Thème 4 : probabilités

I. Mise en jambe : lois discrètes usuelles

Exercice 1
On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{4})$.

1. Déterminer la valeur, si elles existent, des quantités suivantes.
   - *a)* $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
   - *b)* $\mathbb{E}(X-3)$ et $\mathbb{V}(X-3)$.
   - *c)* $\mathbb{E}(2X)$ et $\mathbb{V}(2X)$.
   - *d)* $\mathbb{E}(X^2)$.

2. Reprendre la question précédente dans le cas où X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

II. Séance 1 : formule des probabilités composées

Exercice 2
Une puce se déplace sur les trois sommets d'un triangle ABC du plan.
À l'instant 0, elle est en A. À chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$ suivant, elle saute du sommet où elle se trouve de la manière suivante :

× si elle est en A, elle va en B ;

× si elle est en B, elle a autant de chance d'aller en A qu'en C ;

× si elle est en C, elle y reste (saute sur place).

On introduit les événements A_n, B_n et C_n suivants.

- A_n : « la puce est en A à l'instant n ».
- B_n : « la puce est en B à l'instant n ».
- C_n : « la puce est en C à l'instant n ».

On admet que la puce ne peut arriver au point C qu'à des instants pairs.

1. Énoncer la formule des probabilités composées.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   - *a)* Exprimer, à l'aide des événements fournis, l'événement :
     F : « la puce arrive en C la première fois à l'instant 4 ».
   - *b)* Exprimer, à l'aide des événements fournis, l'événement :
     G_n : « la puce arrive en C la première fois à l'instant $2n$ ».
   - *c)* Calculer la probabilité que la puce arrive en C, pour la première fois, à l'instant $2n$.

Exercice 3
Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats. Un rat est mis devant trois couloirs. Au bout de l'un d'eux se trouve un morceau de fromage. Au bout des deux autres, il reçoit une décharge électrique.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement A_k : « lors de la $k^{\text{ème}}$ tentative, le rat choisit le bon couloir le menant au fromage ». De plus, on note T la v.a.r. qui donne le numéro de la première tentative réussie par le rat. On considère enfin un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Exprimer $[T = n]$ en fonction des événements A_k.
Exprimer $\mathbb{P}\big([T = n] \big)$ à l'aide de la formule des probabilités composées.

2. On considère dans cette question que le rat n'a aucun souvenir des expériences antérieures. Autrement dit, à chaque tentative, le rat choisit un couloir indépendamment de ses précédents choix.

a) À l'aide de la question ***1.***, déterminer la probabilité que la première tentative réussie soit la $n^{\text{ème}}$.

b) Reconnaître la loi de la v.a.r. T. Commenter.

3. On considère dans cette question que le rat se souvient de l'expérience précédente et évite donc, lors de la tentative suivante, un couloir dans lequel il vient de recevoir une décharge.
Déterminer la probabilité que la première tentative réussie soit la $n^{\text{ème}}$.

Exercice 4
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $[\![1, n-1]\!]$, on note B_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$, et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

2. ***a)*** Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que $\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $\mathbb{P}\big([X = k] \big)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente et qui vaut 0 sinon.

a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$\mathbb{P}\big([X = k] \cap [Y = 0] \big) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

b) En déduire $\mathbb{P}\big([Y = 0] \big)$.

c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

III. Séance 2 : formule des probabilités totales

Exercice 5

1. Énoncer la formule des probabilités totales.

2. Une boîte A contient deux jetons portant le numéro 0 et une boîte B contient deux jetons portant le numéro 1.

On tire au hasard un jeton dans chaque boîte et on échange ces jetons.
On recommence cette opération n fois, $n \in \mathbb{N}^*$.
On s'intéresse à la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant n.
Pour cela, on introduit les événements suivants.

- P_n : « la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant n vaut 0 ».
- Q_n : « la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant n vaut 1 ».
- R_n : « la somme des jetons contenus dans l'urne A à l'instant n vaut 2 ».

On pose également $p_n = \mathbb{P}(P_n)$; $q_n = \mathbb{P}(Q_n)$ et $r_n = \mathbb{P}(R_n)$.

a) Calculer p_0, q_0, r_0, p_1, q_1, r_1.

b) Trouver une relation entre r_n, p_n et q_n.

c) Exprimer p_{n+1} (resp. q_{n+1}, resp. r_{n+1}) en fonction de p_n, q_n, r_n.

Exercice 6

Une entreprise de construction produit des objets sur deux chaînes de montage A et B qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.
Pour une chaîne donnée, les fabrications des pièces sont indépendantes.
On suppose que A produit 60% des objets et B produit 40% des objets. De plus :

× la probabilité qu'un objet construit par la chaine A soit défectueux est $0,1$.

× la probabilité pour qu'un objet construit par la chaine B soit défectueux est $0,2$.

On considère l'événement E : « l'objet provient de la chaîne A ».

1. On choisit au hasard un objet à la sortie de l'entreprise. On constate que cet objet est défectueux. Quelle est la probabilité que cet objet provienne de la chaîne A ?

2. On suppose maintenant que le nombre d'objets produits en une heure par A est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 20$.
On considère alors la variable aléatoire X représentant le nombre d'objets défectueux produits par la chaîne A en une heure.

a) Rappeler la loi de Y ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

b) Soient k et n deux entiers naturels, déterminer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Y=n]}([X=k])$. *(on distinguera les cas $k \leqslant n$ et $k > n$)*

c) En déduire, en utilisant le système complet d'événements $([Y=i])_{i\in\mathbb{N}}$, que X suit une loi de Poisson de paramètre 2 .

IV. Séance 3 : variables discrètes

Exercice 7

1. Une puce se déplace en faisant des sauts aléatoires sur un axe gradué. Initialement à l'origine, la puce se déplace à chacun de ses sauts d'une unité vers la droite avec probabilité $p \in]0,1[$, ou d'une unité vers la gauche avec probabilité $1-p$. On note Y_n le nombre de fois où elle s'est déplacée vers la droite entre le premier et le $n^{\text{ème}}$ saut (compris).
Quelle est la loi de Y_n ?

2. Une urne contient des boules blanches en proportion b et vertes en proportion v. Donc $0 < b < 1$, $0 < v < 1$ et $b + v = 1$. On effectue des tirages successifs avec remise dans cette urne. On note X le numéro du tirage où la première boule verte apparaît.
Quelle est la loi de X ?

3. Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. On suppose que les conducteurs arrivant au péage choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. On note Z le numéro du guichet choisi par le 1^{er} conducteur arrivant au péage.
Quelle est la loi de Z ?

Exercice 8

Soit $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. ***a)*** Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

b) On suppose maintenant : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

(i) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([X = k]) \;=\; \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

(ii) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

c) Conclure.

2. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- On dit que deux v.a.r. X et Y sont indépendantes si, pour tout couple d'intervalles réels (I, J) :

$$\mathbb{P}([X \in I] \cap [Y \in J]) \;=\; \mathbb{P}([X \in I]) \times \mathbb{P}([Y \in J])$$

- Par exemple, si $t \in \mathbb{R}$ et que X et Y sont indépendantes, on a :

$$\mathbb{P}([X > t] \cap [Y > t]) \;=\; \mathbb{P}([X > t]) \times \mathbb{P}([Y > t])$$

Ce résultat est obtenu en appliquant la définition à $I =]t, +\infty[= J$

On considère deux v.a.r. X_1 et X_2 indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$.
Déterminer la loi de la v.a.r. $M = \min(X_1, X_2)$.

3. Déterminer la loi de la v.a.r. $Z = X_1 + X_2$.

4. ***a)*** Démontrer à l'aide de ***1.b)(i)*** : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X > k])$.

b) Retrouver la valeur de $\mathbb{E}(X)$ avec cette formule.

5. Une urne contient 3 boules rouges et 7 boules vertes. On effectue dans cette urne des tirages successifs avec remise, et on note X la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage pour lequel on obtient pour la première fois une boule rouge. On note de plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, V_k l'événement « obtenir une boule verte au $k^{\text{ème}}$ tirage ».

a) Quelle est la loi de X ? Justifier.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $[X > k]$ en fonction des événements V_i.
Retrouver la valeur de $\mathbb{P}([X > k])$.

V. Séance 4 : variables à densité

V.1. Fonction de répartitition et lois usuelles

Exercice 9
Soit $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. On considère une v.a.r. X définie sur cet espace probabilisé.

a) Rappeler la définition de variable aléatoire.

b) La v.a.r. X admet-elle une fonction de répartition F_X ? Comment est définie cette fonction ?

c) Lister les propriétés vérifiées par F_X.

d) Quelle propriété F_X doit-elle vérifier pour que X soit une v.a.r. à densité ?

2. On considère maintenant une v.a.r. X telle que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda > 0$.
On considère la v.a.r. $Y = \sqrt{X}$?

a) La v.a.r. Y est-elle bien définie ?

b) Déterminer sa fonction de répartition F_Y.

c) La v.a.r. Y admet-elle une densité ? Si oui, la déterminer.

Exercice 10
Donner la fonction de répartition et l'espérance des variables aléatoires réelles suivantes.

1. X suit la loi exponentielle de paramètre 1.

2. T suit la loi normale centrée réduite.

Exercice 11
On note U une variable suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

1. Déterminer la loi de la variable $Z = -\ln(1 - U)$.
Pour cela, on déterminera la fonction de répartition de Z.

2. Quelle loi classique reconnaît-on ?

3. On rappelle que la fonction `rand` permet de simuler une v.a.r. suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
Compléter le programme suivant afin qu'il simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

```
u = rand()
z = ...
```

V.2. Densité de probabilité

Exercice 12
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|)$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f.

a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Montrer que X admet une espérance puis la calculer.

VI. Séance 5 : Loi du minimum, loi du maximum

Exercice 13
On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.

- On dit que les v.a.r. X_1, …, X_n sont (mutuellement) indépendantes si, pour tous intervalles réels I_1, …, I_n :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \in I_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \in I_i])$$
- Par exemple, si $t \in \mathbb{R}$ et que X_1, …, X_n sont indépendantes, on a :
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant t]\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_i \leqslant t])$$
Ce résultat est obtenu en appliquant la définition à $I_1 = \ \ldots \ = I_n = \,]-\infty, t]$

Soient X_1, …, X_n n variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.
On définit les variable aléatoires $U_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $V_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$[U_n > t] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i > t] \qquad \text{et} \qquad [V_n \leqslant t] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant t]$$

2. Déterminer la fonction de répartition G_n, puis une densité g_n de la v.a.r. U_n.

3. Déterminer la fonction de répartition H_n, puis une densité h_n de le v.a.r. V_n.

4. Calculer l'espérance de U_2.

5. Exprimer $U_2 + V_2$ en fonction de X_1 et de X_2.
En déduire l'espérance de V_2.

VII. Séance 6 : Transformées de variables aléatoires

VII.1. Loi de la partie entière

Exercice 14
Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans l'exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Dans tout l'exercice, X désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On pose : $T = \lfloor X \rfloor$ (partie entière de X). Montrer que la loi de T est donnée par :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([T = k]) = \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda}\right) \left(\mathrm{e}^{-\lambda}\right)^k$$

2. Quelle est la loi de $T + 1$? En déduire l'espérance et la variance de T.

VII.2. Loi du carré

Exercice 15
On pose f la fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. *a)* Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant f pour densité.

b) Déterminer la fonction de répartition F de X.=

2. On pose : $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y ?

VII.3. Loi de la valeur absolue

Exercice 16
Soit X une v.a. dont une densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leqslant x \leqslant \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition F de X.

2. On pose $Y = |X|$

a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.

b) Montrer que Y est une v.a. à densité et donner une densité de Y.

Exercice 17
Soit X une v.a. dont une densité f est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -\dfrac{1}{t^3} & \text{si } t \leqslant -1 \end{cases}$$

On note F_X sa fonction de répartition.

1. Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$F_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \leqslant -1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

2. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = |X|$.

a) Donner la fonction de répartition de Y, et montrer que Y est une variable aléatoire à densité.

b) Montrer que Y admet pour densité la fonction f_Y définie par :

$$f_Y : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$