Interrogation de rentrée

Exercice 1

Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \; f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,7$.

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [b,+\infty[$.

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

6. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

7. ***a)*** Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 function b = valeur_approchee(epsilon)
2     n = 0
3     while ...........
4         n = n + 1
5     end
6     b = suite(n)
7 endfunction
```

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E ($f \in \mathscr{L}(E)$).

1) Démontrer : $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f) \;\Rightarrow\; f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2) Démontrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \;\Rightarrow\; \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

3) Conclure.

Exercice 3
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.

1. Démontrer que la matrice $A - 2I$ est non inversible. Déterminer $E_2(A)$.

2. Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

3. Démontrer que la matrice $\Delta = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure et trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\Delta = \alpha I + J$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer J^2, puis J^k pour tout entier $k \geqslant 2$.

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer Δ^n en fonction de I et J.

c) En déduire l'expression matricielle de A^n.

Exercice 4
Pour chacune des expressions suivantes :

(i) déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

(ii) indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

1. $x \mapsto \ln(x) + \sqrt{x}$,

2. $f(x)$,

3. u_n,

4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

5. $\sum\limits_{n\geqslant 3} u_n$,

6. $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} u_n$,

7. $\{y \in \mathbb{R} \mid y^2 - x^2 > 0\}$,

8. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z}, k \leqslant x < k+1$.

Exercice 5

1. Étudier la continuité des fonctions suivantes sur l'ensemble E.
Ces fonctions sont-elles prolongeables par continuité au bord de l'ensemble E ?

a) $f : x \mapsto \ln(3x^2 + 2x)$ et $E =]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]0, +\infty[$

b) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^3 - x}$ et $E =]-\infty, +\infty[$

2. Les fonctions précédentes sont-elles dérivables sur E ?
Sont-elles dérivables au bord de E ?

Exercice 6
On considère la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de G.

2. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$: $t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1 + t^2$.

3. En déduire un encadrement de $G(x)$, pour $x \in [0, +\infty[$.

4. Montrer alors : $G(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{7}{3}x^3$.

5. Démontrer que G réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle à préciser.

Exercice 7
On pose f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. a) Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant f pour densité.

b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

2. On pose : $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y ?

Exercice 8
Soit $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. a) Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

b) On suppose maintenant : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

(i) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([X = k]) \ = \ \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

(ii) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

c) Conclure.

Exercice 9

1. Une puce se déplace en faisant des sauts aléatoires sur un axe gradué. Initialement à l'origine, la puce se déplace à chacun de ses sauts d'une unité vers la droite avec probabilité $p \in]0, 1[$, ou d'une unité vers la gauche avec probabilité $1 - p$. On note Y_n le nombre de fois où elle s'est déplacée vers la droite entre le premier et le $n^{\text{ème}}$ saut (compris).
Quelle est la loi de Y_n ?

2. Une urne contient des boules blanches en proportion b et vertes en proportion v. Donc $0 < b < 1$, $0 < v < 1$ et $b + v = 1$. On effectue des tirages successifs avec remise dans cette urne. On note X le numéro du tirage où la première boule verte apparaît.
Quelle est la loi de X ?

3. Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. On suppose que les conducteurs arrivant au péage choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. On note Z le numéro du guichet choisi par le 1^{er} conducteur arrivant au péage.
Quelle est la loi de Z ?

Exercice 10
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on note B_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$, et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

2. ***a)*** Pour tout i de $\llbracket 2, n-1 \rrbracket$, justifier que $\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $\mathbb{P}\big([X = k] \big)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente et qui vaut 0 sinon.

a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$\mathbb{P}\big([X = k] \cap [Y = 0] \big) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

b) En déduire $\mathbb{P}\big([Y = 0] \big)$.

c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.