

---

## Thème 2 : suites réelles

---

### I. Séance 1 : définitions

#### Exercice 1

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels et soit  $\ell \in \mathbb{R}$ .

1. Qu'est-ce qu'une suite monotone ?
2. Traduire en mathématiques (avec les quantificateurs) les propositions mathématiques suivantes.
  - a) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
  - b) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.
  - c) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ .
  - d) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .
3. Reprendre les questions 2.a) et 2.b) dans le cas où les propriétés précédentes sont vérifiées seulement à partir d'un certain rang.
4. Écrire la négation des propositions de la question 2.

#### Exercice 2 *Vrai ou Faux ?*

1. Si la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ , alors elle n'est pas majorée.
2. Une suite  $(u_n)$  croissante à partir d'un certain rang est minorée.
3. Si  $(|u_n|)$  converge alors  $(u_n)$  converge.
4. Si  $(|u_n|)$  tend vers 0 alors  $(u_n)$  tend vers 0.
5. Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.
6. Une suite convergente et majorée est croissante.
7. Une suite divergeant vers  $+\infty$  est croissante à partir d'un certain rang.
8. Une suite strictement croissante diverge vers  $+\infty$ .
9. Une suite strictement décroissante diverge vers  $-\infty$ .
10. Si  $(u_n)$  est croissante et pour tout  $n \in \mathbb{N} : u_n \leq v_n$  alors  $(v_n)$  est croissante.
11. Si  $(u_n)$  tend vers 0 et  $(v_n)$  tend vers  $+\infty$ , alors on ne peut conclure sur la limite du quotient  $\frac{u_n}{v_n}$ .
12. Si  $(u_n)$  est divergente, alors la suite définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1} - u_n$  est divergente.
13. Si  $(u_n)$  tend vers  $\ell \neq 0$  alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ .

## Séance 2 : manipulations de base (et Scilab)

### Exercice 3

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2} \end{cases}$$

1. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ .
2. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone.
3. Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
4. *a)* Écrire en **Scilab** la fonction `calculSuite` qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie le `n`<sup>ème</sup> terme de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  
*b)* Quel appel permet de calculer  $u_8$  ?
5. *a)* Écrire en **Scilab** la fonction `calculPremiersTermes` qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie le tableau `tab` contenant les `n` premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  
*b)* On considère alors le programme **Scilab** suivant :

```
1  n = 100
2  absc = 0:n-1
3  t = calculPremiersTermes(n)
4  plot(absc, t, 'ro')
```

Que réalise ce programme ?

6. *a)* Justifier qu'il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq 10^{-4}$ .  
*b)* Écrire en **Scilab** un programme qui permet de déterminer le premier entier  $n$  tel que  $|u_n| \leq 10^{-4}$ .

### Séance 3 : suites récurrentes linéaires usuelles

#### Exercice 4

On considère une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $u_0 > 0$ ,  $u_1 > 0$ , et vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_n^3 \times u_{n+1}^2$$

1. Montrer par une récurrence double que  $u_n > 0$  pour tout entier naturel  $n$ .
2. On note  $t_n = \ln(u_n)$ .
  - a) Montrer que la suite  $(t_n)$  vérifie  $\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+2} = 3t_n + 2t_{n+1}$ .
  - b) De quel type de suite s'agit-il ?
3. Déterminer, en fonction de  $u_0$  et  $u_1$ , le terme général de la suite  $(t_n)$ .
4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \exp\left(\frac{3^n}{4} \ln(u_0 u_1) + \frac{(-1)^n}{4} \ln\left(\frac{u_0^3}{u_1}\right)\right)$$

#### Exercice 5

On considère la suite  $(u_n)$  définie dans l'Exercice 4.

1. Écrire en **Scilab** la fonction `calculPremiersTermes` qui prend en paramètre un entier  $n$ , des valeurs `u0`, `u1` et renvoie le tableau `tab` contenant les  $n$  premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. Écrire un programme permettant de tracer les 100 premiers termes de la suite  $(u_n)$ .

#### Exercice 6

On appelle  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2} u_n + 1 \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$ .
2. En déduire la limite de  $(u_n)$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
3. Déterminer la formule explicite de  $u_n$ .

## Séance 4 : suites récurrentes et inégalités des accroissements finis

### Exercice 7

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$ .

1. *a)* Démontrer que  $f$  est paire sur  $\mathbb{R}$ .
  - b)* Justifier que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et étudier ses variations.
  - c)* Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\ell \in \mathbb{R}^+$ .
  - d)* Justifier que :  $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$ .  
**Données numériques** :  $e^{1/2} \simeq 1,65$  et  $e \simeq 2,72$  au centième près.
  - e)* Montrer que :  $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq f(x)$ .  
 En déduire que :  $\forall x \geq 0, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ .
  - f)* Vérifier que  $f([0, \frac{1}{2}]) \subset [0, \frac{1}{2}]$ .

2. On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

- a)* Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0, \frac{1}{2}]$ .
- b)* Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell| \quad \text{puis que} \quad |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

- c)* En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ .

### 3. Informatique

- a)* Écrire une fonction **Scilab** **f** qui prend en entrée un réel **x** et qui calcule  $f(\mathbf{x})$ .
- b)* En utilisant la fonction **f** précédente, écrire une fonction **SuiteU** qui prend en entrée un entier positif **n** et qui calcule  $u_n$ .
- c)* En utilisant la fonction **SuiteU** précédente, comment peut-on obtenir à l'aide de **Scilab** une valeur approchée de  $\ell$  à  $10^{-4}$  près ?

**Exercice 8**

Dans tout cet exercice,  $f$  désigne la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$\forall x \in ]0, +\infty[, f(x) = x - \ln(x)$$

**Partie I : Étude de la fonction  $f$** 

1. Dresser le tableau de variations de  $f$  en précisant ses limites en 0 et en  $+\infty$ .
2. Montrer que l'équation  $f(x) = 2$ , d'inconnue  $x \in ]0, +\infty[$ , admet exactement deux solutions, que l'on note  $a$  et  $b$ , telles que  $0 < a < 1 < b$ .
3. Montrer :  $b \in [2, 4]$ . On donne :  $\ln(2) \simeq 0,7$ .

**Partie II : Étude d'une suite**

On pose :  $u_0 = 4$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$ .

4. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et que l'on a :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [b, +\infty[$ .
5. Déterminer la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.
6. a) Montrer :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - b \leq \frac{1}{2}(u_n - b)$ .  
 b) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - b \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ .
7. a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier  $n$  de  $\mathbb{N}$ , renvoie la valeur de  $u_n$ .  
 b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un réel  $\epsilon$  strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de  $b$  à  $\epsilon$  près.

```

1  function b = valeur_approchee(epsilon)
2      n = 0
3      while .....
4          n = n + 1
5      end
6      b = suite(n)
7  endfunction

```

## Séance 5 : suites implicites

### Exercice 9

Pour tout entier  $n$  positif, on définit sur  $[0, +\infty[$  la fonction  $f_n$  par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = e^x + nx^2 - 3$$

1. a) Montrer que  $f_n$  est continue et dérivable sur son ensemble de définition.  
Dresser son tableau de variations.
- b) Donner l'équation de la tangente de  $f_n$  en 1.
- c) Tracer dans un même repère les courbes de  $f_0$ ,  $f_1$  et  $f_2$ .
- d) Montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  a exactement une solution positive, notée  $u_n$ .
- e) Préciser la valeur de  $u_0$ . Dans la suite on supposera que  $n \geq 1$ .
- f) Vérifier que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in ]0, 1[$ .
2. Écrire une fonction **Scilab** qui prend un entier  $n$  et qui calcule une valeur approchée de  $u_n$  à 0,001 près par la méthode de dichotomie.
3. a) Montrer que :  $\forall x \in ]0, 1[, f_{n+1}(x) > f_n(x)$ .
- b) En déduire le signe de  $f_n(u_{n+1})$ , puis le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
- c) Montrer que  $(u_n)$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.
- d) On suppose dans cette question que  $\ell > 0$ .  
Calculer la limite de  $e^{u_n} + nu_n^2 - 3$  et en déduire une contradiction.
- e) Donner enfin la valeur de  $\ell$ .
- f) Montrer que  $\sqrt{\frac{n}{2}} u_n$  tend vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 10

Pour tout entier  $n$  non nul, on note  $h_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x > 0, h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul, la fonction  $h_n$  est strictement décroissante sur  $]0, 1[$  et strictement croissante sur  $[1, +\infty[$ .
2. En déduire que pour tout entier  $n$  non nul, l'équation  $h_n(x) = 4$  admet exactement deux solutions, notées  $u_n$  et  $v_n$  et vérifiant :  $0 < u_n < 1 < v_n$ .
3. a) Démontrer :
 
$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(x) - h_n(x) = \frac{(x-1)(x^{2n+1} - 1)}{x^{n+1}}$$
- b) En déduire :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, h_{n+1}(v_n) \geq 4$ .
- c) Montrer alors que la suite  $(v_n)$  est décroissante.
4. a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  converge vers un réel  $\ell$  et montrer :  $\ell \geq 1$ .
- b) En supposant que  $\ell > 1$ , démontrer :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n^n = +\infty$ .  
En déduire une contradiction.
- c) Déterminer la limite de  $(v_n)$ .

5. a) Montrer :  $\forall n \geq 1, v_n \leq 3$ .

b) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function y = h(n,x)` qui renvoie la valeur de  $h_n(x)$  lorsqu'on lui fournit un entier naturel  $n$  non nul et un réel  $x \in \mathbb{R}_+$  en entrée.

c) Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une valeur approchée à  $10^{-5}$  près de  $v_n$  par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit un entier  $n \geq 1$  en entrée :

```
1  function res=y(n)
2      a = 1
3      b = 3
4      while (b-a) > 10 ^ (-5)
5          c = (a+b)/2
6          if h(n,c) < 4 then
7              .....
8          else
9              .....
10         end
11     end
12     .....
13 endfunction
```