Thème 3 : analyse et intégration

Préliminaires

Exercice 1

- Rappelons tout d'abord qu'on appelle **proposition mathématique** un énoncé auquel on peut attribuer une valeur de vérité (vrai ou faux).
  Les énoncés suivants sont des propositions mathématiques.

  a) $1+1=2$
  Cette proposition est vraie.

  b) $1+1=3$
  Cette proposition est fausse.

  c) $\ln(1)=1$
  Cette proposition est fausse.

  Par contre, $1+1-2$ et $(\sqrt{18})^3$ ne sont pas des propositions puisqu'on ne peut leur attribuer de valeur de vérité. Ce sont des expressions arithmétiques dont le résultat est un réel.
- Il est à noter qu'une proposition mathématique peut comporter des variables. En conséquence, il est possible que la valeur de vérité d'une proposition dépende du choix de ces variables.

  a) $x+2 \geqslant 4$
  × cette proposition est vraie pour tout x plus grand que 2,
  × cette proposition est fausse sinon *i.e.* pour tout x strictement inférieur à 2.

  b) $\sqrt{x^2}=x$
  × cette proposition est vraie pour tout x plus grand que 0,
  × cette proposition est fausse sinon *i.e.* pour tout x strictement inférieur à 0.

  c) Par contre, $10^x - (\sqrt{y})$ n'est pas une proposition. C'est une expression arithmétique dont le résultat est un réel.
- La valeur de vérité d'une proposition ne dépend pas toujours des variables qu'elle contient. Dans une proposition mathématique, on dit qu'une variable est **muette** (on parle aussi de variable **liée**) si elle est portée par un quantificateur. Ainsi, dans les propositions :

  $$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \qquad\qquad \exists n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$$

  la variable n est muette. Cela signifie qu'on peut renommer la variable n sans que cela ne change le sens de la proposition mathématique. Ainsi, les propositions :

  $$\forall m \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(m) \qquad\qquad \exists k \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(k)$$

  ont même sens que les propositions précédentes.

  Par contre, si on considère seulement la proposition $\mathcal{P}(n)$ (sans faire apparaître de quantificateur devant), on obtient un objet mathématique qui dépend de ce n particulier.
- Il existe d'autres constructions mathématiques pour lesquelles les variables sont muettes.
  Par exemple, dans les écritures :

  $$\int_0^1 \ln(x+1)\ dx \qquad\qquad \sum_{i=0}^{5} 2^i$$

  on peut renommer la variable x et la variable i en écrivant :

  $$\int_0^1 \ln(t+1)\ dt \qquad\qquad \sum_{j=0}^{5} 2^j$$

  sans que cela ne change les valeurs calculées. Les deux variables sont ici liées par un symbole mathématique qui n'est pas un quantificateur mais qui permet quand même d'introduire la variable et son ensemble d'appartenance (x parcourt $[0,1]$ et i parcourt $[\![0,5]\!]$).

Commentaire

- Profitons des définitions précédentes pour rappeler qu'un quantificateur permet notamment d'introduire une variable et son ensemble d'appartenance. Une variable n'a pas d'existence propre tant qu'elle n'a pas été introduite. Ainsi, une écriture de la forme : « $\ln(x) \leqslant x-1, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$ », n'a `AUCUN` sens mathématique. En effet, la première partie de la proposition se réfère à une variable x qui n'est introduite qu'après coup. La bonne écriture est évidemment :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln(x) \leqslant x-1$$

- On rappelle aussi que lorsqu'on est en présence de quantificateurs de natures différentes, l'ordre est important. Par exemple, si on dispose d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les propositions :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M \qquad \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leqslant M$$

  n'ont pas du tout le même sens. La seconde signifie que la fonction f est bornée (on est capable de trouver un réel M qui majore `TOUTES` les valeurs de $f(x)$ *i.e.* un majorant de $f(x)$ avec x qui parcourt $\mathbb{R}$ en entier). La première proposition signifie que pour chaque valeur particulière de x, on est capable de trouver un réel M (qui peut dépendre de x !) tel que, pour cette valeur particulière de x on ait : $f(x) \leqslant M$. Toute fonction satisfait cette proposition car, on peut poser, pour chaque choix de x : $M = f(x)$. On obtient bien alors : $f(x) \leqslant M$.

a) Pour chacune des expressions suivantes :

(i) déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

(ii) indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

1. $\displaystyle\int_0^1 (x+y)\,dx$,

2. $\displaystyle x \int_0^x 2\,dy$,

3. $\displaystyle\int_0^t x^2\,dx + \int_t^2 y^2\,dy$,

4. $\displaystyle t \int_0^t y\,dt$,

5. $\{y \in \mathbb{R} \mid y^2 - x^2 > 0\}$,

6. $\displaystyle\{x \in \mathbb{R} \mid \int_0^x a\,t\,dx \geqslant a\,x\}$,

7. $x \mapsto \ln(x) + \sqrt{x}$,

8. $(x,y) \mapsto (2x+3y, x-y)$,

9. $f : t \mapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}$,

10. $f(x)$,

11. $\displaystyle\int_{-x}^y f(t)\,dt$,

12. $\displaystyle\int_0^x f(x)\,dt$,

13. $\displaystyle\sum_{i=0}^n i^3$,

14. $\displaystyle\sum_{i=j}^n i^3$,

15. $\displaystyle\sum_{i=j}^n (i+j)^3$,

16. $\displaystyle\sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n (i+j)^3$,

17. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$,

18. $\forall y \in \,]0,+\infty[,\ \exists x \in \mathbb{R},\ y = \mathrm{e}^x$

19. $\exists k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant \pi < k+1$,

20. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists k \in \mathbb{Z},\ k \leqslant x < k+1$,

21. u_n,

22. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

23. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} u_n$,

24. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} u_n$,

25. $u_n \geqslant \ln(2)$,

26. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geqslant \ln(2)$

27. $\mathcal{P}(n)$,

28. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$.

b) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{i} \sum_{j=0}^{k} 2^i\,3^j$.

De quelles variables dépend l'expression obtenue ? Était-ce prévisible ?

I. Séance 1 : déterminer la régularité d'une fonction

Exercice 2

1. Étudier la continuité des fonctions suivantes sur l'ensemble E.
Ces fonctions sont-elles prolongeables par continuité au bord de l'ensemble E ?

a) $f : x \mapsto x\ln(x) - x$ et $E =]0, +\infty[$

b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^3}$ et $E =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[$

c) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)+1}$ et $E =]0, \mathrm{e}^{-1}[\cup]\mathrm{e}^{-1}, +\infty[$

d) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 2}{3x + 5}$ et $E =]-\infty, -\frac{5}{3}[\cup]-\frac{5}{3}, +\infty[$

e) $f : x \mapsto \ln(3x^2 + 2x)$ et $E =]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]0, +\infty[$

f) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^3 - x}$ et $E =]-\infty, +\infty[$

g) $f : x \mapsto \ln(1 + |x|)$ et $E =]-\infty, +\infty[$

2. Les fonctions précédentes sont-elles dérivables sur E ?
Sont-elles dérivables au bord de E ?

3. Les fonctions précédentes sont-elles $\mathcal{C}^1$ sur E ? Sont-elles $\mathcal{C}^2$ sur E ?
Sont-elles $\mathcal{C}^\infty$ sur E ?

Exercice 3

On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \dfrac{\ln(x)}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f est continue par morceaux sur $[-4, 4]$.

2. Justifier l'existence et calculer la valeur de l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_{-4}^{4} f(u)\, du$.

Séance 2 : méthodes de calcul d'intégrales

I.1. Intégrales à vue

Exercice 4
Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{1+4x}}\,dx$ *c)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+x}\,dx$ *e)* $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\big(\ln(x)\big)^2}{x}\,dx$ *g)* $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^2 \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^{1/\ln 2} 2^x\,dx$ *d)* $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1}\,dx$ *f)* $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{1}{x\big(\ln(x)\big)^2}\,dx$

I.2. Décomposition en éléments simples

Exercice 5
Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{t+1}\,dt$ *b)* $\displaystyle\int_3^4 \frac{4}{t(t^2-4)}\,dt$ *c)* $\displaystyle\int_3^5 \frac{dt}{(t+1)(t-2)}$

I.3. Intégration par parties

Exercice 6
Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle I = \int_0^1 x^3\mathrm{e}^{x^2}\,dx$ *b)* $\displaystyle I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx$ *c)* $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^2}\,dx$

I.4. Changements de variable

Exercice 7
On note $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,dx$.

1. a) À l'aide du changement de variable $u = \mathrm{e}^x$ démontrer que : $\displaystyle I = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{u+1}\frac{1}{u}\,du$.

b) Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{u\ (u+1)} = \frac{a}{u} + \frac{b}{u+1}$$

pour tout $u \notin \{-1, 0\}$.

c) En déduire la valeur de I.

2. Procéder de même pour calculer $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}}$.
On pourra poser le changement de variable $u = \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$.

Séance 3 : calcul d'intégrales définies par une relation de récurrence

Exercice 8
On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = (1-x)^n \, \mathrm{e}^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\ dx$$

1. Calculer I_0, I_1.

2. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n.

3. ***a)*** Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire $I_{n+1} - I_n$ sous forme d'une intégrale.

b) En déduire la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) En déduire enfin que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 2I_{n+1} = 1 - (n+1)\, I_n$$

5. En déduire la valeur de ℓ.

Exercice 9
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit pour tout entier naturel n, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \, \mathrm{e}^{-ax}\ dx$.

1. Démontrer que I_0 est une intégrale convergente et déterminer sa valeur.

2. Démontrer que I_1 est une intégrale convergente et déterminer sa valeur.
On pourra penser à une intégration par parties.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de l'intégrale I_n.
Question a priori réservée aux cubes.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ aI_n = nI_{n-1}$.

5. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \dfrac{n!}{a^{n+1}}$.

Séance 4 : intégrale fonction de ses bornes

Exercice 10

On considère la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\ dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de G.

2. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$: $t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$.

3. En déduire un encadrement de $G(x)$, pour $x \in [0, +\infty[$.

4. Montrer alors : $G(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{7}{3}x^3$.

5. Démontrer que G réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle à préciser.

Exercice 11

On considère la fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \exp(-t^2)\ dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de H.

2. Démontrer que la fonction H est impaire.

3. Démontrer que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
En déduire les variations de H.

4. ***a)*** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $t \in [x, 2x]$: $\exp(-4x^2) \leqslant \exp(-t^2) \leqslant \exp(-x^2)$.

b) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x\exp(-4x^2) \leqslant H(x) \leqslant x\exp(-x^2)$.

c) Déterminer alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} H(x)$.

Exercice 12

On considère la fonction : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\ dt$.

1. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.

2. Monter que F est impaire.

3. Déterminer la monotonie de F.

4. Montrer : $\forall x \geqslant 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\ dt \leqslant 1$.

5. En déduire que la fonction F admet une limite en $+\infty$.
Dans la suite, on note $L = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

6. On pose $G(x) = F(x) + F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a) Justifier que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer G'. Que dire de G ?

b) En faisant tendre x vers $+\infty$, montrer que $L = 2F(1)$.

Séance 5 : sommes de Riemann

Exercice 13

1. Pour tout entier n non nul, on pose : $S_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n+k}$.
Transformer S_n pour l'exprimer comme une somme de Riemann puis conclure sur la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. En procédant de même, étudier le comportement en $+\infty$ de la suite de terme général :

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+n) - \ln(n))$$

Exercice 14

On considère de nouveau : $S_n = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n+k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
On admet que (*cf* TP sur les sommes de Riemann) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \left| \int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx - S_n \right| \ \leqslant \ \frac{1}{2n}$$

1. Déterminer un entier n_0 tel que : $\left| \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx - S_{n_0} \right| \ \leqslant \ 10^{-4}$.

2. Déduire de cette inégalité un programme **Scilab** permettant de déterminer une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x} \, dx$ à 10^{-4} près.

3. Exécuter votre programme sur votre ordinateur. Quelle valeur obtient-on ? Commenter.

Exercice 15

On considère la suite (T_n) de terme général :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n\sqrt{n^2+k^2}}$$

1. Démontrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer la valeur de sa limite.

2. Écrire en **Scilab** une fonction `sommeR` qui :
- × prend en paramètre une variable `n`,
- × stocke dans une variable de sortie `T` la valeur du terme de rang `n` de la suite (T_n).

Séance 6 : comparaison séries / intégrales

Exercice 16

1. On considère dans la suite une fonction f continue et décroissante sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que : $\forall k \geqslant 1, \;\; f(k+1) \;\leqslant\; \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\ dt \;\leqslant\; f(k)$.

Faire apparaître sur une même représentation graphique ces trois quantités sous forme d'aires. *(cela ne constitue pas une démonstration)*

b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \;\leqslant\; \int_1^{n+1} f(t)\ dt \;\leqslant\; \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Faire apparaître sur une nouvelle représentation graphique ces trois quantités sous forme d'aires. *(cela ne constitue pas une démonstration)*

c) Démontrer enfin que, pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$\int_2^{n+1} f(t)\ dt \;\leqslant\; \sum_{k=2}^{n} f(k) \;\leqslant\; \int_1^{n} f(t)\ dt$$

2. On considère maintenant la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$.

a) Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \;\leqslant\; \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \;\leqslant\; \ln(n)$$

b) En déduire un encadrement de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

c) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

d) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$?

3. On considère maintenant la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{t\ln(t)}$ sur $[2, +\infty[$.

a) Soit $n \geqslant 1$. Calculer $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ \ln(x)}\ dx$.

b) À l'aide de ce qui précède, comparer $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{1}{x\ \ln(x)}\ dx$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$.

c) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$.

d) Écrire en **Scilab** une fonction `sommeSI` qui :

× prend en paramètre une variable `n`,

× stocke dans une variable de sortie `S` la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{\mathtt{n}} \frac{1}{k\ln(k)}$.