Thème 1 : algèbre linéaire (matrices et endomorphismes)

I. Séance 1 : produit matriciel

Exercice 1

1. Pour les exemples suivants, dire si les produits matriciels AB et BA sont bien définis ou non. S'ils sont définis, les calculer ; s'ils ne sont pas définis, expliquer pourquoi.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 5 \\ 8 & -4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. On considère un vecteur $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels non tous nuls.

Dans la suite, on note $M = X\,{}^tX$ et $m = {}^tX\,X$.

a) Calculer m.

b) (i) Calculer M et en déduire qu'elle est symétrique.
Question réservée aux cubes : que peut-on en déduire ?

(ii) Calculer $M\,X$.
Question réservée aux cubes : que peut-on en déduire ?

3. On considère maintenant un entier n non nul et un vecteur $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. On note :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad M \ = \ X\,{}^tX \quad \text{et} \quad m = {}^tX\,X$$

a) Calculer m.

b) (i) Démontrer que M est symétrique.
Question réservée aux cubes : que peut-on en déduire ?

(ii) Calculer $M\,X$.
Question réservée aux cubes : que peut-on en déduire ?

Exercice 2

Pour toute matrice $A = \big(a_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A et on note $\mathrm{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux de A, c'est-à-dire $\mathrm{tr}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. Montrer que l'application $\mathrm{tr} : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \mathrm{tr}(A) \end{array}$, est linéaire.

2. Montrer : $\forall (A,B) \in \big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

3. Vérifier, pour tout $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathrm{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{j,i}^2$.

II. Séance 2 : calcul d'inverse

II.1. Définition de l'inverse et utilisation d'une relation matricielle

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Quelle propriété démontre que $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est l'inverse de A ?

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Démontrez que P est inversible, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Trouver une relation entre J^2, J et I.

b) Montrer que J est inversible et donner son inverse en fonction de J et I.

4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^2 - 4A$.

b) En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et I.

5. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.

b) En déduire que A est inversible et donner son inverse en fonction de A et I.

II.2. Reconnaître les matrices non inversibles

Exercice 4
Sans faire de calcul, expliquez pourquoi les matrices suivantes sont non inversibles.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & -2 & -6 \\ 1 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

II.3. Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Exercice 5
Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, donnez (sans faire de calcul) leur inverse.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

II.4. Inverse par algorithme du pivot de Gaus

Exercice 6

À l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss, montrer que chacune des matrices suivantes est inversible et déterminer son inverse. On optera pour la présentation matricielle.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

III. Séance 3 : résolution de systèmes

Exercice 7

Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note : $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.

1. a) Montrer que $E_3(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
(par la même démonstration, on démontre que $E_\lambda(A)$ est un sev de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$)

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer $E_\lambda(A)$ si la matrice $A - \lambda I$ est inversible.
Que peut-on dire sur $E_\lambda(A)$ si la matrice $A - \lambda I$ est non inversible ?

2. Dans la suite de l'exercice, on note $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que la matrice $A - I$ est non inversible.
En déduire : $E_1(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$.

b) Déterminer $E_1(A)$.

c) Démontrer que la matrice $A + 2I$ est non inversible. Déterminer $E_{-2}(A)$.

d) Démontrer que la matrice $A - 3I$ est non inversible. Déterminer $E_3(A)$.

3. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b) Démontrer que la matrice définie par $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
Déduire de cette écriture une écriture de la matrice A en fonction des matrices P et D.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. La formule de la question ***3.c)*** est-elle vérifiée pour $n = -1$?

Exercice 8

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.

1. a) Démontrer que la matrice $A - I$ est non inversible. Déterminer $E_1(A)$.

b) Démontrer que la matrice $A - 2I$ est non inversible. Déterminer $E_2(A)$.

c) Démontrer que la matrice $A - 3I$ est non inversible. Déterminer $E_3(A)$.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Démontrer que la matrice définie par $D = P^{-1}AP$ est diagonale.
Déduire de cette écriture une écriture de la matrice A en fonction des matrices P et D.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

IV. Séance 4 : puissances d'une matrice via le binôme de Newton

Exercice 9

On note I la matrice carrée d'ordre 3 et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer qu'il existe une unique matrice $H \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = I + 2H$.

2. Calculer H^2, puis H^k pour tout $k \geqslant 2$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer A^n en fonction de I et de H.

Exercice 10

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.

1. Démontrer que la matrice $A - 2I$ est non inversible. Déterminer $E_2(A)$.

2. Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

3. Démontrer que la matrice $\Delta = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure et trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\Delta = \alpha I + J$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

  a) Calculer J^2, puis J^k pour tout entier $k \geqslant 2$.

  b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer Δ^n en fonction de I et J.

  c) En déduire l'expression matricielle de A^n.

5. On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies par $x_0 = 1$, $y_0 = -2$, $z_0 = -3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_{n+1} & = & 2\,x_n & & & & \\ y_{n+1} & = & x_n & + & 3\,y_n & - & z_n \\ z_{n+1} & = & x_n & + & y_n & + & z_n \end{array} \right.$$

  On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

  a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = AX_n$.

  b) Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

  c) En déduire les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de n.

Exercice 11

1. On considère les matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer A^2. Démontrer alors : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = 3^{k-1}A$.

b) Déterminer B^2 et B^3. En déduire B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Déterminer C^2. Conjecturer une formule pour C^k et la démontrer.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Écrire la matrice M en fonction des matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, déterminer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

V. Séance 5 : algèbre théorique

Exercice 12
On considère un espace vectoriel E et une application linéaire $u : E \to E$.
On rappelle que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$: $u^m = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{u \text{ apparaît } m \text{ fois}}$ et $u^0 = \mathrm{id}_E$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit l'ensemble $E_k = \{x \in E \mid u^k(x) = 0_E\}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans cette question seulement, on considère que $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On définit alors l'application u par :

$$\forall M \in E,\ u(M) = AM$$

a) Soit $M \in E$. Que vaut $u \circ u(M)$?

b) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, expliciter u^m.

c) On considère maintenant que $m = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, E_k.

d) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E_k \subset E_{k+1}$.

2. Dans le cas général, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $E_k \subset E_{k+1}$.

Exercice 13
Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E ($f \in \mathscr{L}(E)$).

1) Démontrer : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \ \Rightarrow\ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2) Démontrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Rightarrow\ \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

3) Conclure.