Thème 4 : probabilités

I. Mise en jambe : lois discrètes usuelles

Exercice 1
On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{4})$.

1. Déterminer la valeur, si elles existent, des quantités suivantes.

a) $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- Rappelons qu'on dit qu'une v.a.r. discrète X suit **la loi binomiale** de paramètre (n,p), où $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ si :
  a) $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$
  b) $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathbb{P}([X=k]) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ avec $q = 1-p$
- Comme X est une v.a.r. finie alors X admet des moments à tous les ordres.
  En particulier, X admet une espérance et une variance.
- Déterminons $\mathbb{E}(X)$. Par définition :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\ \mathbb{P}([X=x]) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

  Or, pour $k \in [\![1,n]\!]$, on a : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
  (cette relation est vraie pour $k=0$ si on considère $\binom{n-1}{-1} = 0$)
  Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k\ q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k\ q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} p^{k+1}\ q^{n-(k+1)} && \textit{(par changement d'indice)} \\
&= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k\ q^{(n-1)-k} \\
&= np\ (p+q)^{n-1} = np && \textit{(car } p+q=1\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = np}$$

- Déterminons maintenant $\mathbb{V}(X)$. D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Or, d'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \, \mathbb{P}([X = x]) = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

On écrit alors : $k^2 = k\ (k-1) + k$. Ainsi :

$$\begin{aligned} k^2 \binom{n}{k} &= (k\ (k-1) + k) \binom{n}{k} \\ &= k\ (k-1) \binom{n}{k} + k \binom{n}{k} \\ &= (k-1)\ k\binom{n}{k} + k \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} (k-1)\ k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

On reconnaît la partie de droite : $\sum\limits_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \mathbb{E}(X)$.
Il reste à déterminer la partie de gauche.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (k-1)\ k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} n\ (k-1)\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} && \textit{(par la relation binomiale précédente)} \\ &= \sum_{k=2}^{n} n\ (k-1)\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} n\ (n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k q^{n-k} && \textit{(en adaptant la relation binomiale)} \\ &= n\ (n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k+2} q^{n-(k+2)} \\ &= n\ (n-1)\ p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k q^{(n-2)-k} \\ &= n\ (n-1)\ p^2 \end{aligned}$$

En combinant tous ces résultats, on obtient que : $\mathbb{E}(X^2) = n\ (n-1)\ p^2 + np$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= n(n-1)\ p^2 + np - (np)^2 \\ &= np\ ((n-1)\ p + 1 - np) \\ &= np\ (\cancel{np} - p + 1 - \cancel{np}) = np\ (1-p) = npq \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = npq}$$

$$\boxed{\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \tfrac{1}{4}\right) \text{ alors } \mathbb{E}(X) = \frac{n}{4} \text{ et } \mathbb{V}(X) = n\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{4} = \frac{3n}{16}.}$$

Commentaire

- On a refait le calcul de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$ ici pour rappeler la méthode. Mais il faut connaître la valeur de l'espérance et de la variance des lois classiques. Aux concours, seul le résultat est exigible et il ne faudra donc pas, sauf si c'est explicitement demandé, refaire ces calculs.
- La méthode de calcul de $\mathbb{E}(X^2)$ se base sur l'écriture sur les éléments $k \in X(\Omega)$ du support :
$$k^2 = k(k-1) + k$$
À l'échelle des variables aléatoires cela correspond à l'écriture :
$$X^2 = X(X-1) + X$$
Par linéarité de l'espérance, on obtient alors :
$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X)$$
On retrouve ainsi la partie de gauche et la partie de droite du calcul précédent. □

b) $\mathbb{E}(X-3)$ et $\mathbb{V}(X-3)$.

Démonstration.
La v.a.r. $X-3$ admet une espérance et une variance en tant que transformée affine de la v.a.r. X qui admet une variance.

- De plus par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}(X-3) \ = \ \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(3) \ = \ \mathbb{E}(X) - 3 \ = \ \frac{n}{4} - 3$$
- Et par propriété de la variance :
$$\mathbb{V}(X-3) \ = \ \mathbb{V}(X) \ = \ \frac{3n}{16}$$
(on rappelle que $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$)

$$\boxed{\mathbb{E}(X-3) = \frac{n}{4} - 3 \ \text{ et } \ \mathbb{V}(X) = \frac{3n}{16}}$$

□

c) $\mathbb{E}(2X)$ et $\mathbb{V}(2X)$.

Démonstration.
Avec les mêmes arguments que dans la question précédente, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{E}(2X) = 2\mathbb{E}(X) = \frac{2n}{4} = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(2X) = 4\mathbb{V}(X) = \frac{4n}{16} = \frac{n}{4}}$$

□

d) $\mathbb{E}(X^2)$.

Démonstration.

- On a déjà vu que X, en tant que v.a.r. finie, admet des moments à tous les ordres. En particulier, X^2 admet une espérance.
- D'après le théorème de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) \ = \ \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{V}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= npq + (np)^2 \\ &= np(1-p) + n^2p^2 \\ &= np - np^2 + n^2p^2 \ = \ np + n(n-1)p^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = np + n(n-1)p^2 = \frac{n}{4} + \frac{n(n-1)}{16} = \frac{n(n+3)}{16}}$$

Commentaire

Il faut retenir cette méthode : lorsqu'on connaît la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$ (il faut les connaître dans le cas des lois classiques), on obtient immédiatement la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

□

2. Reprendre la question précédente dans le cas où X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

a) $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Démonstration.

- Rappelons qu'on dit qu'une v.a.r. discrète X suit **la loi géométrique** de paramètre $\dfrac{1}{3}$ si :
  a) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$
  b) $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}\big([X = k]\big) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} \dfrac{1}{3}$
- La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} k \left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1} \dfrac{1}{3}$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3} \ = \ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

- On reconnaît la somme partielle d'une série géométrique dérivée première convergente car de raison $\dfrac{2}{3} \in \,]0, 1[$. On en déduit que la v.a.r. X admet une espérance, donnée par :

$$\mathbb{E}(X) \ = \ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \ = \ \frac{1}{3} \, \frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} \ = \ \cancel{\frac{1}{3}} \, \frac{1}{(\frac{1}{3})^{\cancel{2}}} \ = \ 3$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = 3}$$

- Déterminons maintenant $\mathbb{V}(X)$. D'après la formule de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\big(X^2\big) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2$$

Or, d'après le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(X^2) \;=\; \sum_{x\in X(\Omega)} x^2 \ \mathbb{P}([X=x]) \;=\; \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} \ p^k q^{n-k} \;=\; \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} \ p^k q^{n-k}$$

On écrit alors : $k^2 = k\ (k-1) + k$. Ainsi :

$$\begin{aligned} k^2 \binom{n}{k} &= (k\ (k-1) + k)\ \binom{n}{k} \\ &= k\ (k-1)\ \binom{n}{k} + k\ \binom{n}{k} \\ &= (k-1)\ k \binom{n}{k} + k\ \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\mathbb{E}(X^2) \;=\; \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}\ p^k q^{n-k} \;=\; \sum_{k=1}^{n} (k-1)\ k \binom{n}{k}\ p^k q^{n-k} \;+\; \sum_{k=1}^{n} k\ \binom{n}{k}\ p^k q^{n-k}$$

On reconnaît la partie de droite : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\ \binom{n}{k}\ p^k q^{n-k} \;=\; \mathbb{E}(X)$.
Il reste à déterminer la partie de gauche.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (k-1)\ k \binom{n}{k}\ p^k q^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} n\ (k-1) \binom{n-1}{k-1}\ p^k q^{n-k} && \textit{(par la relation binomiale précédente)} \\ &= \sum_{k=2}^{n} n\ (k-1) \binom{n-1}{k-1}\ p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^{n} n\ (n-1) \binom{n-2}{k-2}\ p^k q^{n-k} && \textit{(en adaptant la relation binomiale)} \\ &= n\ (n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k}\ p^{k+2} q^{n-(k+2)} \\ &= n\ (n-1)\ p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k}\ p^k q^{(n-2)-k} \\ &= n\ (n-1)\ p^2 \end{aligned}$$

En combinant tous ces résultats, on obtient que : $\mathbb{E}(X^2) = n\ (n-1)\ p^2 + np$. On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= n(n-1)\ p^2 + np - (np)^2 \\ &= np\ ((n-1)\ p + 1 - np) \\ &= np\ (\cancel{np} - p + 1 - \cancel{np}) \;=\; np\ (1-p) \;=\; npq \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = npq}$$

$$\boxed{\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \tfrac{1}{4}\right) \text{ alors } \mathbb{E}(X) = \frac{n}{4} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = n\,\frac{1}{4}\,\frac{3}{4} = \frac{3n}{16}.}$$

Commentaire

- On a refait le calcul de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$ ici pour rappeler la méthode. Mais il faut connaître la valeur de l'espérance et de la variance des lois classiques. Aux concours, seul le résultat est exigible et il ne faudra donc pas, sauf si c'est explicitement demandé, refaire ces calculs.
- La méthode de calcul de $\mathbb{E}(X^2)$ se base sur l'écriture sur les éléments $k \in X(\Omega)$ du support :
$$k^2 = k(k-1) + k$$
À l'échelle des variables aléatoires cela correspond à l'écriture :
$$X^2 = X(X-1) + X$$
Par linéarité de l'espérance, on obtient alors :
$$\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X)$$
On retrouve ainsi la partie de gauche et la partie de droite du calcul précédent. □

b) $\mathbb{E}(X-3)$ et $\mathbb{V}(X-3)$.

Démonstration.
La v.a.r. $X-3$ admet une espérance et une variance en tant que transformée affine de la v.a.r. X qui admet une variance.

- De plus par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}(X-3) \;=\; \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(3) \;=\; \mathbb{E}(X) - 3 \;=\; \frac{n}{4} - 3$$
- Et par propriété de la variance :
$$\mathbb{V}(X-3) \;=\; \mathbb{V}(X) \;=\; \frac{n}{16}$$
(on rappelle que $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$)

$$\boxed{\mathbb{E}(X-3) = \frac{n}{4} - 3 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{n}{16}}$$

□

c) $\mathbb{E}(2X)$ et $\mathbb{V}(2X)$.

Démonstration.
Avec les mêmes arguments que dans la question précédente, on obtient :

$$\boxed{\mathbb{E}(2X) = 2\mathbb{E}(X) = \frac{2n}{4} = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(2X) = 4\mathbb{V}(X) = \frac{4n}{16} = \frac{n}{4}}$$

□

d) $\mathbb{E}(X^2)$.

Démonstration.

- $X^2(\Omega) = \{i^2 \mid i \in [\![0, n]\!]\}$.
  (ce qui n'a rien à voir avec $[\![0, n^2]\!]$!)
  Ainsi, X^2 est une v.a.r. finie et admet donc des moments à tous les ordres. En particulier, X^2 admet une espérance et une variance.
- D'après le théorème de Kœnig-Huygens :

$$\mathbb{V}(X) \; = \; \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

  On en déduit que :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X^2) & = & \mathbb{V}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \\ & = & npq + (np)^2 \\ & = & np(1-p) + n^2p^2 \\ & = & np - np^2 + n^2p^2 \; = \; np + n(n-1)p^2 \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(X^2) = np + n(n-1)p^2 = \frac{n}{4} + \frac{n(n-1)}{16} = \frac{n(n+3)}{16}}$$

Commentaire

Il faut retenir cette méthode : lorsqu'on connaît la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$ (il faut les connaître dans le cas des lois classiques), on obtient immédiatement la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

□

II. Séance 1 : formule des probabilités composées

Exercice 2
Une puce se déplace sur les trois sommets d'un triangle ABC du plan.
À l'instant 0, elle est en A. À chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$ suivant, elle saute du sommet où elle se trouve de la manière suivante :

× si elle est en A, elle va en B ;

× si elle est en B, elle a autant de chance d'aller en A qu'en C ;

× si elle est en C, elle y reste (saute sur place).

On introduit les événements A_n, B_n et C_n suivants.

- A_n : « la puce est en A à l'instant n ».
- B_n : « la puce est en B à l'instant n ».
- C_n : « la puce est en C à l'instant n ».

On admet que la puce ne peut arriver au point C qu'à des instants pairs.

1. Énoncer la formule des probabilités composées.

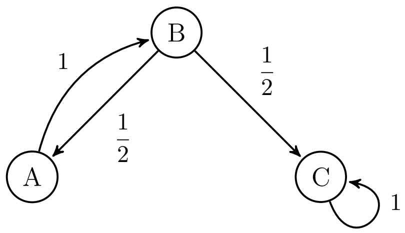
Démonstration.
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
Soit $(A_1, \dots, A_m)$ une famille finie d'événements de $\mathscr{A}$.
On suppose : $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}) \neq 0$.
On a alors :

$$\boxed{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_m) = \mathbb{P}(A_1)\ \mathbb{P}_{A_1}(A_2)\ \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3)\ \dots\ \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}}(A_m)}$$ $\square$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Exprimer, à l'aide des événements fournis, l'événement :
F : « la puce arrive en C la première fois à l'instant 4 ».

Démonstration.
On peut représenter l'expérience grâce au graphe suivant qui représente les probabilités que la puce a de sauter d'un point à un autre :



Pour être pour la première fois en C à l'instant 4, la puce effectue le trajet suivant.

- À l'instant 0, elle est en A.
- À l'instant 1, provenant de A, elle a forcément atterri en en B.
- À l'instant 2, provenant de B elle pourrait avoir atterri en A ou en C.
  Cependant, pour qu'elle arrive en C pour la première fois à l'instant 4, il faut obligatoirement qu'elle ait atterri en A.
- À l'instant 3, elle a forcément attterri en B.
- À l'instant 4, elle a atterri en C.

$$\boxed{\text{Ainsi, } F = A_0 \cap B_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap C_4.}$$ $\square$

b) Exprimer, à l'aide des événements fournis, l'événement :
G_n : « la puce arrive en C la première fois à l'instant $2n$ ».

Démonstration.
On raisonne de la même manière que dans la question précédente.
Pour que la puce atterrisse la première fois en C à l'instant $2n$, il faut qu'elle fasse des aller-retours de A à C jusque l'instant $2n-1$ puis saute en C.

$$\boxed{G_n = A_0 \cap B_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap \cdots \cap A_{2n-2} \cap B_{2n-1} \cap C_{2n}}$$ □

c) Calculer la probabilité que la puce arrive en C, pour la première fois, à l'instant $2n$.

Démonstration.
D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}(G_n) & \\ = & \mathbb{P}(A_0 \cap B_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap \cdots \cap A_{2n-2} \cap B_{2n-1} \cap C_{2n}) & \\ = & \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}(B_1)\ \mathbb{P}_{A_0 \cap B_1}(A_2) \cdots\ \mathbb{P}_{A_0 \cap \cdots \cap B_{2n-2}}(B_{2n-1})\ \mathbb{P}_{A_0 \cap \cdots \cap B_{2n-1}}(C_{2n}) & \\ = & \mathbb{P}(A_0)\ \mathbb{P}_{A_0}(B_1)\ \mathbb{P}_{B_1}(A_2) \cdots\ \mathbb{P}_{B_{2n-2}}(B_{2n-1})\ \mathbb{P}_{B_{2n-1}}(C_{2n}) & \textit{(car la position de la puce à l'instant } i \textit{ ne dépend que de sa position à l'instant } i-1\textit{)} \\ = & \underbrace{1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2}}_{2n+1 \text{ termes (instants 0 à } 2n)} & \textit{(d'après les probabilités conditionnelles de l'énoncé)} \\ = & 1 \times 1^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n & \end{array}$$

$$\boxed{\text{La probabilité que la puce arrive en } C \text{ pour la première fois à l'instant } 2n \text{ est } \frac{1}{2^n}.}$$ □

Exercice 3
Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l'un d'eux se trouve un morceau de fromage. Au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement A_k : « lors de la $k^{\text{ème}}$ tentative, le rat choisit le bon couloir le menant au fromage ». De plus, on note T la v.a.r. qui donne le numéro de la première tentative réussie par le rat. On considère enfin un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Exprimer $[T = n]$ en fonction des événements A_k.
Exprimer $\mathbb{P}\big([T = n]\big)$ à l'aide de la formule des probabilités composées.

Démonstration.
Deux cas se présentent.
- Si $n = 1$: $[T = n] = [T = 1] = A_1$. Dans ce cas : $\mathbb{P}\big([T = 1]\big) = \mathbb{P}(A_1)$.
- Si $n \geqslant 2$:
$$[T = n] = \overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}} \cap A_n$$
Ainsi, si $\mathbb{P}\left(\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-1}}\right) \neq 0$, on a, d'après la formule des probabilités composées :
$$\mathbb{P}\big([T = n]\big) = \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\ \mathbb{P}_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right)\ \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \overline{A_2}}\left(\overline{A_3}\right)\ \ldots\ \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_{n-2}}}\left(\overline{A_{n-1}}\right)\ \mathbb{P}_{\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{n-1}}}(A_n)$$

□

2. On considère dans cette question que le rat n'a aucun souvenir des expériences antérieures. Autrement dit, à chaque tentative, le rat choisit un couloir indépendamment de ses précédents choix.

a) À l'aide de la question ***1.***, déterminer la probabilité que la première tentative réussie soit la $n^{\text{ème}}$.

Démonstration.
Dans ce cas, la connaissance des expériences précédentes ne modifie pas le comportement du rat.
Ainsi, d'après la question précédente, si $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([T=n]\big) &= \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\ \mathbb{P}_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right)\ \mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}}\left(\overline{A_3}\right)\ \dots\ \mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\dots\cap\overline{A_{n-2}}}\left(\overline{A_{n-1}}\right)\ \mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\dots\cap\overline{A_{n-1}}}(A_n) \\
&= \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\ \mathbb{P}\left(\overline{A_2}\right)\ \mathbb{P}\left(\overline{A_3}\right)\ \dots\ \mathbb{P}\left(\overline{A_{n-1}}\right)\ \mathbb{P}(A_n) \\
&= \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\dots\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3} \qquad (*) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\ \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$(*)$: en effet, chaque couloir a la même probabilité d'être choisi.
Enfin, si $n=1$: $\mathbb{P}\big([T=1]\big) = \mathbb{P}(A_1) = \dfrac{1}{3}$.
(la formule précédente fonctionne dans le cas $n=1$)

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([T=n]\big) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\ \frac{1}{3}.}$$

□

b) Reconnaître la loi de la v.a.r. T. Commenter.

Démonstration.

- Tout d'abord : $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
En effet, le rat peut choisir le bon couloir lors de son premier essai ou lors de tout essai suivant.
- D'après la question précédente : $\forall n \geqslant 1$, $\mathbb{P}([T=n]) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\ \dfrac{1}{3}$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } T \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right).}$$

Ce résultat n'est pas surprenant.

- En effet, l'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes (le choix d'un couloir n'influe pas les futurs choix) et de même paramètre $p = \dfrac{1}{3}$.
- La v.a.r. donnant le rang d'apparition du premier succès suit donc la loi géométrique de paramètre p.

□

3. On considère dans cette question que le rat se souvient de l'expérience précédente et évite donc, lors de la tentative suivante, un couloir dans lequel il vient de recevoir une décharge.
Déterminer la probabilité que la première tentative réussie soit la $n^{\text{ème}}$.

Démonstration.
D'après la question ***1.***, si $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([T=n]\big) &= \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\ \mathbb{P}_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right)\ \mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\overline{A_2}}\left(\overline{A_3}\right)\ \ldots\ \mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\ldots\cap\overline{A_{n-2}}}\left(\overline{A_{n-1}}\right)\ \mathbb{P}_{\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_{n-1}}}(A_n) \\
&= \mathbb{P}\left(\overline{A_1}\right)\ \mathbb{P}_{\overline{A_1}}\left(\overline{A_2}\right)\ \mathbb{P}_{\overline{A_2}}\left(\overline{A_3}\right)\ \ldots\ \mathbb{P}_{\overline{A_{n-2}}}\left(\overline{A_{n-1}}\right)\ \mathbb{P}_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) && \textit{(car le rat ne se rappelle que du choix précédent)} \\
&= \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\ldots\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} && (*) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$(*)$: en effet, si lors d'un essai le rat a choisi un couloir qui le mène à une décharge, il ne choisit plus ce couloir l'essai suivant et choisit alétoirement parmi les 2 couloirs restants.
Enfin, si $n = 1$: $\mathbb{P}\big([T=1]\big) = \mathbb{P}(A_1) = \dfrac{1}{3}$.
(la formule précédente ne fonctionne pas dans le cas $n = 1$!)

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, si } n \geqslant 2 : \mathbb{P}\big([T=n]\big) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\ \dfrac{2}{3}. \\ \text{Si } n=1,\ \mathbb{P}\big([T=1]\big) = \dfrac{1}{3}.\end{array}}$$

□

Exercice 4
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$, et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

Commentaire

- Formellement, l'événement N_n n'est pas défini dans cet énoncé. Il aurait fallu ajouter :

  on note N_n l'événement : « le $n^{\text{ème}}$ tirage donne la boule noire »

- Notons au passage qu'on ne définit pas non plus l'événement B_n : « le $n^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche ». Ce n'est pas primordial ici puisque $B_n = \varnothing$ (comme l'urne ne contient que $n-1$ boules blanches et qu'on procède sans remise, on ne peut piocher une boule blanche lors du $n^{\text{ème}}$ tirage).
- On peut enfin remarquer : $N_n \cancel{=} \overline{B_n}$.
  En effet : $\overline{B_n} = \overline{\varnothing} = \Omega$ est toujours réalisé mais ce n'est pas le cas de N_n.
  Par exemple, la boule noire peut être piochée lors du 1^{er} tirage.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

Démonstration.
L'urne contient n boules dont une seule est noire. Le tirage s'effectuant sans remise, la boule noire apparaît au pire lors du $n^{\text{ème}}$ tirage dans l'urne. Elle peut aussi apparaître lors de n'importe quel autre tirage précédent.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X(\Omega) = [\![1, n]\!].}$$

□

2. a) Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que $\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![2, n-1]\!]$.

Si l'événement $B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}$ est réalisé, c'est qu'une boule blanche a été piochée lors des $i-1$ premiers tirages dans l'urne. À l'issue de ces tirages, l'urne est alors constituée de $(n-\cancel{1})-(i-\cancel{1}) = n-i$ boules blanches et de la boule noire (l'urne contient donc $n-i+1$ boules en tout).

Dans ce cas, l'événement B_i est réalisé si et seulement si le $i^{\text{ème}}$ tirage amène une boule blanche. Autrement dit, si l'on obtient l'une des $n-i$ boules non encore piochées. Chaque boule étant piochée de manière équiprobable :

$$\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![2, n-1]\!], \ \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}.}$$

□

b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $\mathbb{P}\big([X=k]\big)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Deux cas se présentent.

- Si $k=1$, alors : $[X=1]=N_1$.
  On rappelle que l'urne contient n boules dont 1 noire.

  $$\boxed{\text{Chaque boule étant piochée de manière équiprobable : } \mathbb{P}\big([X=k]\big)=\frac{1}{n}.}$$

- Si $k \in [\![2,n]\!]$, alors l'événement $[X=k]$ est réalisé si et seulement si on a pioché successivement $(k-1)$ boules blanches puis une noire. Ainsi :

  $$[X=k] \;=\; B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k$$

  On en déduit par la formule des probabilités composées :

  $$\begin{array}{cl} & \mathbb{P}\big([X=k]\big) \\ = & \mathbb{P}\big(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k\big) \\ = & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1\cap B_2}(B_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times \mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k) \\ = & \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n-2}{n-1} \times \dfrac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \dfrac{n-(k-1)}{n-(k-1)+1} \times \dfrac{1}{n-k+1} \end{array}$$

  Précisons cette dernière égalité :

  × $\mathbb{P}(B_1)=\mathbb{P}\left(\overline{N_1}\right)=1-\dfrac{1}{n}=\dfrac{n-1}{n}$.

  × $\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k)=\dfrac{1}{n-k+1}$ car chaque boule a même probabilité d'être tirée.
  Plus précisément, si l'événement $B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}$ est réalisé, c'est que les $k-1$ permiers tirages ont donné une boule blanche.
  Dans ce cas, l'événement N_k est réalisé si et seulement si lors du $k^{\text{ème}}$ tirage la boule noire est tirée dans l'urne contenant $n-k+1$ boules.

  Finalement, en procédant à des simplifications successives, on obtient :

  $$\mathbb{P}\big([X=k]\big) \;=\; \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}\big([X=k]\big) \;=\; \frac{1}{n}.}$$

□

c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :

  × $X(\Omega)=[\![1,n]\!]$.

  × $\forall k \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}\big([X=k]\big) \;=\; \dfrac{1}{n}$.

  $$\boxed{\text{Ainsi : } X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!]).}$$

- On en déduit que X admet une espérance et une variance.

  $$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(X)=\frac{n+1}{2} \;\text{ et }\; \mathbb{V}(X)=\frac{(n-1)(n+1)}{12}.}$$

Commentaire

Une bonne connaissance du cours est une condition *sine qua non* de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de maths (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours. En l'occurrence, il s'agit ici simplement de connaître les caractéristiques d'une loi usuelle.

□

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente et qui vaut 0 sinon.

a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$\mathbb{P}\big(\, [X = k] \cap [Y = 0] \,\big) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

- Remarquons tout d'abord :

	L'événément $[X = k] \cap [Y = 0]$ est réalisé		
$\Leftrightarrow$	L'événément $[X = k]$ est réalisé	et	l'événement $[Y = 0]$ est réalisé
$\Leftrightarrow$	On a effectué k tirages (la boule noire a été obtenue lors du $k^{\text{ème}}$ tirage)	et	la boule blanche numérotée 1 n'a pas été piochée lors de l'expérience

On en déduit :

$$[X = k] \cap [Y = 0] \ = \ B_1^{(0)} \cap \ldots \cap B_{k-1}^{(0)} \cap N_k$$

Où l'on a noté, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $B_i^{(0)}$ l'événément « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche numérotée 0 » (en particulier, $B_{n-1}^{(0)} = \varnothing$).

- On en déduit par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big(\, [X = k] \,\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big(B_1^{(0)} \cap \ldots \cap B_{k-1}^{(0)} \cap N_k\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big(B_1^{(0)}\big) \times \mathbb{P}_{B_1^{(0)}}\big(B_2^{(0)}\big) \times \mathbb{P}_{B_1^{(0)} \cap B_2^{(0)}}\big(B_3^{(0)}\big) \times \ \cdots \ \times \mathbb{P}_{B_1^{(0)} \cap \cdots \cap B_{k-2}^{(0)}}\big(B_{k-1}^{(0)}\big) \times \mathbb{P}_{B_1^{(0)} \cap \cdots \cap B_{k-1}^{(0)}}(N_k) \\
= \ & \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \ \cdots \ \times \frac{(n-\cancel{2}) - (k-\cancel{2})}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1}
\end{aligned}$$

Précisons cette dernière égalité :

× $\mathbb{P}\big(B_1^{(0)}\big) = \dfrac{n-2}{n}$ car chaque boule a même probabilité d'être tirée et que l'urne contient initialement n boules dont $(n-2)$ sont blanches et numérotées 0.

× $\forall i \in [\![2, n-1]\!]$, $\mathbb{P}_{B_1^{(0)} \cap \cdots \cap B_{i-1}^{(0)}}\big(B_i^{(0)}\big) = \dfrac{n-i-1}{n-i+1}$.

En effet, si les $i-1$ premiers tirages ont donné une boule blanche numérotée 0, il reste $n - (i-1) = n-i+1$ boules dans l'urne dont $(n-2) - (i-1) = n-i-1$ blanches numérotées 0.

× $\mathbb{P}_{B_1^{(0)} \cap \cdots \cap B_{k-1}^{(0)}}(N_k) = \dfrac{1}{n-k+1}$ en procédant comme à la question précédente.

- Dans le produit précédent, les termes apparaissant au numérateur se simplifient avec les termes présents au dénominateur de la fraction présente deux rangs après.

Après simplification, on obtient : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}\big([X = k] \cap [Y = 0] \big) \ = \ \dfrac{n-k}{n(n-1)}$.

Commentaire

Comme $Y(\Omega) = \{0, 1\}$, on obtient à l'aide du système complet d'événements $\big([Y = 0]\,, [Y = 1] \big)$:

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\big([X = k] \cap [Y = 1] \big) \ = \ 1 - \mathbb{P}\big([X = k] \cap [Y = 0] \big) \ = \ 1 - \frac{n-k}{n(n-1)}$$

On obtient ainsi la loi du couple (X, Y), c'est à dire la valeur de $\mathbb{P}\big([X = k] \cap [Y = \ell] \big)$ pour $k \in X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $\ell \in Y(\Omega) = \{0, 1\}$.

□

b) En déduire $\mathbb{P}\big([Y = 0] \big)$.

Démonstration.
La famille $\big([X = k] \big)_{k \in [\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
D'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y = 0] \big) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X = k] \cap [Y = 0] \big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n\,(n-1)} \\
&= \frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (n-k) \\
&= \frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{j=0}^{n-1} j && \textit{(à l'aide du décalage d'indice } j = n-k\textit{)} \\
&= \frac{1}{n\,(n-1)} \, \frac{n\,(n-1)}{2} \ = \ \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([Y = 0] \big) = \frac{1}{2}}$$

Commentaire

Le changement d'indice $j = n - k$ est en fait une sommation dans l'autre sens :

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\sum\limits_{k=1}^{n} (n-k) & = & (n-1) & + & (n-2) & + \ \cdots \ + & (n-(n-1)) & + & (n-n) \\
 & = & (n-1) & + & (n-2) & + \ \cdots \ + & 1 & + & 0 \\
\sum\limits_{j=0}^{n-1} j & = & 0 & + & 1 & + \ \cdots \ + & (n-2) & + & (n-1)
\end{array}$$

□

c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

Démonstration.

- Comme $Y(\Omega) = \{0,1\}$, on obtient à l'aide du système complet d'événements $\big([Y=0], [Y=1]\big)$:

$$\mathbb{P}\big([Y=0]\big) + \mathbb{P}\big([Y=1]\big) \quad = \quad 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([Y=1]\big) = 1 - \mathbb{P}\big([Y=1]\big) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.}$$

- Finalement :
  × $Y(\Omega) = \{0,1\}$,
  × $\mathbb{P}\big([Y=0]\big) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = \dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } Y \text{ admet une espérance et une variance. De plus :}\\ \mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}.\end{array}}$$

□

III. Séance 2 : formule des probabilités totales

Exercice 5

1. Énoncer la formule des probabilités totales.

Démonstration.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements.

- Alors, pour tout événement B, on a : $\boxed{\mathbb{P}(B) \ = \ \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)}$
- Supposons de plus : $\forall i \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}(A_i) \neq 0$.

  On peut alors écrire : $\boxed{\mathbb{P}(B) \ = \ \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i) \ \mathbb{P}_{A_i}(B)}$

☐

2. Une boîte A contient deux jetons portant le numéro 0 et une boîte B contient deux jetons portant le numéro 1.

On tire au hasard un jeton dans chaque boîte et on échange ces jetons.
On recommence cette opération n fois, $n \in \mathbb{N}^*$.
On s'intéresse à la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant n.
Pour cela, on introduit les événements suivants.

- P_n : « la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant n vaut 0 ».
- Q_n : « la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant n vaut 1 ».
- R_n : « la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant n vaut 2 ».

On pose également $p_n = \mathbb{P}(P_n)$; $q_n = \mathbb{P}(Q_n)$ et $r_n = \mathbb{P}(R_n)$.

a) Calculer p_0, q_0, r_0, p_1, q_1, r_1.

Démonstration.

- À l'instant 0, l'urne A contient deux jetons portant le numéro 0.
  La somme des jetons de cette urne vaut donc 0.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } p_0 = \mathbb{P}(P_0) = 1, \ q_0 = \mathbb{P}(Q_0) = 0 \text{ et } r_0 = \mathbb{P}(R_0) = 0.}$$

- À l'instant 1, on a pris un jeton dans chaque urne et on les a échangés. L'urne A et l'urne B contiennent donc maintenant un jeton portant le numéro 1 et un jeton portant le numéro 0.
  La somme des jetons de l'urne A vaut donc 1.

  $$\boxed{\text{Ainsi, } p_1 = \mathbb{P}(P_1) = 0, \ q_1 = \mathbb{P}(Q_1) = 1 \text{ et } r_1 = \mathbb{P}(R_1) = 0.}$$

☐

b) Trouver une relation entre r_n, p_n et q_n.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La famille (P_n, Q_n, R_n) constitue un système complet d'événements. En effet :

1) Ces événements sont deux à deux incompatibles.
Par exemple, $P_n \cap R_n = \varnothing$: la somme des jetons de l'urne A ne peut valoir à la fois 0 et 2.

2) $\Omega = P_n \cup Q_n \cup R_n$.
Quelle que soit la situation à l'instant n, la somme des jetons de l'urne A vaut 0 ou 1 ou 2.

On en déduit notamment :

$$\mathbb{P}(P_n) + \mathbb{P}(Q_n) + \mathbb{P}(R_n) \ = \ 1$$

$$\boxed{\text{Autrement dit : } p_n + q_n + r_n = 1.}$$

☐

c) Exprimer p_{n+1} (resp. q_{n+1}, resp. r_{n+1}) en fonction de p_n, q_n, r_n.

Démonstration.
La famille (P_n, Q_n, R_n) constitue un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\begin{array}{rclclcl} \mathbb{P}(P_{n+1}) & = & \mathbb{P}(P_n \cap P_{n+1}) & + & \mathbb{P}(Q_n \cap P_{n+1}) & + & \mathbb{P}(R_n \cap P_{n+1}) \\ & = & \mathbb{P}(P_n)\, \mathbb{P}_{P_n}(P_{n+1}) & + & \mathbb{P}(Q_n)\, \mathbb{P}_{Q_n}(P_{n+1}) & + & \mathbb{P}(R_n)\, \mathbb{P}_{R_n}(P_{n+1}) \quad \textit{(car } \mathbb{P}(P_n) \neq 0, \ \mathbb{P}(Q_n) \neq 0, \ \mathbb{P}(R_n) \neq 0\textit{)} \\ & = & p_n\, \mathbb{P}_{P_n}(P_{n+1}) & + & q_n\, \mathbb{P}_{Q_n}(P_{n+1}) & + & r_n\, \mathbb{P}_{R_n}(P_{n+1}) \end{array}$$

- Déterminons $\mathbb{P}_{P_n}(P_{n+1})$.
  Si P_n est réalisé, c'est qu'à l'instant n, la somme des jetons de l'urne A est 0. Cette urne contient donc les 2 jetons numérotés 0. On en déduit que l'urne B contient les 2 jetons numérotés 1.
  À l'instant $n+1$, on pioche 1 jeton dans chaque urne et on les échange. Après échange, l'urne A (et l'urne B) contient donc 1 jeton numéroté 0 et 1 jeton numéroté 1. Ainsi, la somme des jetons de l'urne A vaut 1.

$$\boxed{\mathbb{P}_{P_n}(P_{n+1}) = 0}$$

- Déterminons $\mathbb{P}_{R_n}(P_{n+1})$.
  Si R_n est réalisé, c'est qu'à l'instant n, la somme des jetons de l'urne A est 2. Cette urne contient donc les 2 jetons numérotés 1. On en déduit que l'urne B contient les 2 jetons numérotés 0.
  À l'instant $n+1$, on pioche 1 jeton dans chaque urne et on les échange. Après échange, l'urne A (et l'urne B) contient donc 1 jeton numéroté 0 et 1 jeton numéroté 1. Ainsi, la somme des jetons de l'urne A vaut 1.

$$\boxed{\mathbb{P}_{R_n}(P_{n+1}) = 0}$$

- Déterminons $\mathbb{P}_{Q_n}(P_{n+1})$.
  Si Q_n est réalisé, c'est qu'à l'instant n, la somme des jetons de l'urne A est 1. Cette urne contient donc 1 jeton de chaque sorte. Il en est de même de l'urne B.
  À l'instant $n+1$, on pioche 1 jeton dans chaque urne et on les échange. Alors :
  × soit on a tiré les jetons 1 de chaque urne.
  Ainsi, l'urne A contient 1 jeton numéroté 1 et 1 jeton numéroté 0.
  × soit on a tiré les jetons 0 de chaque urne.
  Ainsi, l'urne A contient 1 jeton numéroté 1 et 1 jeton numéroté 0.
  × soit on a tiré le jeton 1 dans l'urne A et le jeton 0 dans l'urne B.
  Ainsi, l'urne A contient les 2 jetons 0.
  × soit on a tiré le jeton 0 dans l'urne A et le jeton 1 dans l'urne B.
  Ainsi, l'urne A contient les 2 jetons 1.

  Ces 4 issues sont équiprobables.

$$\boxed{\text{On en déduit que : } \mathbb{P}_{Q_n}(P_{n+1}) = \frac{1}{4}.}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } p_{n+1} = \frac{1}{4} q_n.}$$

En procédant de même, on obtient :

$$\begin{array}{rcccccc} q_{n+1} = \mathbb{P}(Q_{n+1}) & = & \mathbb{P}(P_n)\ \mathbb{P}_{P_n}(Q_{n+1}) & + & \mathbb{P}_(Q_n)\ \mathbb{P}_{Q_n}(Q_{n+1}) & + & \mathbb{P}_(R_n)\ \mathbb{P}_{R_n}(Q_{n+1}) \\ & = & p_n\ \mathbb{P}_{P_n}(Q_{n+1}) & + & q_n\ \mathbb{P}_{Q_n}(Q_{n+1}) & + & r_n\ \mathbb{P}_{R_n}(Q_{n+1}) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Puis : } q_{n+1} = p_n + \frac{1}{2} q_n + r_n.}$$

$$\begin{array}{rcccccc} r_{n+1} = \mathbb{P}(R_{n+1}) & = & \mathbb{P}(P_n)\ \mathbb{P}_{P_n}(R_{n+1}) & + & \mathbb{P}_(Q_n)\ \mathbb{P}_{Q_n}(R_{n+1}) & + & \mathbb{P}_(R_n)\ \mathbb{P}_{R_n}(R_{n+1}) \\ & = & p_n\ \mathbb{P}_{P_n}(R_{n+1}) & + & q_n\ \mathbb{P}_{Q_n}(R_{n+1}) & + & r_n\ \mathbb{P}_{R_n}(R_{n+1}) \end{array}$$

$$\boxed{\text{Puis : } r_{n+1} = \frac{1}{4} q_n.}$$

Commentaire

- On écrit généralement ces résultats sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcccccc} p_{n+1} & = & 0\ p_n & + & \frac{1}{4}\ q_n & + & 0\ r_n \\ q_{n+1} & = & 1\ p_n & + & \frac{1}{2}\ q_n & + & 1\ r_n \\ r_{n+1} & = & 0\ p_n & + & \frac{1}{4}\ q_n & + & 0\ r_n \end{array} \right.$$

  ou mieux, en utilisant une présentation matricielle :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$$

- En nommant ces matrices, on obtient une égalité matricielle de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = A\ U_n$$

  Et ainsi, par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = A^n\ U_0$.
- Il reste alors à déterminer une formule explicite pour A^n.
  L'élévation à la puissance n d'une matrice n'est pas simple dans le cas général.
  Il existe cependant des cas particuliers simples à traiter :

  1) Si A est diagonale. Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$ (avec $1^n = 1$).

  2) Si A s'écrit sous la forme : $A = P \Delta P^{-1}$ avec Δ diagonale.
  On a alors : $A^n = P \Delta^n P^{-1}$.
- C'est le but du chapitre de réduction de deuxième année de caractériser les matrices qui peuvent s'écrire sous la forme décrite en ***2)*** et de trouver les matrices P et Δ correspondantes.
  On en reparlera.

□

Exercice 6

Une entreprise de construction produit des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.
Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.
On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. De plus :

× la probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est $0,1$.

× la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est $0,2$.

On considère l'événement E : « l'objet provient de la chaîne A ».

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Quelle est la probabilité que cet objet provienne de la chaîne A ?

Démonstration.

- Définition des événements
  Notons D l'événement : « l'objet est défectueux ».
  Ainsi $\overline{D}$ est l'événement : « l'objet a été correctement monté ».

- Récupération des données de l'énoncé
  D'après l'énoncé :

  × $\mathbb{P}(E) = 0,6$ et donc $\mathbb{P}(\overline{E}) = 0,4$,

  × $\mathbb{P}_E(D) = 0,1$ et donc $\mathbb{P}_E\left(\overline{D}\right) = 0,9$,

  × $\mathbb{P}_{\overline{E}}(D) = 0,2$ et donc $\mathbb{P}_{\overline{E}}\left(\overline{D}\right) = 0,8$.

- Déterminons la probabilité que l'objet soit défectueux.
  La famille $(E, \overline{E})$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{array}{rcccccl} \mathbb{P}(D) & = & \mathbb{P}(E \cap D) & + & \mathbb{P}(\overline{E} \cap D) & & \\ & = & \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}_E(D) & + & \mathbb{P}(\overline{E}) \times \mathbb{P}_{\overline{E}}(D) & & \textit{(car } \mathbb{P}(E) \neq 0 \textit{ et } \mathbb{P}(\overline{E}) \neq 0\textit{)} \\ & = & 0,6 \times 0,1 & + & 0,4 \times 0,2 & & \\ & = & \dfrac{6}{10} \times \dfrac{1}{10} & + & \dfrac{4}{10} \times \dfrac{2}{10} & = & \dfrac{14}{100} \end{array}$$

- L'objet de la question est de déterminer $\mathbb{P}_D(E)$ (bien défini car $\mathbb{P}(D) \neq 0$).
  D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_D(E) = \frac{\mathbb{P}(E)\ \mathbb{P}_E(D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\frac{6}{10}\ \frac{1}{10}}{\frac{14}{100}} = \frac{6}{\cancel{100}}\ \frac{\cancel{100}}{14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

$$\boxed{\text{La probabilité qu'un objet provienne de la chaîne } A \text{ sachant qu'il est défectueux est } \dfrac{3}{7}.}$$ □

2. On suppose maintenant que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$.
On considère alors la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

Démonstration.

- On dit qu'une v.a.r. Y suit **la loi de Poisson** de paramètre $\lambda > 0$ si :
  a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$
  b) $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y = k]) = \mathrm{e}^{-\lambda}\ \dfrac{\lambda^k}{k!}$
- Si $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors :
  × Y admet une espérance et $\mathbb{E}(Y) = \lambda$.
  × Y admet une variance et $\mathbb{V}(Y) = \lambda$. □

b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Y=n]}([X = k])$.
(on distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k > n$)

Démonstration.
Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$. Deux cas se présentent.

- Si $k > n$ alors $\mathbb{P}_{[Y=n]}([X = k]) = 0$.
  En effet, si l'événement $[Y = n]$ est réalisé, c'est que la chaîne A a produit n objets en une heure. Cette probabilité est donc nulle car le nombre k d'objets défectueux produits sur cette heure ne peut être supérieur au nombre d'objets n produits.

$$\boxed{\text{Si } k > n \text{ alors } \mathbb{P}_{[Y=n]}([X = k]) = 0.}$$

- Si $k \leqslant n$.
  – À chaque production d'objets par la chaîne A, deux issues sont possibles.
  Soit l'objet est défectueux ce qui se réalise avec probabilité $p = 0,1$ (on nomme cette issue le succès de l'expérience aléatoire) soit l'objet est produit correctement ce qui se réalise avec probabilité $1 - p$ (cette issue est nommée échec).
  La production d'une pièce par la chaîne A est donc une illustration d'une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,1$ dont le succès est la défectuosité de l'objet.
  – Si l'événement $[Y = n]$ est réalisé, c'est que la chaîne A a produit n objets en une heure.
  La production successive de ces n objets correspond à une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
  On est donc ramené à l'étude d'une loi binomiale de paramètre (n, p).
  L'indépendance provient du fait que la défectuosité d'une pièce n'a pas d'influence sur la défectuosité des autres pièces.

$$\boxed{\text{On en déduit que si } k \leqslant n \text{ alors } \mathbb{P}_{[Y=n]}([X = k]) = \binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k}.}$$

□

c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $\big([Y = i]\big)_{i\in\mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.
La famille $([Y = i])_{i\in\mathbb{N}}$ constitue le système complet d'événements associé à la v.a.r. Y.
Ainsi, par la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X = k]) \\
= \ & \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = n] \cap [X = k]) \\
= \ & \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = n]) \times \mathbb{P}_{[Y=n]}([X = k]) && \textit{(car } \mathbb{P}([Y = n]) \neq 0\textit{)} \\
= \ & \cancel{\sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}([Y = n]) \times \mathbb{P}_{[Y=n]}([X = k])} + \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([Y = n]) \times \mathbb{P}_{[Y=n]}([X = k]) && \textit{(car si } k > n \textit{ alors } \mathbb{P}_{[Y=n]}([X = k]) = 0\textit{)} \\
= \ & \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k \ (1-p)^{n-k} \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ \frac{\lambda^n}{n!} && \textit{(d'après la question précédente)} \\
= \ & \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} p^k \ (1-p)^{n} \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ \frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} && \textit{(par changement d'indice)} \\
= \ & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cancel{(n+k)!}}{k! \ n!} p^k \ (1-p)^{n} \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ \frac{\lambda^{n+k}}{\cancel{(n+k)!}} \\
= \ & \frac{p^k}{k!} \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ \lambda^k \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^n \ \lambda^n}{n!} \ = \ \frac{(p\lambda)^k}{k!} \ \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((1-p) \ \lambda)^n}{n!} \\
= \ & \frac{(p\lambda)^k}{k!} \ \mathrm{e}^{-\lambda} \ \mathrm{e}^{(1-p)\lambda} \ = \ \frac{(p\lambda)^k}{k!} \ \cancel{\mathrm{e}^{-\lambda}} \ \cancel{\mathrm{e}^{\lambda}} \ \mathrm{e}^{-p\lambda} && \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique)}
\end{aligned}$$

On remarque enfin que : $p\lambda = \dfrac{1}{10} \ 20 = 2$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que : } \forall k \in \mathbb{N}, \ \mathbb{P}([X = k]) = \dfrac{2^k}{k!} \ \mathrm{e}^{-2}. \\ \text{Ce qui démontre que : } Y \hookrightarrow \mathcal{P}(2).\end{array}}$$

Commentaire

Il faut noter que cette démonstration est valable lorsque $k = 0$. Dans ce cas, la somme pour n variant de 0 à $+\infty$ se découpe en une somme sur un ensemble vide d'indice ($n \in [\![0, -1]\!]$) et une somme pour n variant de 0 à $+\infty$. Autrement dit, le découpage a un effet neutre.

□

IV. Séance 3 : variables discrètes

Exercice 7

1. Une puce se déplace en faisant des sauts aléatoires sur un axe gradué. Initialement à l'origine, la puce se déplace à chacun de ses sauts d'une unité vers la droite avec probabilité $p \in]0, 1[$, ou d'une unité vers la gauche avec probabilité $1 - p$. On note Y_n le nombre de fois où elle s'est déplacée vers la droite entre le premier et le $n^{\text{ème}}$ saut (compris).
Quelle est la loi de Y_n ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession de n d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p, paramètre qui correspond à la probabilité que la puce se déplace d'une unité vers la droite.
- La v.a.r. Y_n correspond au nombre de succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).}$$ □

2. Une urne contient des boules blanches en proportion b et vertes en proportion v. Donc $0 < b < 1$, $0 < v < 1$ et $b + v = 1$. On effectue des tirages successifs avec remise dans cette urne. On note X le numéro du tirage où la première boule verte apparaît.
Quelle est la loi de X ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre v, paramètre qui correspond à la probabilité de l'obtention d'une boule verte.
- La v.a.r. X correspond au rang du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{G}(v).}$$ □

3. Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. On suppose que les conducteurs arrivant au péage choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. On note Z le numéro du guichet choisi par le 1^{er} conducteur arrivant au péage.
Quelle est la loi de Z ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi 10 issues numérotées de 1 à 10.
- La v.a.r. Z correspond au numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 10]\!]).}$$ □

Commentaire

Lorsqu'une v.a.r. suit une loi usuelle, il est impératif de respecter la rédaction suivante :
1) description de l'expérience,

2) description de la v.a.r. aléatoire.
On s'attachera toujours à bien détailler ces deux points.

Exercice 8

Soit $p \in \,]0,1[$. On note $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. a) Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- On remarque tout d'abord :

$$\mathbb{P}([X > k]) \; = \; 1 - \mathbb{P}(\overline{[X > k]}) \; = \; 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k])$$

- Par ailleurs, comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$: $[X \leqslant k] \; = \; \bigcup\limits_{i=1}^{k} \; [X = i]$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \; [X = i]\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left([X = i]\right) & \textit{(par incompatibilité de } [X=1], \ldots, [X=i]\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} p \; q^{i-1} \; = \; p \sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i & \\ & = & p \; \dfrac{1-q^k}{1-q} & \textit{(car } q \neq 1\textit{)} \\ & = & 1 - q^k & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Enfin : } \mathbb{P}([X > k]) \; = \; 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k]) \; = \; 1 - (1 - q^k) \; = \; q^k.}$$

□

b) On suppose maintenant : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

(i) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([X = k]) \; = \; \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} [X > k-1] & = & [X \geqslant k] & \textit{(car } X \textit{ est à valeurs entières)} \\ & = & [X = k] \cup [X > k] & \end{array}$$

Les événements $[X = k]$ et $[X > k]$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}([X > k-1]) = \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([X > k])$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]).}$$

□

(ii) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X = k]) & = & \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & q^{k-1} - q^k & \textit{(par hypothèse de la question } \textbf{1.b)}\textit{)} \\ & = & q^{k-1}(1-q) \ = \ q^{k-1}p & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ suit la loi } \mathcal{G}(p).}$$

□

c) Conclure.

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)*** : $\quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.
- D'après la question ***1.b)*** : $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k \quad \Rightarrow \quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
- Ainsi, si X est une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On obtient ainsi une nouvelle caractérisation de la loi géométrique, à savoir :} \\ X(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k. \end{array}}$$

□

2. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- On dit que deux v.a.r. X et Y sont indépendantes si, pour tout couple d'intervalles réels (I, J) :

$$\mathbb{P}([X \in I] \cap [Y \in J]) \ = \ \mathbb{P}([X \in I]) \times \mathbb{P}([Y \in J])$$

- Par exemple, si $t \in \mathbb{R}$ et que X et Y sont indépendantes, on a :

$$\mathbb{P}([X > t] \cap [Y > t]) \ = \ \mathbb{P}([X > t]) \times \mathbb{P}([Y > t])$$

Ce résultat est obtenu en appliquant la définition à $I = \,]t, +\infty[\, = J$

On considère deux v.a.r. X_1 et X_2 indépendantes et de même loi $\mathcal{G}(p)$.
Déterminer la loi de la v.a.r. $M = \min(X_1, X_2)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$: $M(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminons $\mathbb{P}([M > k])$.
  × Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl} [M > k] & = & [\min(X_1, X_2) > k] \\ & = & [X_1 > k] \cap [X_2 > k] \end{array}$$

× On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([M > k]) &= \mathbb{P}\left([X_1 > k] \cap [X_2 > k]\right) \\
&= \mathbb{P}([X_1 > k]) \times \mathbb{P}([X_2 > k]) && \textit{(car les v.a.r. } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= q^k \times q^k && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ suivent la loi } \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
&= \left(q^k\right)^2 \ = \ q^{2n} \\
&= \left(q^2\right)^k
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'après la caractérisation de la question } \textbf{\textit{1.}}\text{, on en déduit : } M \hookrightarrow \mathcal{G}\left(q^2\right).}$$

Commentaire

- On fait ici l'étude de la loi d'un minimum de v.a.r. . Cette étude est classique et commence toujours par l'énoncé de l'égalité entre événements :

$$[\min(X_1, X_2) > k] \ = \ [X_1 > k] \cap [X_2 > k]$$

- On rappelle que dans le cas de l'étude d'un maximum de v.a.r. , on commence par une égalité similaire :

$$[\max(X_1, X_2) \leqslant k] \ = \ [X_1 \leqslant k] \cap [X_2 \leqslant k]$$

□

3. Déterminer la loi de la v.a.r. $Z = X_1 + X_2$.

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $X_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$: $Z(\Omega) \subset [\![2, +\infty[\![$.
- La famille $([X_1 = i])_{i \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Soit $k \in [\![2, +\infty[\![$. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}([X_1 + X_2 = k]) \\
= \ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_1 + X_2 = k]) \\
= \ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k - i]) \\
= \ & \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i])\ \mathbb{P}([X_2 = k - i]) && \textit{(par indépendance de } X_1 \textit{ et } X_2\textit{)} \\
= \ & \sum_{\substack{i = 1 \\ k - i \in X_2(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i])\ \mathbb{P}([X_2 = k - i]) \\
& + \cancel{\sum_{\substack{i = 1 \\ k - i \notin X_2(\Omega)}}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = i])\ \mathbb{P}([X_2 = k - i])} && \textit{(car } [X_2 = k - i] = \varnothing \textit{ si } k - i \notin X_2(\Omega)\textit{)} \\
= \ & \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}([X_1 = i])\ \mathbb{P}([X_2 = k - i])
\end{aligned}$$

- La dernière ligne est obtenue en constatant :

$$\left\{\begin{array}{l} k-i \in X_2(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ i \in [\![1, +\infty[\![\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1 \leqslant k-i \\ 1 \leqslant i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} i \leqslant k-1 \\ 1 \leqslant i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\ 1 \leqslant i \leqslant k-1\right.$$

- Ainsi, en reprenant les égalités précédentes :

$$\begin{array}{rll} & \mathbb{P}([X_1+X_2=k]) & \\ = & \sum\limits_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}([X_1=i])\ \mathbb{P}([X_2=k-i]) & \\ = & \sum\limits_{i=1}^{k-1} q^{i-1} p\, q^{k-i-1} p & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \\ & & \textit{et } X_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\ = & p^2 \sum\limits_{i=1}^{k-1} q^{\cancel{i}-1+k-\cancel{i}-1} & \\ = & p^2\, q^{k-2} \sum\limits_{i=1}^{k-1} 1 & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } Z(\Omega) \subset [\![2, +\infty[\![\quad \text{et} \quad \forall k \in [\![2, +\infty[, \ \mathbb{P}([Z=k]) = (k-1)\, p^2\, q^{k-2}.}$$

□

4. a) Démontrer à l'aide de ***1.b)(i)*** : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k])$.

Démonstration.
La v.a.r. X admet une espérance car elle suit une loi géométrique.
Par définition $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\ \mathbb{P}([X=k])$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Considérons la somme partielle $\sum\limits_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([X=k])$ correspondante.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([X=k]) \\
= \ & \sum_{k=1}^{N} k\left(\ \mathbb{P}([X>k-1]) - \ \mathbb{P}([X>k])\right) \\
= \ & \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([X>k-1]) - \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([X>k]) \\
= \ & \sum_{k=0}^{N-1} (k+1)\ \mathbb{P}([X>k]) - \sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([X>k]) \\
= \ & \sum_{k=0}^{N-1} k\ \mathbb{P}([X>k]) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X>k]) - \sum_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([X>k]) \\
= \ & 0 \times \mathbb{P}([X>0]) + \cancel{\sum_{k=1}^{N-1} k\ \mathbb{P}([X>k])} + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X>k]) \\
& - \left(\cancel{\sum_{k=1}^{N-1} k\ \mathbb{P}([X>k]} + N\ \mathbb{P}([X>N])\right) \\
= \ & \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X>k]) - N\ \mathbb{P}([X>N]) \\
= \ & -N\ q^N \ + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X>k])
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([X=k]) = -N\ q^N \ + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X>k])}$$

Ainsi : $\sum\limits_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X>k]) \ = \ \sum\limits_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([X=k]) + N\ q^N$.
Les membres droits de l'égalité admettent une limite. Plus précisément :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([X=k]) \ = \ \mathbb{E}(X) \quad \text{et} \quad \lim_{N\to+\infty} N\ q^N = 0$$

On en déduit que le membre de gauche admet une limite.

$$\boxed{\text{De plus : } \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X>k]) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X>k]) \ = \ \mathbb{E}(X).}$$

Commentaire

- La démonstration consiste à démontrer un résultat de type somme télescopique.
On pouvait faire apparaître directement une telle somme en remarquant :

$$k\ \mathbb{P}([X = k]) = (k-1)\ \mathbb{P}([X > k-1]) - k\ \mathbb{P}([X > k]) + \mathbb{P}([X > k-1])$$

Ainsi, par sommation et linéarité :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N} k\ \mathbb{P}([X = k]) \\
=\ & \sum_{k=1}^{N} \Big((k-1)\ \mathbb{P}([X > k-1]) - k\ \mathbb{P}([X > k])\Big) + \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}([X > k-1]) \\
=\ & \cancel{(1-1)\ \mathbb{P}([X > 1-1])} - N\ \mathbb{P}([X > N]) + \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}([X > k-1]) \\
=\ & -N\ \mathbb{P}([X > N]) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}([X > k])
\end{aligned}$$

- Le résultat : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k])$, démontré ici pour une v.a.r. suivant une loi géométrique, est valable pour toute variable aléatoire **à valeurs entières** admettant une espérance. Le point de démonstration qui diffère est la démonstration de : $\lim\limits_{N \to +\infty} N\, \mathbb{P}([X > N]) = 0$.
Dans le cadre de cet exercice, on peut conclure par croissances comparées car : $N\, \mathbb{P}([X > N]) = N\, q^N$. Mais cela demande un peu plus de travail dans le cas général.
- L'énoncé impose ici l'utilisation de la question ***1.b)(i)*** pour conclure. Dans le cas d'une v.a.r. suivant une loi géométrique, la relation : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k])$, peut aussi se démontrer par un calcul direct. En effet, soit $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}([X > k]) \ = \ \sum_{k=0}^{N} q^k$$

On reconnaît une somme partielle de la série géométrique de raison $q \in\ ]-1, 1[$. Cette série est convergente. On obtient :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k]) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \ = \ \frac{1}{1-q} \ = \ \frac{1}{p} \ = \ \mathbb{E}(X)$$

$\square$

b) Retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X)$ avec cette formule.

Démonstration.
D'après ce qui précède : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k]) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} q^k = \dfrac{1}{1-q} = \dfrac{1}{p}$.

$$\boxed{\text{On retrouve : } \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}.}$$

$\square$

Commentaire

- Dans un contexte où X est un variable aléatoire mesurant une durée de vie (durée de vie d'une cellule, durée de fonctionnement d'un composant électronique, nombre de cycle de charge/décharge autorisé par une batterie), on introduit souvent la fonction :

$$S : t \mapsto \mathbb{P}([X > t]) = 1 - \mathbb{P}([X \leqslant t]) = 1 - F_X(t)$$

Dans ce cas, $S(t) = \mathbb{P}([X > t])$ représente la probabilité que l'objet (ou l'individu) considéré soit encore en vie après une durée t.

Dans le cas d'un phénomène à durée de vie continue (durée de vie d'une cellule), la modélisation s'appuiera sur une v.a.r. X à densité.
Dans le cas d'un phénomène à durée de vie discrète (nombre de cycles d'une batterie), la modélisation s'appuiera sur une v.a.r. X discrète.

- Considérons la propriété d'absence de mémoire dans ce contexte.

$$\mathbb{P}_{[X>k]}([X > k + \ell]) = \mathbb{P}([X > \ell])$$

Considérons que X compte la durée de fonctionnement d'un composant avant une panne. Alors cette propriété signifie que la durée de vie restante d'un objet est indépendante de la durée de vie écoulée de l'objet (période durant laquelle il a fonctionné sans tomber en panne). Autrement dit, il n'y a pas de vieillissement ou encore d'usure du composant électronique considéré. C'est un cas assez fréquent en réalité : on peut considérer que les diodes, transistors, résistances, condensateurs sont sans usure puisque leur usure ne débute que bien après la fin de vie de l'objet dans lequel ils sont installés. C'est pourquoi la durée de vie d'un composant est souvent modélisée par une v.a.r. qui suit loi exponentielle qui est, elle aussi, sans mémoire (c'est même une propriété qui caractérise la loi exponentielle).

- Il est fréquent de tomber sur une étude de la fonction de survie aux concours (cadre de l'analyse de fiabilité qui mesure la probabilité d'occurrence d'une défaillance d'un système).

5. Une urne contient 3 boules rouges et 7 boules vertes. On effectue dans cette urne des tirages successifs avec remise, et on note X la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage pour lequel on obtient pour la première fois une boule rouge. On note de plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, V_k l'événement « obtenir une boule verte au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

a) Quelle est la loi de X ? Justifier.

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre $\dfrac{3}{10}$, paramètre qui correspond à la probabilité de l'obtention d'une boule rouge.
- La v.a.r. X correspond au rang du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\dfrac{3}{10}\right).}$$

□

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $[X > k]$ en fonction des événements V_i.
Retrouver la valeur de $\mathbb{P}([X > k])$.

Démonstration.

- L'événement $[X > k]$ est réalisé si et seulement si la première boule rouge a été tirée pour la première fois strictement après le $k^{\text{ème}}$ tirage, c'est-à-dire lorsqu'on a obtenu uniquement des boules vertes lors des k premiers tirages.

$$\boxed{\text{Ainsi : } [X > k] = V_1 \cap \cdots \cap V_k.}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X > k]) & = & \mathbb{P}(V_1 \cap \cdots \cap V_k) & \\ & = & \mathbb{P}(V_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_k) & \textit{(car les tirages sont indépendants)} \\ & = & \dfrac{3}{10} \times \cdots \times \dfrac{3}{10} & \textit{(car le choix de la boule dans l'urne s'effectue de manière uniforme)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On retrouve bien, comme en question } \textbf{\textit{1.a)}} : \mathbb{P}([X > k]) = \left(\frac{3}{10}\right)^k.}$$

Commentaire

On propose dans cet exercice, en questions ***1.a)*** et ***5.b)***, deux manière de démontrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$. La méthode de cette question ***5.b)*** exploite en particulier l'expérience qui définit la loi géométrique.

□

V. Séance 4 : variables à densité

V.1. Fonction de répartitition et lois usuelles

Exercice 9
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. On considère une v.a.r. X définie sur cet espace probabilisé.

a) Rappeler la définition de variable aléatoire.

Démonstration.

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

- On dit que X est une **variable aléatoire réelle** définie sur $(\Omega, \mathscr{A})$ si :
  - ***(i)*** X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$ ($X : \Omega \to \mathbb{R}$)
  - ***(ii)*** $\forall x \in \mathbb{R},\ \ [X \leqslant x] = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \ \leqslant\ x\} \in \mathscr{A}$
- L'image de X, notée $X(\Omega)$ est nommée **ensemble image** de X.
  $X(\Omega)$ contient l'ensemble des valeurs que prend la fonction X :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{array}$$

Commentaire

Il faut bien noter que, dans la définition de $X(\Omega)$, aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît. Même si cela ne correspond pas directement à la définition, il est d'usage courant de confondre, dans le cas des v.a.r. discrètes, l'ensembles de valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$) et l'ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle (dans le cas où X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\text{Supp}(X)$).

□

b) La v.a.r. X admet-elle une fonction de répartition F_X ? Comment est définie cette fonction ?

Démonstration.

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

- Si X est une variable aléatoire réelle, on appelle **fonction de répartition de** X et on note F_X l'application :

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} F_X & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & & \\ & & x & \mapsto & F_X(x) & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) \end{array}}$$

- Par définition, $[X \leqslant x] \in \mathscr{A}$. Or l'application $\mathbb{P}$ est définie sur $\mathscr{A}$.
  Ainsi, $F_X(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{On en conclut qu'une v.a.r. admet toujours une fonction de répartition.}}$$

□

c) Lister les propriétés vérifiées par F_X.

Démonstration.

- Si X est une v.a.r. alors sa fonction de répartition F_X vérifie :
  1) $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$.
  2) F_X est croissante.
  3) $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1}$
  4) F_X est continue à droite en tout point $x \in \mathbb{R}$.
  Autrement dit : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t > x}} F_X(t) = F_X(x)}$
  5) F_X admet une limite finie à gauche en tout point $x \in \mathbb{R}$.
  $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t < x}} F_X(t) \ = \ F_X(x) - \mathbb{P}([X = x]) \ = \ \mathbb{P}([X < x])}$
- Il est à noter que ces propriétés sont vérifiées pour toute v.a.r. qu'elle soit quelconque, discrète, ou à densité. □

d) Quelle propriété F_X doit-elle vérifier pour que X soit une v.a.r. à densité ?

Démonstration.
On dit qu'une v.a.r. X **est à densité** si sa fonction de répartition F_X est :
a) continue sur $\mathbb{R}$,
b) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points. □

2. On considère maintenant une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda > 0$.
On considère la v.a.r. $Y = \sqrt{X}$?

a) La v.a.r. Y est-elle bien définie ?

Démonstration.

- On rappelle qu'une v.a.r. X suit **la loi exponentielle de paramètre** λ (avec $\lambda > 0$) si :
  a) $\boxed{X(\Omega) = [0, +\infty[}$
  b) X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

- Comme $X(\Omega) = [0, +\infty[$, la fonction :

$$\sqrt{X} : \begin{array}{rcl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \sqrt{X(\omega)} \end{array}$$

est bien définie sur Ω.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y \text{ est bien définie.}}$$

□

b) Déterminer sa fonction de répartition F_Y.

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto \sqrt{x}$, de sorte que $Y = h(X)$.
  Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $X(\Omega) = [0, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} Y(\Omega) & = & h(X)(\Omega) \ = \ h(X(\Omega)) & \\ & = & h([0,+\infty[) & \\ & = & [h(0), \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)[& \textit{(car } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ & = & [0,+\infty[& \textit{(car } \sqrt{0} = 0 \textit{ et } \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } Y(\Omega) = [0,+\infty[.}$$

- Si $x < 0$ alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$. Ainsi :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

- Si $x \geqslant 0$ alors :

$$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\sqrt{X} \leqslant x\right]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant x^2\right]\right) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \textit{ sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ & = & F_X(x^2) \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \textit{(car } x^2 \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{En résumé, la fonction de répartition de } Y \text{ est définie par :} \\ \quad F_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad\quad x \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{array}\right. \end{array}}$$

□

c) La v.a.r. Y admet-elle une densité ? Si oui, la déterminer.

Démonstration.

- La fonction F_Y est :

  1) continue sur $\mathbb{R}$ puisque :
  - × $x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$,
  - × $x \mapsto 0$ est continue sur $]-\infty, 0[$.
  - × $\lim\limits_{x\to 0} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^2} = 1 - 1 = 0 = \lim\limits_{x\to 0} 0$.

  2) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ car :
  - × $x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$,
  - × $x \mapsto 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- On obtient une densité f_Y de Y en dérivant sur les intervalles ouverts.

$$f_Y : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2\lambda \, x \, \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \text{si } x > 0 \end{array} \right. \end{array}$$

On **pose** alors : $f_Y(0) = 0$ (par exemple).

$$\boxed{f_Y : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2\lambda \, x \, \mathrm{e}^{-\lambda x^2} & \text{si } x > 0 \end{array} \right. \end{array}}$$

□

Exercice 10

Donner la fonction de répartition et l'espérance des variables aléatoires réelles suivantes.

1. X suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Démonstration.

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi exponentielle de paramètre** λ (avec $\lambda > 0$) si :

  a) $\boxed{X(\Omega) = [0, +\infty[}$

  b) X admet pour densité la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \lambda \, \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors sa fonction de répartition F_X est définie par :

$$F_X : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{array} \right. \end{array}$$

- Enfin : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

□

2. T suit la loi normale centrée réduite.

Démonstration.

- On dit qu'une v.a.r. X suit **la loi normale centrée réduite** si :

  a) $\boxed{X(\Omega) =]-\infty, +\infty[}$

  b) X admet pour densité la fonction φ définie par :

$$\varphi : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}$$

- La fonction de répartition associée à la loi normale centrée réduite n'admet pas d'expression « simple ». On la note Φ.

$$\begin{array}{rccl} \Phi & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \mapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt \end{array}$$

- Enfin : $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$. □

Commentaire

- On rappelle que toute v.a.r. admet une fonction de répartition : la quantité $\mathbb{P}([X \leqslant x])$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- La fonction de répartition F_X caracatérise la loi de X.
  Ainsi, si on reconnaît une fonction de répartition classique, c'est que X suit cette loi classique.
- En revanche, seules les v.a.r. à densité admettent une densité.
  Les densités caractérisent elles aussi les lois.
- Il est donc important de connaître les expressions des fonctions de répartition et des densités dans le cas des v.a.r. à densité. Dans le cas des v.a.r. discrètes, la connaissance de la fonction de répartition n'est pas exigible.

Exercice 11

On note U une variable suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.

1. Déterminer la loi de la variable $Z = -\ln(1-U)$.
Pour cela, on déterminera la fonction de répartition de Z.

Démonstration.

- Notons $h : x \mapsto -\ln(1-x)$, de sorte que $Z = h(U)$.
  Comme $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$, alors $U(\Omega) = [0,1[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} Z(\Omega) & = & h(U)(\Omega) \ = \ h(U(\Omega)) & \\ & = & h([0,1[) & \\ & = & [h(0), \displaystyle\lim_{x \to 1} h(x)[& \textit{(car h est continue et strictement croissante sur $[0,1[$)} \\ & = & [0,+\infty[& \textit{(car $-\ln(1-0) = \ln(1) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1} -\ln(1-x) = +\infty$)} \end{array}$$

$$\boxed{Z(\Omega) = (-\ln(1-U))(\Omega) = [0,+\infty[}$$

- Déterminons alors la fonction de répartition de Z.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.
  × Si $x < 0$ alors $[Z \leqslant x] = \varnothing$. Ainsi :

$$F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = 0$$

× Si $x \geqslant 0$ alors :

$$\begin{array}{rcll} F_Z(x) & = & \mathbb{P}([Z \leqslant x]) & \\ & = & \mathbb{P}\left([-\ln(1-U) \leqslant x]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left([\ln(1-U) \geqslant -x]\right) & \\ & = & \mathbb{P}\left([1-U \geqslant \mathrm{e}^{-x}]\right) & \textit{(par stricte croissance de la fonction } x \mapsto e^x\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\left([U \leqslant 1-\mathrm{e}^{-x}]\right) & \\ & = & F_U(1-\mathrm{e}{-}x) \ = \ 1-\mathrm{e}^{-x} & \textit{(par définition de } F_U \textit{ et car } 1-e^{-x} \in [0,1[\textit{)} \end{array}$$

En résumé, la fonction de répartition de Z est définie par :

$$F_Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

□

2. Quelle loi classique reconnaît-on ?

Démonstration.
On reconnaît la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.
Or la fonction de répartition caractérise la loi.

On en déduit que $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

□

3. On rappelle que la fonction `rand` permet de simuler une v.a.r. suivant la loi uniforme sur $[0,1[$.
Compléter le programme suivant afin qu'il simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

```
u = rand()
z = ...
```

Démonstration.

```
u = rand()
z = -(log(1-u))
```

□

V.2. Densité de probabilité

Exercice 12
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|)$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Démonstration.
Il s'agit de démontrer que f vérifie les trois points caractéristiques des fonctions de densité.

(i) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car elle est la composée $h \circ g$ où :
- $\times$ $g : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$,
- $\times$ $h : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^{-|x|} > 0 \geqslant 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.

(iii) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente si $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\ dx$ le sont.

- La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.
Soit $A \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\int_0^A f(x)\ dx &= \frac{1}{2} \int_0^A \mathrm{e}^{-|x|}\ dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^A \mathrm{e}^{-x}\ dx \\
&= \frac{1}{2}\ \left[\ -\mathrm{e}^{-x}\ \right]_0^A \ = \ -\frac{1}{2}\ \left[\ \mathrm{e}^{-x}\ \right]_0^A \\
&= -\frac{1}{2}\ (\mathrm{e}^{-A} - \mathrm{e}^{0}) \ = \ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-A} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On en conclut que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente et vaut $\dfrac{1}{2}$.

- D'autre part, la fonction f est paire puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-|-x|} = \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-|x|} = f(x)$$

(la fonction valeur absolue est elle-même paire : $\forall x \in \mathbb{R},\ |-x| = |x|$*)*
Soit $B \in [0, +\infty[$. En posant le changement de variable $\boxed{u = -x}$, on obtient :

$$\int_{-B}^{0} f(x)\ dx = \int_{B}^{0} f(-u)(-\ du) = \int_{B}^{0} f(u)(-\ du) = \int_0^B f(u)\ du \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\ dx$ est elle aussi convergente de valeur $\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente et :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\ dx + \int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est bien une densité de probabilité.}}$$

□

2. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f.

a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \in]-\infty, 0[$:

$$\begin{array}{rcll} F(x) & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt & \textit{(par définition)} \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt \ + \ \int_{0}^{x} f(t)\ dt & \textit{(par la relation de Chasles)} \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt \ + \ \frac{1}{2} \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{t}\ dt & \textit{(car } x<0 \textit{ et } |t| = -t \textit{ pour } t \in [x, 0[\textit{)} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2} \ + \ \frac{1}{2}\ (\mathrm{e}^{x} - 1) & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{x} & \end{array}$$

- Si $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{array}{rcll} F(x) & = & \mathbb{P}([X \leqslant x]) \ = \ \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt & \textit{(par définition)} \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt \ + \ \int_{0}^{x} f(t)\ dt & \textit{(par la relation de Chasles)} \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt \ + \ \int_{0}^{x} f(t)\ dt & \textit{(par parité de } f\textit{)} \\ & = & \displaystyle\frac{1}{2} \ + \ \frac{1}{2}\ (1 - \mathrm{e}^{-x}) & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.}}\textit{)} \\ & = & \displaystyle 1 - \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-x} & \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \dfrac{1}{2}\ \mathrm{e}^{x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right. \end{array}}$$

Commentaire

- Lorsque la fonction f est paire, on obtient : $\forall x \in \mathbb{R},\ F(-x) = 1 - F(x)$.
On peut déterminer l'expression de F sur $]-\infty, 0]$ depuis celle sur $[0, +\infty[$ à l'aide de cette propriété. En effet, si $x < 0$:
$$F(x) \ = \ 1 - F(-x) \ = \ 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-(-x)}\right) \ = \ \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{x}$$

- Pour $x \in \mathbb{R}$, la propriété évoquée se démontre comme suit.

$$\begin{array}{rcll} F(-x) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{-x} f(t)\ dt & \textit{(par définition)} \\ & = & \displaystyle\int_{+\infty}^{x} f(-u)\ (-du) & \textit{(avec le changement de variable } \boxed{u = -t}\textit{)} \\ & = & \displaystyle -\int_{+\infty}^{x} f(u)\ du \ = \ \int_{x}^{+\infty} f(u)\ du & \\ & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\ du - \int_{-\infty}^{x} f(u)\ du \ = \ 1 - F(x) & \end{array}$$

$\square$

b) Montrer que X admet une espérance puis la calculer.

Démonstration.
La v.a.r. X admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\ dx$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence pour des calculs de moment de type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\ f(x)\ dx$.

Il s'agit donc de démontrer que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x f(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x f(x)\ dx$ sont convergentes.

1) Considérons tout d'abord l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x f(x)\ dx$.

- La fonction $x \mapsto x f(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- Soit $A \in [0, +\infty[$. Déterminons $\displaystyle\int_{0}^{A} x f(x)\ dx$ par intégration par parties (IPP).

$$\left| \begin{array}{rclcrcl} u(x) & = & x & \quad & u'(x) & = & 1 \\ v'(x) & = & \mathrm{e}^{-x} & \quad & v(x) & = & -\mathrm{e}^{-x} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$. On obtient :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{0}^{A} x f(x)\ dx & = & -\left[\ x\mathrm{e}^{-x}\ \right]_0^A + \displaystyle\int_{0}^{A} \mathrm{e}^{-x}\ dx \\ & = & -(A\ \mathrm{e}^{-A} - 0) - \left[\ \mathrm{e}^{-x}\ \right]_0^A \\ & = & -A\ \mathrm{e}^{-A} - (\mathrm{e}^{-A} - 1) \\ & = & 1 - A\ \mathrm{e}^{-A} - \mathrm{e}^{-A} \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \end{array}$$

On en conclut que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x f(x)\ dx$ converge et vaut 1.

2) Considérons maintenant l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xf(x)\ dx$.

La fonction $x \mapsto xf(x)$ est continue sur $]-\infty, 0]$.

Soit $B \geqslant 0$. En posant le changement de variable $\boxed{u = -x}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-B}^{0} xf(x)\ dx &= \int_{B}^{0} -uf(-u)(-\ du) = -\int_{B}^{0} u\,f(u)(-\ du) = \int_{B}^{0} u\,f(u)\ du \\ &= -\int_{0}^{B} u\,f(u)\ du \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} -\int_{0}^{+\infty} u\,f(u)\ du\end{aligned}$$

(comme la fonction f est paire, la fonction $x \mapsto xf(x)$ est impaire)

Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xf(x)\ dx$ est elle aussi convergente de valeur $\displaystyle -\int_{0}^{+\infty} xf(x)\ dx$.

3) On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx$ est convergente et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx = \int_{-\infty}^{0} xf(x)\ dx + \int_{0}^{+\infty} xf(x)\ dx = \int_{0}^{+\infty} xf(x)\ dx - \int_{0}^{+\infty} xf(x)\ dx = 0$$

$$\boxed{X \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(X) = 0.}$$

Commentaire

Dans le point *1)*, on calcule la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} xf(x)\ dx$ à l'aide d'une intégration par parties. Finalement, cette valeur n'a que peu d'importance puisqu'elle sera compensée par $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xf(x)\ dx$ (du fait du caractère impair de $x \mapsto xf(x)$).

On peut aussi démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} xf(x)\ dx$ sans en calculer la valeur. Cela passe par une comparaison avec des intégrales de fonctions classiques. On donne ci-dessous le détail d'une telle rédaction.

- La fonction $x \mapsto xf(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
- D'autre part :
$$\frac{xf(x)}{\frac{1}{x^2}} = x^3\ \mathrm{e}^{-|x|} = \frac{x^3}{\mathrm{e}^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
(on considère la première égalité dans un voisinage de $+\infty$ et donc $|x| = x$)
On en déduit que : $xf(x) = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ dx$ est convergente en tant qu'intégrale de Riemann impropre en $+\infty$ d'exposant 2 ($2 > 1$).
- Ainsi, par critère de négligeabilité des intégrales généralisées de fonctions continues positives, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} xf(x)\ dx$ est convergente.
- $x \mapsto xf(x)$ est continue sur le segment $[0, 1]$, donc $\displaystyle\int_{0}^{1} xf(x)\ dx$ est bien définie.
- On en conclut, par relation de Chasles, que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} xf(x)\ dx$ converge.

□

VI. Séance 5 : Loi du minimum, loi du maximum

Exercice 13
On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- On dit que les v.a.r. X_1, ..., X_n sont (mutuellement) indépendantes si, pour tous intervalles réels I_1, ..., I_n :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \in I_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \in I_i])$$
- Par exemple, si $t \in \mathbb{R}$ et que X_1, ..., X_n sont indépendantes, on a :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant t]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant t])$$

Ce résultat est obtenu en appliquant la définition à $I_1 = \ \dots \ = I_n = \,]-\infty, t]$

Soient X_1, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.
On définit les variable aléatoires $U_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ et $V_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$[U_n > t] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > t] \qquad \text{et} \qquad [V_n \leqslant t] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant t]$$

Démonstration.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Montrons que $[U_n > t] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > t]$.
Soit $\omega \in \Omega$.
$$\begin{aligned} \omega \in [U_n > t] &\Leftrightarrow \omega \in [\min(X_1, \dots, X_n) > t] \\ &\Leftrightarrow \min(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) > t \\ &\Leftrightarrow X_1(\omega) > t \ \texttt{ET} \ \cdots \ \texttt{ET} \ X_n(\omega) > t \\ &\Leftrightarrow \omega \in [X_1 > t] \ \texttt{ET} \ \cdots \ \texttt{ET} \ \omega \in [X_n > t] \\ &\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > t] \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{On en déduit que : } [U_n > t] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > t].}$$
- Montrons que $[V_n \leqslant t] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant t]$.
Soit $\omega \in \Omega$.
$$\begin{aligned} \omega \in [V_n \leqslant t] &\Leftrightarrow \omega \in [\max(X_1, \dots, X_n) \leqslant t] \\ &\Leftrightarrow \max(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \leqslant t \\ &\Leftrightarrow X_1(\omega) \leqslant t \ \texttt{ET} \ \cdots \ \texttt{ET} \ X_n(\omega) \leqslant t \\ &\Leftrightarrow \omega \in [X_1 \leqslant t] \ \texttt{ET} \ \cdots \ \texttt{ET} \ \omega \in [X_n \leqslant t] \\ &\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant t] \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{On en déduit que : } [V_n \leqslant t] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant t].}$$

$\square$

2. Déterminer la fonction de répartition G_n, puis une densité g_n de la v.a.r. U_n.

Démonstration.

- Les v.a.r. X_1, ..., X_n suivent des lois uniformes sur le segment $[0,1]$.
  On en déduit : $X_1(\Omega) = \cdots = X_n(\Omega) = [0,1]$.
  Ainsi $\min(X_1, \ldots, X_n)(\Omega) \subset [0,1]$.

$$\boxed{U_n(\Omega) \subset [0,1]}$$

- Déterminons alors la fonction de répartition de U_n.
  Soit $t \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.

  × Si $t < 0$ alors $[U_n \leqslant t] = \varnothing$ car $U_n(\Omega) \subset [0,1]$. Donc, on a :

$$F_{U_n}(t) = \mathbb{P}([U_n \leqslant t]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  × Si $t > 1$ alors $[U_n \leqslant t] = \Omega$, car $U_n(\Omega) = [0,1]$. Donc, on a :

$$F_{U_n}(t) = \mathbb{P}([U_n \leqslant t]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

  × Si $t \in [0,1]$ alors :

$$\begin{array}{rcll}
F_{U_n}(t) & = & \mathbb{P}([U_n \leqslant t]) & \\
& = & 1 - \mathbb{P}([U_n > t]) & \\
& = & 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i > t]\right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\
& = & 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i > t]) & \textit{(par indépendance de } X_1, \ldots, X_n\textit{)} \\
& = & 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} \big(1 - \mathbb{P}([X_i \leqslant t])\big) & \\
& = & 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} (1 - F_{X_i}(t)) & \\
& = & 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} (1 - t) & \textit{(car : } \forall i \in [\![1,n]\!], X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \textit{ et } t \in [0,1]\textit{)} \\
& = & 1 - (1-t)^n &
\end{array}$$

En résumé, la fonction de répartition de U_n est définie par :

$$\boxed{\begin{array}{rccl} G_n & : & \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto \left\{\begin{array}{cl} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1-(1-t)^n & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{array}\right. \end{array}}$$

- La fonction G_n est :

  1) continue :

  $\times$ sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante.

  $\times$ sur $]0, 1[$ en tant que fonction polynomiale,

  $\times$ sur $]0, +\infty[$ en tant que fonction constante.

  $\times$ en 0. En effet : $\lim\limits_{t \to 0^-} G_n(t) = \lim\limits_{t \to 0} 0 = 0 = \lim\limits_{t \to 0} 1 - (1-t)^n = \lim\limits_{t \to 0^+} G_n(t)$.

  $\times$ en 1. En effet : $\lim\limits_{t \to 1^-} G_n(t) = \lim\limits_{t \to 1} 1 - (1-t)^n = 1 = \lim\limits_{t \to 0} 1 = \lim\limits_{t \to 1^+} G_n(t)$.

  $$\boxed{\text{La fonction } G_n \text{ est donc continue sur } \mathbb{R}.}$$

  2) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, 1[$ et sur $]0, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

  $$\boxed{\text{La fonction } G_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en 0 et en 1.}}$$

  $$\boxed{\text{On en déduit que } U_n \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- On obtient une densité g_n de U_n en dérivant G_n sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ (qui sont bien des intervalles ouvets).

$$g_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } t < 0 \\ n\ (1-t)^{n-1} & \text{si } t \in\ ]0, 1[\\ 0 & \text{si } t > 1 \end{array} \right. \end{array}$$

  On **choisit** de plus $g_n(0) = n$ et $g_n(1) = 0$ (par exemple).

$$\boxed{\text{La fonction } g_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} n\ (1-t)^{n-1} & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \text{ est une densité de la v.a.r. } U_n.}$$

□

3. Déterminer la fonction de répartition H_n, puis une densité h_n de le v.a.r. V_n.

Démonstration.

- Les v.a.r. X_1, ..., X_n suivent des lois uniformes sur le segment $[0, 1]$.
  On en déduit : $X_1(\Omega) = \cdots = X_n(\Omega) = [0, 1]$.
  Ainsi $\max(X_1, \ldots, X_n)(\Omega) \subset [0, 1]$.

  $$\boxed{V_n(\Omega) \subset [0, 1]}$$

- Déterminons alors la fonction de répartition de V_n.
  Soit $t \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent

  $\times$ Si $t < 0$ alors $[V_n \leqslant t] = \varnothing$, car $V_n(\Omega) = [0, 1]$. Donc, on a :

  $$F_{V_n}(t) = \mathbb{P}([V_n \leqslant t]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  $\times$ Si $t > 1$ alors $[V_n \leqslant t] = \Omega$, car $V_n(\Omega) = [0, 1]$. Donc, on a :

  $$F_{V_n}(t) = \mathbb{P}([V_n \leqslant t]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

$\times$ Si $t \in [0,1]$ alors :

$$\begin{array}{rcll} F_{V_n}(t) & = & \mathbb{P}([V_n \leqslant t]) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant t]\right) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant t]) & \textit{(par indépendance de } X_1, \ldots, X_n\textit{)} \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} F_{X_i}(t) & \\ & = & \prod\limits_{i=1}^{n} t & \textit{(car : } \forall i \in [\![1,n]\!], X_i \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]) \textit{ et } t \in [0,1]\textit{)} \\ & = & t^n & \end{array}$$

En résumé, la fonction de répartition de V_n est définie par :

$$H_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^n & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

- En procédant de la même manière qu'en question précédente, on démontre que H_n est :
  1) continue sur $\mathbb{R}$.
  2) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et 1.

On en déduit que V_n est une v.a.r. à densité.

- On obtient une densité h_n de V_n en dérivant sur les intervalles $]-\infty, 0[$, sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ (qui sont bien des intervalles ouverts).

$$h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ n\, t^{n-1} & \text{si } t \in]0,1[\\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

On **choisit** alors $h_n(0) = 0$ et $h_n(1) = n$ (par exemple).

La fonction : $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} n\, t^{n-1} & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de la v.a.r. V_n.

$\square$

4. Calculer l'espérance de U_2.

Démonstration.

- La v.a.r. U_2 admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ g_2(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui équivaut à démontrer sa convergence pour des calculs de moment de type $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^m\, g_2(t)\ dt$.
  Or la fonction g est nulle en dehors de $[0,1]$. Donc :
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} t\ g_2(t)\ dt = \int_0^1 t\ g_2(t)\ dt$$
  Cette dernière intégrale est bien définie car $t \mapsto t\ g_2(t)$ est continue sur le segment $[0,1]$.
  $$\boxed{U_2 \text{ admet donc bien une espérance.}}$$
- Par définition, on a :
  $$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(U_2) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\ g_2(t)\ dt \ = \ \int_0^1 t\ g_2(t)\ dt & \\ & = & \displaystyle\int_0^1 t\ 2(1-t)\ dt & \textit{(d'après la question 2.)} \\ & = & 2\displaystyle\int_0^1 (t-t^2)\ dt & \\ & = & 2\left[\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^3}{3}\right]_0^1 & \\ & = & 2\left(\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)-0\right) \ = \ 2\,\dfrac{1}{6} \ = \ \dfrac{1}{3} & \end{array}$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(U_2) = \frac{1}{3}.}$$

□

5. Exprimer $U_2 + V_2$ en fonction de X_1 et X_2.
En déduire l'espérance de V_2.

Démonstration.

- On remarque : $X_1 + X_2 = \min(X_1, X_2) + \max(X_1, X_2)$.
  $$\boxed{\text{On en déduit que : } U_2 + V_2 = X_1 + X_2.}$$
- Ainsi : $V_2 = X_1 + X_2 - U_2$.
  La v.a.r. V_2 admet une espérance comme combinaison linéaire des variables aléatoires X_1, X_2 et U_2 qui admettent toutes une espérance.
  On a alors :
  $$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(V_2) & = & \mathbb{E}(X_1 + X_2 - U_2) & \\ & = & \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(U_2) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) - \dfrac{1}{3} & \textit{(d'après la question 4.)} \\ & = & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} \ = \ \dfrac{2}{3} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,1]\!]) \textit{ et } X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0,1]\!])\textit{)} \end{array}$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{E}(V_2) = \frac{2}{3}.}$$

□

VII. Séance 6 : Transformées de variables aléatoires

VII.1. Loi de la partie entière

Exercice 14

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On pose : $T = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). Montrer que la loi de T est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([T = k]) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^k$$

Démonstration.

- Tout d'abord, comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors : $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{On en déduit, par définition de la partie entière : } T(\Omega) \subset \mathbb{N}.}$$

Commentaire

En particulier, la v.a.r. T est une variable aléatoire discrète.

- Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([T = k]) & = & \mathbb{P}([\lfloor X \rfloor = k]) & \\ & = & \mathbb{P}([k \leqslant X < k+1]) & \textit{(par définition de la partie entière)} \\ & = & F_X(k+1) - F_X(k) & \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\ & = & \left(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\lambda(k-1)}\right) - \left(\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\lambda k}\right) & \textit{(car } X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)\textit{)} \\ & = & \mathrm{e}^{-\lambda k} - \mathrm{e}^{-\lambda(k-1)} & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([T = k]) \ = \ \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)\ \mathrm{e}^{-\lambda k} \ = \ \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right)\ \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^k.}$$

Commentaire

- On rappelle qu'on appelle fonction partie entière la fonction suivante.

$$\begin{array}{rcccl} \lfloor\,.\,\rfloor & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ & & x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \quad = \quad \text{le plus grand entier } n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n \leqslant x \end{array}$$

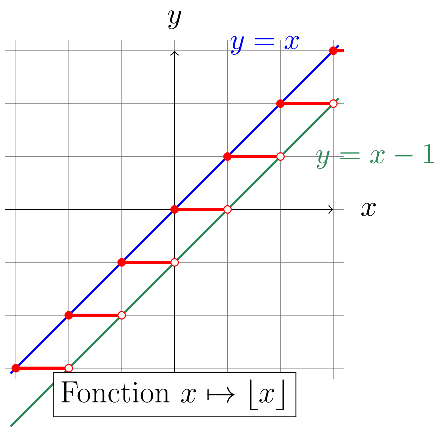
On peut aussi définir $\lfloor x \rfloor$ comme l'unique entier relatif vérifiant la propriété : $n \leqslant x < n+1$.

- Une propriété fondamentale provenant de la définition de cette fonction est donc :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z},\ (\lfloor u \rfloor = n \quad \Leftrightarrow \quad n \ \leqslant \ u \ < \ n+1)}$$

En particulier : $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

- Sa représentation graphique est la suivante :



Fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$

2. Quelle est la loi de $T+1$? En déduire l'espérance et la variance de T.

Démonstration.
On note $Z = T+1$.

- Tout d'abord, comme $T(\Omega) \subset \mathbb{N}$, alors : $(T+1)(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*}$$

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([Z=k]) & = & \mathbb{P}([T+1=k]) & \\ & = & \mathbb{P}([T=k-1]) & \\ & = & \left(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\right)\left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^{k-1} & \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

On reconnaît une expression de la forme : $\mathbb{P}([Z=k]) = p\,(1-p)^{k-1}$, où $p = 1-\mathrm{e}^{-\lambda}$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda}\right).}$$

- La v.a.r. Z admet une variance (donc une espérance).

$\boxed{\text{Ainsi, la v.a.r. } T = Z - 1 \text{ admet une variance (donc une espérance) en tant que transformée affine d'une v.a.r. qui en admet une.}}$

- De plus :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{E}(T) & = & \mathbb{E}(Z-1) & \\ & = & \mathbb{E}(Z) - 1 & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\ & = & \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} & \textit{(car } Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1-e^{-\lambda}\right)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}(T) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}}$$

- Enfin :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{V}(T) & = & \mathbb{V}(Z-1) & \\ & = & \mathbb{V}(Z) & \textit{(par propriété de la variance)} \\ & = & \dfrac{\cancel{1} - (\cancel{1} - \mathrm{e}^{-\lambda})}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}} & \textit{(car } Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(1-e^{-\lambda}\right)\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(T) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{1-\mathrm{e}^{-\lambda}}}$$

□

VII.2. Loi du carré

Exercice 15

On pose f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. a) Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant f pour densité.

Démonstration.

- La fonction f est continue :
  - × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]0, +\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in]-\infty, 0[$, alors : $f(x) = 0$. Ainsi : $f(x) \geqslant 0$.
  - × si $x \in [0, +\infty[$, alors, comme $x \geqslant 0$: $f(x) = x \exp\left(-\dfrac{-x^2}{2}\right) \geqslant 0$.

$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$

- Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et vaut 1.
  × Tout d'abord, comme la fonction f est nulle en dehors de $[0,+\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt$$
  × Soit $A \in [0,+\infty[$.
$$\begin{aligned}\int_0^A f(t)\ dt &= \int_0^A t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\ dt \\ &= \left[-\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right]_0^A \\ &= -\exp\left(-\frac{A^2}{2}\right) + 1\end{aligned}$$
  Or : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \exp\left(-\frac{A^2}{2}\right) = 0$.

  $\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \text{ converge et vaut 1.}}$

$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$

□

b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
× si $x \in]-\infty,0[$, alors, comme f est nulle en dehors de $[0,+\infty[$:
$$F(x) \ = \ \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \ = \ 0$$
× si $x \in [0,+\infty[$, alors :
$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\ &= \int_0^x f(t)\ dt \qquad \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\ &= \int_0^t t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\ dt \\ &= \left[-\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right]_0^x \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \in]-\infty,0[\\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{array} \right.}$$

□

2. On pose : $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y ?

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition : $Y = X^2$. Donc : $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in]-\infty, 0[$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$, car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Donc :
  $$F_Y(x) \; = \; \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \; = \; \mathbb{P}(\varnothing) \; = \; 0$$
  × si $x \in [0, +\infty[$, alors :
  $$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \; = \; \mathbb{P}(\left[X^2 \leqslant x\right]) \\ &= \mathbb{P}([-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]) \\ &= F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) && \textit{(car X est une v.a.r. à densité)} \\ &= \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}}\right) - 0 && \textit{(d'après la question précédente, car $-\sqrt{x} \in]-\infty, 0]$)} \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$
  Finalement : $F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$.
- On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

□

VII.3. Loi de la valeur absolue

Exercice 16

Soit X une v.a. dont une densité f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-|x|} & \text{si } -\ln(2) \leqslant x \leqslant \ln(2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.

Démonstration.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Quatre cas se présentent.

- Si $x \in]-\infty, -\ln(2)[$, alors, comme f est nulle en dehors de $[-\ln(2), \ln(2)]$:
  $$F(x) \; = \; \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt \; = \; 0$$

- Si $x \in [\ln(2), 0]$, alors :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\
&= \int_{-\ln(2)}^{x} f(t)\ dt && \textit{(car f est nulle sur $]-\infty, -\ln(2)[$)} \\
&= \int_{-\ln(2)}^{x} \mathrm{e}^{-|t|}\ dt \ = \ \int_{-\ln(2)}^{x} \mathrm{e}^{t}\ dt \\
&= \Big[\ \mathrm{e}^{t}\ \Big]_{-\ln(2)}^{x} \ = \ \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-\ln(2)} \\
&= \mathrm{e}^{x} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

- Si $x \in\,]0, \ln(2)]$, alors :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{x} f(t)\ dt && \textit{(par relation de Chasles)} \\
&= F(0) + \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-|t|}\ dt \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-t}\ dt && \textit{(d'après le calcul précédent)} \\
&= \frac{1}{2} + \Big[\ -\mathrm{e}^{-t}\ \Big]_{0}^{x} \\
&= \frac{1}{2} - (\mathrm{e}^{-x} - 1) \\
&= \frac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

- Si $x \in\,]\ln(2), +\infty[$, alors, comme f est nulle en dehors de $[-\ln(2), \ln(2)]$:

$$F(x) \ = \ \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \ = \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ 1$$

où la dernière égalité est obtenue car la fonction f est une densité de probabilité.

$$\boxed{\text{Finalement : } F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in\,]-\infty, -\ln(2)[\\ \mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in [-\ln(2), 0] \\ \dfrac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \in\,]0, \ln(2)] \\ 1 & \text{si } x \in]\ln(2, +\infty[\end{cases}.}$$

□

2. On pose $Y = |X|$

a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

Démonstration.

- Par définition : $Y = |X|$. Donc : $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - $\times$ si $x \in \,]-\infty, 0[$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Donc :

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$

  - $\times$ si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) \\ &= F(x) - F(-x) \qquad \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à densité)} \end{aligned}$$

Deux nouveaux cas se présentent :

- si $x \in [0, \ln(2)]$, alors $-x \in [-\ln(2), 0]$. Ainsi, d'après la question précédente :

$$F_Y(x) \;=\; \left(\frac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right) - \left(\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}\right) \;=\; 2 - 2\,\mathrm{e}^{-x}$$

- si $x \in \,]\ln(2), +\infty[$, alors $-x \in \,]-\infty, -\ln(2)[$. Ainsi, d'après la question précédente :

$$F_Y(x) \;=\; 1 - 0$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0[\\ 2(1 - \mathrm{e}^{-x}) & \text{si } x \in [0, \ln(2)] \\ 1 & \text{si } x \in \,]\ln(2), +\infty[\end{cases}.}$$

□

b) Montrer que Y est une v.a. à densité et donner une densité de Y.

Démonstration.

- La fonction F_Y est continue :
  - $\times$ sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  - $\times$ sur $]0, \ln(2)[$ en tant que somme de fonctions continues sur $]0, \ln(2)[$,
  - $\times$ sur $]\ln(2), +\infty[$ en tant que fonction constante,
  - $\times$ en 0. En effet, d'une part : $\lim\limits_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0$.

    D'autre part : $\lim\limits_{x \to 0^+} F_Y(x) = F_Y(0) = 2(1 - \mathrm{e}^0) = 0$. Ainsi :

$$\lim_{x \to 0^+} F_Y(x) \;=\; F_Y(0) \;=\; \lim_{x \to 0^-} F_Y(x)$$

  - $\times$ en $\ln(2)$. En effet, d'une part : $\lim\limits_{x \to \ln(2)^+} F_Y(x) = 1$.

    D'autre part : $\lim\limits_{x \to \ln(2)^-} F_Y(x) = F_Y\big(\ln(2)\big) = 2\left(1 - \mathrm{e}^{-\ln(2)}\right) = 2\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = 1$. Ainsi :

$$\lim_{x \to \ln(2)^-} F_Y(x) \;=\; F_Y\big(\ln(2)\big) \;=\; \lim_{x \to \ln(2)^+} F_Y(x)$$

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

- La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$, $]0, \ln(2)[$ et $]\ln(2), +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0 \text{ et } \ln(2).}$$

$$\boxed{\text{La v.a.r. } Y \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité f_Y, on dérive F_Y sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, \ln(2)[$ et $]\ln(2), +\infty[$ (qui sont bien des intervalles **ouverts**).
Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × Si $x \in]-\infty, 0[$.
  $$f_Y(x) = F_Y'(x) = 0$$
  × Si $x \in]0, \ln(2)[$.
  $$f_Y(x) = F_Y'(x) = 2\,\mathrm{e}^{-x}$$
  × Si $x \in]\ln(2), +\infty[$.
  $$f_Y(x) = F_Y'(x) = 0$$
  × On choisit enfin : $f_Y(0) = 0$ et $f_Y\big(\ln(2)\big) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } f_Y : x \mapsto \begin{cases} 2\,\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \in]0, \ln(2)[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$$

□

Exercice 17
Soit X une v.a. dont une densité f est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \leqslant -1 \end{cases}$$

On note F_X sa fonction de répartition.

1. Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.

- Si $x \in]-\infty, -1]$, alors :

$$F_X(x) = \mathbb{P}([X \leqslant x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$$

Soit $A \in]-\infty, x]$. On a :

$$\int_A^x f(t)\ dt \ = \ \int_A^x -\frac{1}{t^3}\ dt \ = \ -\left[\ \frac{1}{-2}\ \frac{1}{t^2}\ \right]_A^x \ = \ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{A^2}\right) \ = \ \frac{1}{2\,x^2} - \frac{1}{2\,A^2}$$

De plus : $\lim\limits_{A \to -\infty} \dfrac{1}{2\,A^2} = 0$.

On en déduit : $F_X(x) \ = \ \dfrac{1}{2\,x^2}$.

- Si $x \in]-1, 1[$, alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) \ &= \ \int_{-\infty}^x f(t)\ dt \\ &= \ \int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt && \textit{(car f est nulle en dehors de $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$)} \\ &= \ F_X(-1) \ = \ \frac{1}{2} && \textit{(d'après le point précédent)} \end{aligned}$$

- Si $x \in [1, +\infty[$, alors :

$$\begin{aligned} F_X(x) \ &= \ \int_{-\infty}^x f(t)\ dt \\ &= \ \int_{-\infty}^{-1} f(t)\ dt + \int_{-1}^{1} f(t)\ dt + \int_1^x f(t)\ dt \\ &= \ \frac{1}{2} + 0 + \int_1^x \frac{1}{t^3}\ dt && \textit{(car f est nulle en dehors de $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$)} \\ &= \ \frac{1}{2} + \left[\ \frac{1}{-2}\ \frac{1}{t^2}\ \right]_1^x \\ &= \ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \\ &= \ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,x^2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_X : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2\,x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2\,x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}.}$$

□

2. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

a) Donner la fonction de répartition de Y, et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition de Y : $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in]-\infty, 0[$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$, car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Donc :

$$F_Y(x) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$

× si $x \in [0, +\infty[$, alors :

$$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) \;=\; F_X(x) - F_X(-x)$$

où la dernière égalité est obtenue car X est une v.a.r. à densité.
Deux cas se présentent alors :

- si $x \in [0, 1[$, alors $-x \in]-1, 0]$. On obtient alors avec la question ***4.a)*** :

$$F_Y(x) \;=\; F_X(x) - F_x(-x) \;=\; \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} \;=\; 0$$

- si $x \in [1, +\infty[$, alors $-x \in]-\infty, -1]$. On obtient alors avec la question ***4.a)*** :

$$F_Y(x) \;=\; F_X(x) - F_X(-x) \;=\; \left(1 - \frac{1}{2\,x^2}\right) - \frac{1}{2\,(-x)^2} \;=\; 1 - \frac{1}{2\,x^2} - \frac{1}{2\,x^2} \;=\; 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1[\\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.}$$

- Montrons que Y est une v.a.r. à densité.

× La fonction F_Y est continue :

- sur $]-\infty, 1[$, en tant que fonction constante,
- sur $]1, +\infty[$, en tant que somme de fonctions continues sur $]1, +\infty[$,
- en 1. En effet, d'une part : $\lim\limits_{x \to 1^+} F_Y(x) \;=\; F_Y(1) \;=\; 1 - \dfrac{1}{1^2} \;=\; 0.$
  D'autre part : $\lim\limits_{x \to 1^-} F_Y(x) = 0$. Ainsi :

$$\lim_{x \to 1^-} F_Y(x) \;=\; F_Y(1) \;=\; \lim_{x \to 1^+} F_Y(x)$$

$$\boxed{\text{La fonction } F_Y \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

× La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$ avec des arguments similaires à ceux de la continuité sur ces intervalles.

$$\boxed{\text{La fonction } F_Y \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 1.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } Y \text{ est une v.a.r. à densité.}}$$

□

b) Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration.
Pour déterminer une densité f_Y de Y, on dérive la fonction F_Y sur les intervalles **ouverts** $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \in]-\infty, 1[$.

$$f_Y(x) \;=\; F_Y'(x) \;=\; 0$$

- Si $x \in \,]1, +\infty[$.

$$f_Y(x) \; = \; F_Y'(x) \; = \; -(-2)\,\frac{1}{x^3} \; = \; \frac{2}{x^3}$$

- On choisit enfin : $f_Y(1) = \dfrac{2}{1^3} = 2$.

$$\boxed{\text{Ainsi, une densité } f_Y \text{ de } Y \text{ est : } f_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 1[\\ \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.}$$

$\square$