang d'une matrice. On retiendra pour l'instant qu'une matrice carrée M qui possède l'une ou l'autre des propriétés suivantes :
- M est trinagulaire et l'un (au moins) de ses coefficients diagonaux est nul,
- M possède deux colonnes (resp. lignes) égales,
- M possède deux colonnes (resp. lignes) colinéaires.

est non inversible.

□

II.3. Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Exercice 5
Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donnez (sans faire de calcul) leur inverse.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

Commentaire

Commençons par rappeler la formule d'inversion pour les matrices carrées d'ordre 2.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1) Si $ad - bc = 0$, la matrice A n'est pas inversible.

2) Si $ad - bc \neq 0$, la matrice A inversible, d'inverse :

$$\boxed{A^{-1} \ = \ \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Comment retenir cette formule :

× on échange les éléments diagonaux,

× on multiplie les autres par -1,

× et on n'oublie pas de multiplier par l'inverse de $ad - bc$ (obtenu par « produit en croix »).

La quantité $D = ad - bc$ est appelé **déterminant de** A. On la note habituellement det(A). Cette notion de déterminant est aussi définie pour des matrices $n \times n$ (mais nous ne le ferons pas cette année). On pourra retenir :

$$\boxed{A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathrm{A}) \neq 0}$$

- La matrice M a pour déterminant $\det(M) = 0 - \big(1 \times (-1)\big) = 1 \neq 0$.
  On en déduit que M est inversible d'inverse :

$$M^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice N a pour déterminant $\det(N) = 1 \times 2 - 3 \times 1 = -1 \neq 0$.
  On en déduit que N est inversible d'inverse :

$$N^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- La matrice O a pour déterminant $\det(O) = 2 \times 0 - (1 \times 3) = -3 \neq 0$.
  On en déduit que O est inversible d'inverse :

$$O^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- La matrice P a pour déterminant $\det(P) = 2 \times 18 - \big((-9) \times (-4)\big) = 36 - 36 = 0$.
  On en déduit que P n'est pas inversible.

Commentaire

On pouvait aussi remarquer que les deux colonnes de P sont colinéaires.

- La matrice Q a pour déterminant $\det(Q) = 1 - 1 = 0$.
  On en déduit que Q n'est pas inversible.

Commentaire

On pouvait aussi remarquer que les deux colonnes de Q sont égales.

□

II.4. Inverse par algorithme du pivot de Gaus

Exercice 6

À l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, montrer que chacune des matrices suivantes est inversible et déterminer son inverse. On optera pour la présentation matricielle.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

  On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2\,L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

  La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi P est inversible.

Commentaire

La première étape de l'algorithme consiste à installer des 0 dans la première colonne sous le coefficient diagonal. Ici, à la fin de la première étape, on obtient une matrice diagonale. C'est un pur hasard. On verra dans l'exemple suivant qu'il faut généralement aussi traiter la $2^{\text{ème}}$ colonne et ainsi de suite (jusqu'à l'avant dernière colonne).

On effectue l'opération $\left\{ \ L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \ L_1 \leftarrow L_1 + 2\,L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement, } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \ L_3 \leftarrow 2\ L_3 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
Ainsi, Q est inversible.
On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \ L_1 \leftarrow 2\ L_1 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue enfin les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\ L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\ L_2 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement, } Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.}$$

- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Ainsi R est inversible.
On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \ L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \ L_2 \leftarrow -L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Finalement : } R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

Par mesure de vérification, il est conseillé d'effectuer **au brouillon** (cela n'a pas à se retrouver sur votre copie) le calcul de la matrice de départ par la matrice inverse calculée. Si ce produit donne la matrice identité, c'est que le calcul est juste. Dans le cas contraire, c'est qu'une erreur s'est produite.
Ici, pour la matrice P, on a bien :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

III. Séance 3 : résolution de systèmes

Exercice 7

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note : $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.

1. a) Montrer que $E_3(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
(par la même démonstration, on démontre que $E_\lambda(A)$ est un sev de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$)

Démonstration.
Remarquons tout d'abord :

$$\begin{aligned} E_3(A) &= \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\} \\ &= \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 3I)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\} \end{aligned}$$

Ainsi, $E_3(A)$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
Montrons que c'est un sev de l'ev $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (et ainsi $E_3(A)$ est un ev).

(i) $E_3(A) \subseteq \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par définition.

(ii) $E_3(A)$ est non vide.
En effet le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est une solution du système $(A - 3I)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

Ce qui démontre : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in E_3(A)$.

(iii) Soit $(X_1, X_2) \in E_3(A) \times E_3(A)$.
Autrement dit, X_1 et X_2 sont deux solutions du système. Alors :

$$\begin{aligned} (A - 3I)(X_1 + X_2) &= (A - 3I)\ X_1 \quad + \quad (A - 3I)\ X_2 \\ &= \quad 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \quad + \quad 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \quad = \quad 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

On en déduit que $X_1 + X_2$ est aussi solution du système.
Autrement dit, $X_1 + X_2 \in E_3(A)$.
(on démontre ici que l'ensemble $E_3(A)$ est stable par somme)

(iv) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $X \in E_3(A)$. Alors :

$$(A - 3I)\ (\lambda \cdot X) \ = \ \lambda \cdot (A - 3I)\ X \ = \ 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

On en déduit que $\lambda \cdot X$ est une solution du système.
Autrement dit $\lambda \cdot X \in E_3(A)$.
(on démontre ici que l'ensemble $E_3(A)$ est stable par multiplication externe)

$\boxed{\text{Ainsi, } E_3(A) \text{ est bien un sev de } \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$

Commentaire

Les points ***(iii)*** et ***(iv)*** peuvent être remplacés par la propriété :

$\boxed{\textbf{\textit{(iii')}}\ \text{Si } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } (X_1, X_2) \in \big(E_3(A)\big)^2,\ \lambda_1 \cdot X_1 + \lambda_2 \cdot X_2 \in E_3(A)}$

□

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer $E_\lambda(A)$ si la matrice $A - \lambda I$ est inversible.
Que peut-on dire sur $E_\lambda(A)$ si la matrice $A - \lambda I$ est non inversible ?

Démonstration.

- Supposons que $A - \lambda I$ est inversible. Alors :

$$(A - \lambda I)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \ \Leftrightarrow\ (A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I)\ X = (A - \lambda I)^{-1}\ 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \ \Leftrightarrow\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

$$\boxed{\text{Si } A - \lambda I \text{ est inversible, alors } E_\lambda(A) = \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}.}$$

- On a l'équivalence :

$$(A - \lambda I)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \text{ est un système de Cramer } \Leftrightarrow\ A - \lambda I \text{ est inversible}$$

Ainsi, si $A - \lambda I$ est non inversible, le système n'est pas de Cramer.
Il admet donc une solution autre que le vecteur nul $0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Si } A - \lambda I \text{ est non inversible, } E_\lambda(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}.}$$

Commentaire

En fait, on a le résultat suivant :

$$\boxed{A - \lambda I \text{ est inversible } \Leftrightarrow\ E_\lambda(A) = \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}}$$

□

2. Dans la suite de l'exercice, on note $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que la matrice $A - I$ est non inversible.
En déduire : $E_1(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

Démonstration.
Tout d'abord :

$$A - I \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{La matrice } A - I \text{ possède une colonne constituée uniquement de } 0. \\ \text{Elle est donc non inversible.}\end{array}}$$

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{1.b)}} \text{ on en déduit : } E_1(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}.}$$

□

b) Déterminer $E_1(A)$.

Démonstration.
Rappelons : $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = X\}$.

- Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_1(A) & \Leftrightarrow & AX = X \\ & \Leftrightarrow & (A - I)\ X = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & & & 2z & = & 0 \\ - & & 3y & + & z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \{y = 0 \quad \texttt{ET} \quad z = 0 \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_1(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y = 0 \ \text{ et } \ z = 0 \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

$$\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

Commentaire

- On démontre dans cette question que $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

  Cela démontre au passage que $E_1(A)$ est un espace vectoriel. C'est d'ailleurs la manière à privilégier aux concours pour montrer que $E_1(A)$ est un espace vectoriel.
- Le retour à la définition (comme en question ***1.a)***) ne doit être rédigé que si cela est explicitement demandé, comme c'était le cas dans cet exercice.

□

c) Démontrer que la matrice $A+2I$ est non inversible. Déterminer $E_{-2}(A)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$A+2I \ = \ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{La matrice } A+2I \text{ possède une colonne constituée uniquement de } 0. \text{ Elle est donc non inversible.}}$$

- Rappelons : $E_{-2}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = -2X\}$.
Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_{-2}(A) & \Leftrightarrow & AX = -2X \\ & \Leftrightarrow & (A+2I)\ X = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x & + & 2z & = & 0 \\ & & z & = & 0 \\ & & 5z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \{x = 0 \quad \texttt{ET} \quad z = 0 \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_{-2}(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 0 \ \text{ et } \ z = 0 \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\ & = & \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

$$\boxed{E_{-2}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)}$$

□

d) Démontrer que la matrice $A-3I$ est non inversible. Déterminer $E_3(A)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$A-3I \ = \ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{La matrice } A-3I \text{ possède une ligne constituée uniquement de } 0. \text{ Elle est donc non inversible.}}$$

- Rappelons : $E_3(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.

  Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} X \in E_3(A) & \Leftrightarrow & AX = 3X \\ & \Leftrightarrow & (A - 3I)\ X = 0 \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -2x & & & + & 2z & = & 0 \\ & - & 5y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & z \\ & & 5y & = & z \end{array} \right. \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_3(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \ \text{ et } \ 5y = z \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} z \\ \frac{1}{5}\, z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

$$\boxed{E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

3. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord que la matrice P est **triangulaire** (supérieure) et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. Elle est donc inversible.
- On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{5} L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Démontrer que la matrice définie par $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
Déduire de cette écriture une écriture de la matrice A en fonction des matrices P et D.

Démonstration.

- La matrice D est définie par :

$$\begin{aligned} D \ = \ P^{-1}AP \ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ obtenue est bien diagonale.}}$$

- Comme $D = P^{-1}AP$, alors $PD = AP$ et finalement $PDP^{-1} = A$.

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

Commentaire

- La matrice P est obtenue comme concaténation des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Ce n'est pas un hasard (on pourrait en dire autant des coefficients diagonaux de D) mais c'est un peu tôt pour en parler. Ceci sera détaillé dans le chapitre « Réduction ». □

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $A^n = PD^nP^{-1}$.

► **Initialisation** :
- D'une part : $A^0 = I$.
- D'autre part : $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$).
Alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= A \times PD^nP^{-1} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= PDP^{-1} \times PD^nP^{-1} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{3.b)}}\textit{)} \\ &= PD(P^{-1}P)D^nP^{-1} \\ &= PDID^nP^{-1} \\ &= PDD^nP^{-1} \ = \ PD^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, \ A^n = PD^nP^{-1}.}$$

□

Commentaire

- La forme : $A = PDP^{-1}$ permet d'obtenir facilement la formule de l'élévation à la puissance n de la matrice A demandée ici, à savoir :
$$A^n = PD^nP^{-1}$$
- Si on souhaite déterminer A^n il faut que D^n soit facile à calculer. C'est le cas ici puisque D est une matrice diagonale (encore une fois, ce n'est pas un hasard et ce sera détaillé dans le chapitre « Réduction »). Plus précisément, on a ici :
$$D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$
et ainsi :
$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & (-2)^n & -\frac{(-2)^n}{5} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3^n - 1 \\ 0 & (-2)^n & \frac{3^n - (-2)^n}{5} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$
- Cette première récurrence est l'occasion de faire un point sur la notion de variable muette.
Dans une proposition mathématique, on dit qu'une variable est **muette** (on parle aussi de variable **liée**) si elle est portée par un quantificateur. Ainsi, dans les propositions :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \qquad\qquad \exists n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$$
la variable n est muette. Cela signifie qu'on peut renommer la variable n sans que cela ne change le sens de la proposition mathématique. Ainsi, les propositions :
$$\forall m \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(m) \qquad\qquad \exists k \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(k)$$
ont même sens que les propositions précédentes.
Par contre, si on considère seulement la proposition $\mathcal{P}(n)$ (sans faire apparaître de quantificateur devant), on obtient un objet mathématique qui dépend de ce n particulier. Le manque de compréhension de la notion de variable muette a pour conséquence trois erreurs classiques :
1) Montrons par récurrence que : $\mathcal{P}(n)$.
↪ par récurrence, on démontre qu'une propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, pas seulement à un rang n donné.
2) ...où $\mathcal{P}(n)$: $\cancel{\forall n \in \mathbb{N}}$, ...
↪ nous avons déjà discuté de ce point au-dessus : une propriété commençant par $\forall n \in \mathbb{N}$ est indépendante de n (c'est alors une variable muette).
3) Supposons : $\cancel{\forall n \in \mathbb{N}}$, $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.
↪ ceci n'a pas de sens ! On ne peut supposer la propriété vraie pour tout n : c'est précisément ce que l'on souhaite démontrer.
Si l'une ou l'autre de ces erreurs est présente dans la rédaction, la récurrence ne sera pas lue et aucun point ne sera attribué sur la question.
Pour plus de détails sur la notion de quantificateurs, on renvoie au cours de logique de première année. On y trouve notamment les principaux schémas de rédaction. Pour plus de détails sur les récurrences, on renvoie au cours sur les récurrences, calculs de sommes et produits.

4. La formule de la question ***3.c)*** est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Démonstration.
D'après la question ***3.b)*** : $A = PDP^{-1}$.
La matrice A est le produit de 3 matrices inversibles (la matrice D est inversible car diagonale et à cœfficients diagonaux tous non nuls). On peut donc écrire :

$$\begin{array}{rcl} A^{-1} & = & (\ PDP^{-1}\ )^{-1} \\ & = & (\ (PD)P^{-1}\ )^{-1} \\ & = & (P^{-1})^{-1}\ (PD)^{-1} \ = \ P\ D^{-1}P^{-1} \end{array}$$

$\boxed{\text{La formule de la question } \textbf{\textit{3.c)}} \text{ est donc vérifiée pour } n = -1.}$ □

Exercice 8

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.

1. a) Démontrer que la matrice $A - I$ est non inversible. Déterminer $E_1(A)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A - I \ = \ \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

On peut alors remarquer qu'il existe une relation de dépendance linéaire non triviale entre les 3 colonnes de la matrice $A - I$: $2\ C_3 + C_2 = C_1$.

$\boxed{\text{Ainsi, la matrice } A - I \text{ n'est pas inversible.}}$

Commentaire

- Il est simple de constater qu'une matrice est non inversible en observant qu'il existe une relation de dépendance linéaire non triviale entre 2 de ses colonnes (resp. lignes). C'est tout l'objet de l'Exercice 4. Ici, la relation met en œuvre 3 vecteurs, ce qui représente un saut de difficulté. L'énoncé stipulant que la matrice $A - I$ n'est pas inversible, on sait qu'il existe une telle relation. Le 0 présent dans la première colonne nous guide : on tente de le produire par une combinaison linéaire liant la $2^{\text{ème}}$ et $3^{\text{ème}}$ colonne. La tentative la plus naturelle nous fournit une solution.
- Il est aussi possible de démontrer le caractère non inversible en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss. Détaillons la rédaction.

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_2 \leftarrow 2\ L_2 + L_3 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue n'est pas inversible car elle possède deux lignes égales.
On en conclut que $A - I$ n'est pas inversible.

- Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_1(A) & \Longleftrightarrow & AX = X \\
& \Longleftrightarrow & (A - 1 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_2 \leftarrow 2\,L_2 + L_1}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
& \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & - & 2y & = & -2z \\ & & 4y & = & 2z \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow 2\,L_1 + L_2}{\Longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 4x & & & = & -2z \\ & & 4y & = & 2z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -\frac{1}{2}\,z \\ y & = & \frac{1}{2}\,z \end{array} \right.
\end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_1(A) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\dfrac{1}{2}\,z \ \text{ et } \ y = \dfrac{1}{2}\,z \} \\
& = & \{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,z \\ \frac{1}{2}\,z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \ = \ \{ z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \\
& = & \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)}$$

Commentaire

On vient de démontrer que le système linéaire homogène $(A - I)\ X = 0$ admet une infinité de solutions. En particulier, l'ensemble solution de ce système n'est pas réduit à $\{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$. Autrement dit, ce système n'est pas de Cramer, ce qui signifie, comme on l'a vu précédemment, que la matrice $A - I$ n'est pas inversible. On retrouve ici le résultat de la première partie de la question (qui n'est donc pas indispensable).

□

b) Démontrer que la matrice $A - 2I$ est non inversible. Déterminer $E_2(A)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$A - 2I \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$
La matrice $A - 2I$ possède deux lignes colinéaires : $L_2 = -L_1$.
On peut aussi remarquer qu'il existe une relation de dépendance linéaire non triviale entre les 3 colonnes de la matrice $A - 2I$ *:* $3\ C_3 + 4\ C_2 = 2\ C_1$.
$$\boxed{\text{La matrice } A - 2I \text{ n'est donc pas inversible.}}$$

- Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2(A) & \iff & AX = 2X \\
& \iff & (A - 2 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 2y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & 4y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} x & - & 2y & = & -2z \\ & & 4y & = & 3z \end{array} \right. \\
& \underset{L_1 \leftarrow 2 L_1 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & & & = & -z \\ & & 4y & = & 3z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -\frac{1}{2}\, z \\ y & = & \frac{3}{4}\, z \end{array} \right.
\end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl}
E_2(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\dfrac{1}{2}\, z \ \text{ et } \ y = \dfrac{3}{4}\, z \right\} \\
& = & \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\, z \\ \frac{3}{4}\, z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \ = \ \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
& = & \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \ = \ \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$

$$\boxed{E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right)}$$

□

c) Démontrer que la matrice $A - 3I$ est non inversible. Déterminer $E_3(A)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$A - 3I \ = \ \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$
La matrice $A - 3I$ possède deux lignes colinéaires : $L_2 = -2\ L_1$.
On peut aussi remarquer qu'il existe une relation de dépendance linéaire non triviale entre les 3 colonnes de la matrice $A - 3I$: $C_1 - C_2 = C_3$.
$$\boxed{\text{La matrice } A - 3I \text{ n'est donc pas inversible.}}$$

- Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_3(A) & \iff & AX = 3X \\
 & \iff & (A - 3 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
 & \iff & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right. \\
 & \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 4y & - & 4z & = & 0 \end{array} \right. \\
 & \underset{L_3 \leftrightarrow L_3 + 2\ L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \\
 & \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -x & + & y & = & 2z \\ & - & 2y & = & -2z \end{array} \right. \\
 & \underset{L_1 \leftarrow 2\ L_1 + L_2}{\iff} & \left\{ \begin{array}{rcrcr} -2x & & & = & 2z \\ & - & 2y & = & -2z \end{array} \right. \underset{\substack{L_1 \leftarrow -\frac{1}{2}\ L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}\ L_2}}{\iff} \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -z \\ y & = & z \end{array} \right.
\end{array}$$

- On en déduit :
$$\begin{array}{rcl}
E_3(A) & = & \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \ \text{ et } \ y = z \} \\
 & = & \{ \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \ = \ \{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{array}$$
$$\boxed{E_3(A) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.
On remarque :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } P \text{ est inversible, d'inverse } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Démontrer que la matrice définie par $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
Déduire de cette écriture une écriture de la matrice A en fonction des matrices P et D.

Démonstration.

- La matrice D est définie par :

$$\begin{aligned} D = P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ obtenue est bien diagonale.}}$$

- Comme $D = P^{-1}AP$, alors $PD = AP$ et finalement $PDP^{-1} = A$.

$$\boxed{A = PDP^{-1}}$$

Commentaire

- La matrice P est obtenue comme concaténation des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- Ce n'est pas un hasard (on pourrait en dire autant des coefficients diagonaux de D) mais c'est un peu tôt pour en parler. Ceci sera détaillé dans le chapitre « Réduction ».

□

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $A^n = PD^nP^{-1}$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $A^0 = I$.
  - D'autre part : $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$).
  Alors :

$$
\begin{array}{rcll}
A^{n+1} & = & A \times A^n & \\
 & = & A \times PD^nP^{-1} & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
 & = & PDP^{-1} \times PD^nP^{-1} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.b)}}\textit{)} \\
 & = & PD(P^{-1}P)D^nP^{-1} & \\
 & = & PDID^nP^{-1} & \\
 & = & PDD^nP^{-1} \ = \ PD^{n+1}P^{-1} &
\end{array}
$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}.}$$

Commentaire

On retrouve la même question que dans l'Exercice 7.
C'est une question classique qu'il faut savoir résoudre.

□

IV. Séance 4 : puissances d'une matrice via le binôme de Newton

Exercice 9

On note I la matrice carrée d'ordre 3 et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice $H \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = I + 2H$.

Démonstration.

$$A = I + 2H \;\Leftrightarrow\; 2H = A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{La matrice recherchée est } H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

2. Calculer H^2, puis H^k pour tout $k \geqslant 2$.

Démonstration.

- Notons tout d'abord que : $H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{H^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}}$$

- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$: $H^k = 0$.
  (on peut remarquer que, pour tout $k \geqslant 2$: $H^k = H^2 \times H^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \times H^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$)

$$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant 2,\ H^k = 0.}$$

□

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer A^n en fonction de I et de H.

Démonstration.

- Les matrices I et $2H$ commutent car I commute avec toute matrice carrée de même ordre.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(I+2H)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2H)^k\ I^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k\ H^k && \textit{(car on a : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^k\ H^k + \cancel{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^k\ H^k} && \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^k\ H^k && \textit{(car pour tout } k \geqslant 2 \textit{ : } H^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
&= \binom{n}{0} 2^0\ H^0 + \binom{n}{1} 2^1\ H^1 \\
&= I + 2\,n\,H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- Enfin : $(I+2H)^0 = I$ et la formule précédente est donc aussi valable au rang $n=0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ (I+2H)^n = I + 2n\ H.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m,p,n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

(la deuxième somme est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
L'argument $n \geqslant 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ H^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'indice 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$. □

Exercice 10
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.

1. Démontrer que la matrice $A - 2I$ est non inversible. Déterminer $E_2(A)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$A - 2I \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice $A - 2I$ possède deux colonnes égales : $C_1 = C_2$.

$$\boxed{\text{La matrice } A - 2I \text{ n'est donc pas inversible.}}$$

- Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl}
X \in E_2(A) & \iff & AX = 2X \\
& \iff & (A - 2 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
& \iff & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& \iff & \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & & & & 0 & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \\
& \underset{}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff}} & \left\{ \ x + y - z = 0 \right. \\
& \iff & \left\{ \ x = -y + z \right.
\end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_2(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y+z \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ & = & \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

$$\boxed{E_2(A) \ = \ \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

2. Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

Démonstration.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \ L_1 \leftrightarrow L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ \ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2\ L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 2\ L_2 + L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\, L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\, L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}\, L_3 \end{array}\right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right.$$

Ainsi P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Commentaire

La première opération a consisté à échanger les lignes L_1 et L_2. Grâce à cette opération, on place le réel 1 (utilisé ensuite comme pivot non nul) en haut à gauche de la matrice.

□

3. Démontrer que la matrice $\Delta = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure et trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\Delta = \alpha I + J$$

Démonstration.

- La matrice Δ est définie par :

$$\begin{aligned} \Delta \ = \ P^{-1}AP \ &= \ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matrice $\Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ obtenue est bien triangulaire supérieure.

- On remarque alors :

$$\Delta - J \ = \ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ = \ 2\, I$$

La valeur $\alpha = 2$ permet d'écrire la matrice Δ sous la forme : $\Delta = \alpha I + J$.

□

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer J^2, puis J^k pour tout entier $k \geqslant 2$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$J^2 \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$: $J^k = 0$.
  (on peut remarquer que, pour tout $k \geqslant 2$: $J^k = J^2 \times J^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \times J^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$)

$$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant 2,\ J^k = 0.}$$

□

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer Δ^n en fonction de I et J.

Démonstration.

- Les matrices $2I$ et J commutent car I commute avec toute matrice carrée de même ordre.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll}
(2I+J)^n & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I)^{n-k}\ J^k & \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\ I^{n-k}\ J^k & \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\ J^k & \textit{(car on a :} \\
 & & & \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^{n-k}\ J^k + \cancel{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}\ J^k} & \textit{(ce découpage est} \\
 & & & \textit{valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
 & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^{n-k}\ J^k & \textit{(car pour tout } k \geqslant 2 \textit{ :} \\
 & & & J^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
 & = & \displaystyle\binom{n}{0} 2^n\ J^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1}\ J^1 & \\
 & = & 2^n\ I + 2^{n-1}\ nJ \ = \ 2^{n-1}\ (2\ I + nJ) & \\
 & = & 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2n \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ = \ 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &
\end{array}$$

- Enfin : $(2I+J)^0 = I$ et la formule précédente est donc aussi valable au rang $n = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ \Delta^n = (2I+J)^n = 2^n I + n 2^{n-1} J.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m,p,n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

  (la deuxième somme est nulle si $p = n$)
  où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.
- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
  L'argument $n \geqslant 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
  Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ J^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'indice 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.

□

c) En déduire l'expression matricielle de A^n.

Démonstration.

- Par récurrence immédiate, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \left(P\Delta P^{-1}\right)^n = P\Delta^n P^{-1}$$

Commentaire

On retrouve ici le résultat dont on s'est notamment servi dans l'Exercice 7.
Ici, démontrer le résultat n'est pas l'objectif de la question mais un résultat intermédiaire qui n'est pas cité dans l'énoncé. On peut donc utiliser ce résultat directement, en précisant simplement qu'il se montre par récurrence.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} A^n &= P\Delta^n P^{-1} = P\big(2^n I + n2^{n-1}J\big)P^{-1} \\ &= 2^n PIP^{-1} + n2^{n-1}PJP^{-1} \\ &= 2^n PP^{-1} + n2^{n-1}PJP^{-1} \\ &= 2^n I + n2^{n-1}PJP^{-1} \end{aligned}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} PJP^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A - 2I \end{aligned}$$

Commentaire

On peut aussi faire ce calcul en revenant à l'écriture : $\Delta = 2I + J$.
Ainsi, $J = \Delta - 2I$ et :

$$PJP^{-1} = P\big(\Delta - 2I\big)P^{-1} = P\Delta P^{-1} - 2PIP^{-1} = A - 2I$$

- En conclusion :

$$\begin{aligned} A^n &= 2^n I + n2^{n-1}\,\big(A - 2I\big) = (2^n - n2^n)I + n\,2^{n-1}A = (1-n)\;2^n\;I + n\,2^{n-1}A \\ &= 2^{n-1}\;\big((2-2n)\;I + 2\,nA\big) \\ &= 2^{n-1}\left(\begin{pmatrix} 2-2n & 0 & 0 \\ 0 & 2-2n & 0 \\ 0 & 0 & 2-2n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n & 0 & 0 \\ n & 3n & -n \\ n & n & n \end{pmatrix}\right) \\ &= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n & 2+n & -n \\ n & n & 2-n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n & 2+n & -n \\ n & n & 2-n \end{pmatrix}.}$$

□

5. On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = -2$, $z_0 = -3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & 2\ x_n & & & & \\ y_{n+1} & = & x_n & + & 3\ y_n & - & z_n \\ z_{n+1} & = & x_n & + & y_n & + & z_n \end{array} \right.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = AX_n$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_n \\ x_n + 3y_n - z_n \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n}$$

□

b) Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

Démonstration.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $X_n = A^n X_0$.

- **Initialisation** :
  Remarquons : $A^0 X_0 = I X_0 = X_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $X_{n+1} = A^{n+1} X_0$). Alors :

$$\begin{array}{rcll} X_{n+1} & = & A\ X_n & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & A \times A^n X_0 & \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & A^{n+1} X_0 & \end{array}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0.}$$

□

c) En déduire les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Démonstration.
D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} X_n & = & A^n X_0 = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n & 2+n & -n \\ n & n & 2-n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \\ & = & 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n & 2+n & -n \\ n & n & 2-n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \\ n - 2\ (2+n) + 3n \\ n - 2n - 3\ (2-n) \end{pmatrix} \\ & = & 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 + 2n \\ -6 + 2n \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ -2 + n \\ -3 + n \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : x_n = 2^n,\ \ y_n = (-2+n)\ 2^n,\ \ z_n = (-3+n)\ 2^n.}$$

□

Exercice 11

1. On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer A^2. Démontrer alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = 3^{k-1} A$.

Démonstration.
Tout d'abord :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Démontrons alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $A^n = 3^{n-1}\ A$.

- **Initialisation** :
  - D'une part : $A^1 = A$.
  - D'autre part : $3^{1-1} A = 3^0 A = A$.

  D'où $\mathcal{P}(1)$.
- **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $A^{n+1} = 3^n A$).
  Par hypothèse de récurrence : $A^n = 3^{n-1}\ A$.
  Ainsi :
  $$A^{n+1} = A \times A^n = 3^{n-1}\ A \times A = 3^{n-1}\ 3A = 3^n A$$
  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 3^{n-1}\ A.}$$

□

b) Déterminer B^2 et B^3. En déduire B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration.
Tout d'abord :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$B^3 = B^2\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{On en déduit, par une récurrence immédiate : } \forall k \geqslant 3,\ B^k = 0.}$$

□

c) Déterminer C^2. Conjecturer une formule pour C^k et la démontrer.

Démonstration.
Tout d'abord :

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\ C$$

Par mesure de sûreté, déterminons C^3 avant d'émettre une conjecture.

$$C^3 = C^2\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Démontrons alors par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: $C^n = 2^{n-1}\ C$.

▸ **Initialisation** :

- D'une part : $C^1 = C$.
- D'autre part : $2^{1-1}\ C = 2^0\ C = C$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

▸ **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* : $C^{n+1} = 2^n\ C$).
Par hypothèse de récurrence : $C^n = 2^{n-1}\ C$.
Ainsi :

$$C^{n+1} = C \times C^n = 2^{n-1}\ C \times C = 3^{n-1}\ 2C = 2^n C$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ C^n = 2^{n-1}\ C.}$$

□

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Écrire la matrice M en fonction des matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

$$\boxed{M = aI + bJ}$$

□

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- Les matrices I et J commutent car I commute avec toute matrice carrée de même ordre.
- Soit $n \geqslant 2$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{array}{rcll}
M^n & = & (aI+bJ)^n & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aI)^{n-k}(bJ)^k \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} I^{n-k} \times b^k J^k & \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} I \times b^k J^k \ = \ \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ J^k & \textit{(car on a :} \\
& & & \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{2} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ J^k + \cancel{\sum\limits_{k=3}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ J^k} & \textit{(ce découpage est} \\
& & & \textit{valable car } n \geqslant 2\textit{)} \\
& = & \sum\limits_{k=0}^{2} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \ J^k & \textit{(car on a montré :} \\
& & & \forall k \geqslant 3,\ J^k = 0\textit{)} \\
& = & \binom{n}{0} a^n b^0 \ J^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 \ J + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \ J^2 & \\
& = & a^n \ I + n \ a^{n-1} b \ J + \dfrac{n(n-1)}{2} \ a^{n-2} b^2 \ J^2 & \\
& = & \dfrac{a^{n-2}}{2} \left(2a^2 \ I + 2n \ ab \ J + n(n-1) \ b^2 J^2\right) &
\end{array}$$

- On calcule alors :

$$\begin{array}{cl}
& 2a^2 \ I + 2n \ ab \ J + n(n-1) \ b^2 J^2 \\
= & 2a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2n \ ab \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + n(n-1) \ b^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
= & \begin{pmatrix} 2a^2 & 2n \ ab & n(n-1) \ b^2 \\ 0 & 2a^2 & 2n \ ab \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}
\end{array}$$

- Enfin :
  - $\times$ si $n = 0$, $T^0 = I$.
  - $\times$ si $n = 1$, $T^1 = T$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } M^0 = I,\ M^1 = M \text{ et pour tout } n \geqslant 2,\ \ M^n = \dfrac{a^{n-2}}{2} \begin{pmatrix} 2a^2 & 2n \ ab & n(n-1) \ b^2 \\ 0 & 2a^2 & 2n \ ab \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

(la deuxième somme est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 2$.
L'argument $n \geqslant 2$ est donc nécessaire pour découper la somme.
Les cas $n = 0$ et $n = 1$ doivent alors être traités à part.

- Cette question sur le binôme de Newton matriciel est extrêmement classique aux concours et il faut donc savoir parfaitement la traiter. Généralement a et b sont des valeurs données ($a = 2$ et $b = 1$ à l'`ESSEC III - 2007`).

□

V. Séance 5 : algèbre théorique

Exercice 12

On considère un espace vectoriel E et une application linéaire $u : E \to E$.

On rappelle que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$: $u^m = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{u \text{ apparaît } m \text{ fois}}$ et $u^0 = \mathrm{id}_E$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'ensemble $E_k = \{x \in E \mid u^k(x) = 0_E\}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question seulement, on considère que $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit alors l'application u par :

$$\forall M \in E, \ u(M) = AM$$

a) Soit $M \in E$. Que vaut $u \circ u(M)$?

Démonstration.

$$\boxed{u \circ u(M) = u(u(M)) = A\ u(M) = A\ AM = A^2 M}$$

□

b) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, expliciter u^m.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall m \in \mathbb{N}, \ \mathcal{P}(m)$

où $\mathcal{P}(m) : \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \ u^m(M) = A^m M$.

- **Initialisation** :

  Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

  - D'une part : $u^0(M) = \mathrm{id}(M) = M$.
  - D'autre part : $A^0 M = I\ M = M$.

  D'où $\mathcal{P}(0)$.

- **Hérédité** : soit $m \in \mathbb{N}$.

  Supposons $\mathcal{P}(m)$ et démontrons $\mathcal{P}(m+1)$ (*i.e.* : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \ u^{m+1}(M) = A^{m+1}M$).

  Par hypothèse de récurrence : $u^m(M) = A^m M$.

  De plus :

  $$u^{m+1}(M) = u(u^m(M)) = u(A^m M) = A\ A^m M = A^{m+1} M$$

  D'où $\mathcal{P}(m+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall m \in \mathbb{N}, \ u^m(M) = A^m M$.

$$\boxed{\text{Autrement dit, pour tout } m \in \mathbb{N}, u^m : M \mapsto A^m M.}$$

Commentaire

Dans l'Exercice 7, on a fait une longue remarque sur la bonne rédaction d'une récurrence. On a notamment rappelé que $\mathcal{P}(m)$ est un proposition mathématique qui dépend de m alors que : $\forall m \in \mathbb{N}, \ \mathcal{P}(m)$ est indépendante de m en ce sens que la variable m est muette (on peut la renommer sans que cela ne change le sens de la proposition. On a alors rappelé que l'écriture « $\mathcal{P}(m)$: $\cancel{\forall m \in \mathbb{N}}, \ldots$ » n'avait pas de sens. Attention cependant à ne pas en conclure que la proposition $\mathcal{P}(m)$ ne doit pas contenir de quantificateurs. Comme on le voit dans cet exemple $\big(\ \mathcal{P}(m) : \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \ u^m(M) = A^m M\ \big)$, $\mathcal{P}(m)$ peut s'écrire à l'aide de quantificateurs mais la variable m ne doit en aucun cas être liée à un quantificateur (sinon, elle serait muette).

□

c) On considère maintenant que $m = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, E_k.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Rappelons tout d'abord :

$$E_k = \{M \in E \mid u^k(M) = 0_E\} = \{M \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A^k M = 0_E\}$$

- D'autre part : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $k \geqslant 3$, $A^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

Trois cas se présentent :

× si $k = 1$ alors : $E_1 = \{M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AM = 0_E\}$. Or si $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$AM = 0_E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y = 0 \text{ et } z = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

× si $k = 2$ alors : $E_2 = \{M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A^2 M = 0_E\}$. Or si $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$A^2 M = 0_E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} E_2 &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = 0\} \\ &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

× si $k \geqslant 3$ alors : $E_k = \{M \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A^k M = 0_E\} = \{M \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 0_E = 0_E\} = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\text{En résumé, } E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right),\ E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \text{ et pour tout } k \geqslant 3,\ E_k = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).}$$

□

d) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E_k \subset E_{k+1}$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On procède par disjonction de cas :

× si $k = 1$ alors : $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) \subset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = E_2$.

× si $k = 2$ alors : $E_2 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \subset \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = E_3$.

× si $k \geqslant 3$ alors : $E_k = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = E_{k+1}$.

$$\boxed{\text{On en déduit donc : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ E_k \subset E_{k+1}.}$$

□

2. Dans le cas général, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E_k \subset E_{k+1}$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in E$.
Supposons $x \in E_k$. Alors $u^k(x) = 0_E$. En appliquant u de part et d'autre :

$$\begin{array}{ccc} u(u^k(x)) & = & u(0_E) \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ u^{k+1}(x) & & 0_E \end{array}$$

Ainsi $x \in E_{k+1}$.

$$\boxed{\text{Ce qui démontre : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ E_k \subset E_{k+1}.}$$

□

Exercice 13
Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E ($f \in \mathscr{L}(E)$).

1) Démontrer : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \ \Rightarrow\ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Démonstration.
Supposons $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Il s'agit de démontrer : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ce qui signifie : $\forall x \in E$, $f^2(x) = 0_E$.
Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} (f \circ f)(x) & = & f(f(x)) & \\ & = & 0_E & \textit{(car } f(x) \in \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \end{array}$$

Ainsi : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \ \Rightarrow\ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

Commentaire

- Cette exercice est plus théorique que les précédents. L'endomorphisme f n'est pas connu. On connaît simplement des propriétés sur f et on cherche à en démontrer de nouvelles. Ce type d'exercice d'algèbre théorique peut donc paraître un peu abrupte. Pourtant, on se rend compte, à la lecture de cette démonstration, que de tels exercices peuvent donner lieu à des questions très simples. L'idée est ici de vérifier que les définitions de base (comme celles du noyau et de l'image d'une application linéaire) sont bien connues. En déroulant ces définitions, on obtient le résultat.
- Plus précisément, une telle question commence par la mise en place d'une structure de démonstration. Il faut savoir démontrer :
  - × une propriété quantifiée universellement : $\forall x \in E,\ p(x)$
    `Soit` $x \in E$ `...`
  - × une propriété quantifiée existentiellement : $\exists x \in E,\ p(x)$
    (il s'agit alors d'exhiber un élément $x \in E$ qui vérifie la propriété p)
  - × une inclusion d'ensemble : $A \subset B$
    `Soit` $x \in A$ `... alors` $x \in B$
  - × une égalité d'ensemble : $A = B$
    (on procède par double inclusion à l'aide de la structure de démonstration précédente)
  - × une implication : $p \Rightarrow q$
    `Supposons` p `et démontrons` q.
  - × une équivalence : $p \Leftrightarrow q$
    (on procède par double implication à l'aide de la structure de démonstration précédente)

  Ce n'est qu'une fois la structure de démonstration en place que l'on déroule les définitions.
- On peut en profiter pour remarquer que l'étape d'hérédité d'une récurrence n'est qu'une illustration de ces structures de démonstration. Il s'agit de démontrer la proposition :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \ \Rightarrow\ \mathcal{P}(n+1)$$

  En terme de rédaction, il n'y a donc guère le choix :
  `Soit` $n \in \mathbb{N}$.
  `Supposons` $\mathcal{P}(n)$ `et démontrons` $\mathcal{P}(n+1)$

□

2) Démontrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Rightarrow\ \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$.
Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f(x)$.
Alors :

$$\begin{aligned} f(y) &= f(f(x)) \\ &= (f \circ f)(x) \ = \ 0_E \qquad \textit{(car } f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}\textit{)} \end{aligned}$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Ker}(f)$.
On en conclut : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Rightarrow\ \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f).}$$

Commentaire

- Insistons sur la facilité de cette démonstration. Comme expliqué dans la remarque précédente, il s'agit essentiellement de mettre en place la structure de démonstration et de dérouler les définitions.
- Précisons la manière d'agir.

1 `Soit` $y \in \mathrm{Im}(f)$.
2 `Il existe donc` $x \in E$ `tel que :` $y = f(x)$. `Alors :`
3 $\qquad f(y) = \dots$
4 $\qquad\qquad = \dots$
5 $\qquad\qquad = 0_E$
6 `Ainsi,` $y \in \mathrm{Ker}(f)$.

  × Les lignes 1 et 6 correspondent à la mise en place de la structure de démonstration : il s'agit de démontrer une inclusion. On choisit donc un élément dans $\mathrm{Im}(f)$ et on démontre qu'il est dans $\mathrm{Ker}(f)$.

  × La ligne 2 correspond au déroulé de la définition de l'image d'une application.
  Dire : $y \in \mathrm{Im}(f)$ c'est exactement dire que y s'écrit sous la forme $f(x)$ pour un $x \in E$.

  × La ligne 3 correspond au déroulé de la définition du noyau d'une application linéaire. Dire : $y \in \mathrm{Ker}(f)$ c'est exactement dire : $f(y) = 0_E$. Cela permet d'écrire le début de la ligne 3 ainsi que le résultat en ligne 5.

  C'est seulement à ce moment que l'on rentre dans la phase de démonstration à proprement parler et que l'on s'intéresse aux hypothèses (ici, le fait que l'on ait : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$).

- Le message est clair : sur les 6 lignes de présentation, 4 proviennent de la présentation et seules 2 correspondent à la démonstration. Il n'est donc pas acceptable de ne pas savoir **commencer** ce type de questions, car cela démontre un défaut de connaissance du cours (définitions du chapitre et / ou structures de démonstration).

□

3) Conclure.

Démonstration.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On a démontré, par double implication :}\\ \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \ \Rightarrow\ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}\end{array}}$$

□