Interrogation de rentrée

Exercice 1

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

- **1 pt : variations de f**
- **1 pt : limite en 0 et $+\infty$**

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

- **1 pt : continue et strictement croissante**
- **1 pt :** $f(]0, 1[) =]1, +\infty[$
- **1 pt :** $2 \in]1, +\infty[$
- **1 pt : mêmes arguments pour $]1, +\infty[$ (0 en cas d'oubli d'un argument)**
- **1 pt : conclusion**

3. Montrer : $b \in [2, 4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,\ 7$.

- **1 pt :** $f(2) \leqslant f(b) \leqslant f(4)$
- **1 pt : application de g de part et d'autre (la stricte croissance doit être mentionnée)**

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[$.

- **1 pt : initialisation**
- **3 pts : hérédité**

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

- **1 pt :** $u_{n+1} - u_n \ = \ f(b) - f(u_n)$
- **1 pt :** $u_n \geqslant b \ \Rightarrow \ f(u_n) \geqslant f(b)$ **par croissance de f**
- **1 pt :** $u_n \to \ell \in [b, +\infty[$ **(théorème de convergence monotone)**
- **1 pt :** $\ell = \ln(\ell) + 2$
- **1 pt : conclure $\ell = b$, seule solution de $f(x) = 2$ sur $]1, +\infty[$**

6. ***a)*** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}\,(u_n - b)$.

- **1 pt :** $\forall x \in [b, +\infty[$**,** $|h'(x)| = h'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$
- **1 pt : par l'IAF :** $\forall (x, y) \in [b, +\infty[^2,\ \mid h(y) - h(x) \mid \leqslant \dfrac{1}{2}\ |y - x|$
- **1 pt : en appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [b, +\infty[$ et $x = b \in [b, +\infty[$**
- **1 pt : conclusion ($h(u_n) = u_{n+1}$ et $h(b) = b$)**

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

- **1 pt :** $u_n - b \geqslant 0$
- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité**

7. a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

- **1 pt : squelette de fonction**
- **1 pt : indentation**
- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : boucle**

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1  function b = valeur_approchee(epsilon)
2      n = 0
3      while ...........
4          n = n + 1
5      end
6      b = suite(n)
7  endfunction
```

- **2 pts : while 1 / 2^(n-1) > epsilon**

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E ($f \in \mathscr{L}(E)$).

1) Démontrer : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \ \Rightarrow\ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

- **1 pt : structure de démo**
- **1 pt :** $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Leftrightarrow\ \forall x \in E,\ f^2(x) = 0_E$
- **1 pt :** $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 0_E$

2) Démontrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \ \Rightarrow\ \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

- **1 pt :** $y \in \mathrm{Im}(f) \ \Leftrightarrow\ \exists x \in E,\ y = f(x)$
- **1 pt :** $f(y) = f(f(x)) = (f \circ f)(x) = 0_E$

3) Conclure.

- **1 pt**

Exercice 3

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.

1. Démontrer que la matrice $A - 2I$ est non inversible. Déterminer $E_2(A)$.

- **1 pt : la matrice $A - 2I$ possède deux colonnes égales donc n'est pas inversible**
- **1 pt : écriture du système associé à $AX = 2X$**
- **1 pt : résolution**
- **1 pt : $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$**

2. Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

- **3 pts**

On enlève 1 pt si l'ordre des opérations n'est pas le bon et jusqu'à 2 points en cas d'erreurs de calculs (on attribue au minimum 1 pt si l'algorithme est respecté mais le résultat est faux). L'utilisation de fractions est sanctionnée de 2 points si elle entraîne des erreurs de calcul (0 sinon).

3. Démontrer que la matrice $\Delta = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure et trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\Delta = \alpha I + J$$

- **1 pt :** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
- **1 pt : $\Delta - J = 2I$ donc $\alpha = 2$**

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer J^2, puis J^k pour tout entier $k \geqslant 2$.

- **1 pt : $J^2 = 0$**
- **1 pt : $\forall k \geqslant 2$, $J^k = 0$**

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer Δ^n en fonction de I et J.

- 1 pt : $2I$ et J commutent
- 1 pt : formule du binôme correcte
- 1 pt : découpage valable car $n \geqslant 1$
- 1 pt : $\forall k \geqslant 2$, $J^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$
- 1 pt : $\Delta^n = 2^n I + n\, 2^{n-1} J$
- 1 pt : cas $n = 0$

c) En déduire l'expression matricielle de A^n.

- **1 pt : $A^n = P\Delta^n P^{-1}$**
- **1 pt : $A^n = 2^n I + n 2^{n-1} PJP^{-1}$**
- **1 pt : $PJP^{-1} = A - 2I$ et/ou conclusion $A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n & 2+n & -n \\ n & n & 2-n \end{pmatrix}$**

Exercice 4

Pour chacune des expressions suivantes :

(i) déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

(ii) indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

1. $x \mapsto \ln(x) + \sqrt{x}$,

2. $f(x)$,

3. u_n,

4. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

5. $\sum\limits_{n \geqslant 3} u_n$,

6. $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} u_n$,

7. $\{y \in \mathbb{R} \mid y^2 - x^2 > 0\}$,

8. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z}, k \leqslant x < k+1$.

- **1 pt : pour les questions *1.* à *4.* (4 points en tout)**
- **2 pts : pour les questions *5.* à *8.* (8 points en tout)**

Exercice 5

1. Étudier la continuité des fonctions suivantes sur l'ensemble E.
Ces fonctions sont-elles prolongeables par continuité au bord de l'ensemble E ?

a) $f : x \mapsto \ln(3x^2 + 2x)$ et $E =]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]0, +\infty[$

- **1 pt : f est la composée $f = f_2 \circ f_1$**
- **1 pt : $\lim\limits_{x \to -\frac{2}{3}} f(x) = -\infty$ puisque $\lim\limits_{x \to -\frac{2}{3}} 3x^2 + 2x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$**
- **1 pt : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ puisque $\lim\limits_{x \to 0} 3x^2 + 2x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.**

b) $f : x \mapsto e^{x^3 - x}$ et $E =]-\infty, +\infty[$

- **1 pt : f est la composée $f = f_2 \circ f_1$**

2. Les fonctions précédentes sont-elles dérivables sur E ?
Sont-elles dérivables au bord de E ?

- **1 pt : $f : x \mapsto \ln(3x^2 + 2x)$ non dérivable en 0 et $-\frac{2}{3}$ car non continue en ces points**
- **1 pt : la fonction $f : x \mapsto e^{x^3 - x}$ est dérivable sur $]-\infty, +\infty[$**

Exercice 6

On considère la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \sqrt{1 + t^4}\, dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de G.

- **1 pt : cas $x \geqslant 0$**
- **1 pt : cas $x < 0$**
- **1 pt : conclusion G est définie sur $\mathbb{R}$**

2. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$: $t^2 \leqslant \sqrt{1 + t^4} \leqslant 1 + t^2$.

- **1 pt : raisonnement par équivalence**
- **1 pt : argument de stricte croissance de la fonction carrée**

3. En déduire un encadrement de $G(x)$, pour $x \in [0, +\infty[$.

- **1 pt : par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant** ($x \leqslant 2x$ **car** $x \geqslant 0$) **:** $\displaystyle\int_x^{2x} t^2 \ dt \leqslant \int_x^{2x} \sqrt{1+t^4} \ dt \leqslant \int_x^{2x} (1+t^2) \ dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\left[\frac{t^3}{3} \right]_x^{2x} = \frac{1}{3} \left[\ t^3 \ \right]_x^{2x} = \frac{1}{3} \left((2x)^3 - x^3\right) = \frac{1}{3} \left(8x^3 - x^3\right) = \frac{7}{3} \ x^3$
- **1 pt :** $\displaystyle\left[t + \frac{t^3}{3} \right]_x^{2x} = \left(2x + \frac{(2x)^3}{3}\right) - \left(x + \frac{x^3}{3}\right) = x + \frac{7}{3} \ x^3$

4. Montrer alors : $G(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{7}{3} x^3$.

- **1 pt : division par** $\frac{7}{3} \, x^3 > 0$
- **1 pt : conclusion**

5. Démontrer que G réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle à préciser.

- **1 pt :** $f : t \mapsto \sqrt{1+t^4}$ **est** $\mathcal{C}^0$ **sur** $\mathbb{R}_+$ **donc admet une primitive** F **de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}_+$
- **1 pt :** $G(x) = F(2x) - F(x)$
- **1 pt : la fonction** G **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}_+$ **car elle est la somme** $G = G_1 - F$ **de deux fonctions de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $\mathbb{R}_+$
- **1 pt :** $G'(x) = 2 \ F'(2x) - F'(x) = 2 \ f(2x) - f(x) = 2 \ \sqrt{1+(2x)^4} - \sqrt{1+x^4} > 0$
- **2 pts : th de la bijection dont limites (**G **réalise une bijection de** $[0, +\infty[$ **sur** $[0, +\infty[$**)**

Exercice 7

On pose f la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} x \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. a) Montrer que f est une densité de probabilité.

- **1 pt : continuité sur** $]-\infty, 0[$ **et** $]0, +\infty[$ **(ouverts !)**
- **1 pt :** $\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) \geqslant 0$ **par disjonction de cas**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \ dt = \int_0^{+\infty} f(t) \ dt$
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^A f(t) \ dt = -\exp\left(-\frac{A^2}{2}\right) + 1 \underset{A \to +\infty}{\longrightarrow} 1$

b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

- **1 pt : si** $x \in \,]-\infty, 0[$**,** $F(x) = 0$
- **1 pt : si** $x \in [0, +\infty[$**,** $\displaystyle F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \ dt = \int_0^x f(t) \ dt$ **(car** f **est nulle en dehors de** $[0, +\infty[$**)**
- **1 pt : puis** $= 1 - \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$

2. On pose : $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y ?

- **1 pt : ensemble image** $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$
- **3 pts : 1 pt** $F_Y = 0$ **sur** $[0, +\infty[$ **/ 1 pt pour** $F_Y(x) = \mathbb{P}([-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x})$ **/ 1 pt pour reconnaître la fonction de répartition de la loi** $\mathcal{E}\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Exercice 8

Soit $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. a) Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X > k]) \;=\; 1 - \mathbb{P}(\overline{[X > k]}) \;=\; 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k])$
- **1 pt :** $[X \leqslant k] \;=\; \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X = i]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} [X = i]\right) = \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}([X = i])$

b) On suppose maintenant : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

(i) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([X = k]) \;=\; \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

- **1 pt :** $[X > k-1] = [X \geqslant k] = [X = k] \cup [X > k]$ **(car X est à valeurs entières)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X > k-1]) = \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([X > k])$ **(par incompatibilité)**

(ii) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

- **1 pt :** $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]) = q^{k-1} - q^k = q^{k-1}(1-q) \;=\; q^{k-1}p$

c) Conclure.

- **1 pt : si X à valeurs entières :** $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$

Exercice 9

1. Une puce se déplace en faisant des sauts aléatoires sur un axe gradué. Initialement à l'origine, la puce se déplace à chacun de ses sauts d'une unité vers la droite avec probabilité $p \in]0,1[$, ou d'une unité vers la gauche avec probabilité $1-p$. On note Y_n le nombre de fois où elle s'est déplacée vers la droite entre le premier et le $n^{\text{ème}}$ saut (compris).
Quelle est la loi de Y_n ?

- **1 pt : l'expérience consiste en la succession de n d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p, paramètre qui correspond à la probabilité que la puce se déplace d'une unité vers la droite.**
- **1 pt : la v.a.r. Y_n correspond au nombre de succès de cette expérience.**
- **1 pt : conclusion** $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

2. Une urne contient des boules blanches en proportion b et vertes en proportion v. Donc $0 < b < 1$, $0 < v < 1$ et $b + v = 1$. On effectue des tirages successifs avec remise dans cette urne. On note X le numéro du tirage où la première boule verte apparaît.
Quelle est la loi de X ?

- **1 pt : l'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre v, paramètre qui correspond à la probabilité de l'obtention d'une boule verte.**
- **1 pt : la v.a.r. X correspond au rang du premier succès de cette expérience.**
- **1 pt :** $X \hookrightarrow \mathcal{G}(v)$

3. Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. On suppose que les conducteurs arrivant au péage choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. On note Z le numéro du guichet choisi par le 1er conducteur arrivant au péage.
Quelle est la loi de Z ?

- **1 pt : l'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi** 10 **issues numérotées de** 1 **à** 10**.**
- **1 pt : la v.a.r.** Z **correspond au numéro obtenu lors de cette expérience.**
- **1 pt :** $Z \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 10 \rrbracket)$

Exercice 10
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on note B_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$, et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

- **1 pt :** $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$

2. a) Pour tout i de $\llbracket 2, n-1 \rrbracket$, justifier que $\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

- **1 pt : formulation : si l'événement** $B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}$ **est réalisé, c'est que ... dans ce cas,** B_i **est réalisé si et seulement si ...**
- **1 pt : explication sensée**

b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $\mathbb{P}\big([X = k]\big)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

- **1 pt : si** $k = 1$**,** $[X = 1] = N_1$
- **1 pt : si** $k \geqslant 2$**,** $[X = k] \ = \ B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k$
- **1 pt : formule des probas composées énoncée correctement**
- **1 pt :** $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}\left(\overline{N_1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$ **et** $\mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(N_k) = \dfrac{1}{n-k+1}$

c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

- **1 pt :** $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$
- **2 pts : 1 pt** $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ / **1 pt** $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(n-1)(n+1)}{12}$

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente et qui vaut 0 sinon.

a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$\mathbb{P}\big(\, [X = k] \cap [Y = 0] \,\big) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

- **1 pt : formulation l'événement** $[X = k] \cap [Y = 0]$ **est réalisé ssi** $[X = k]$ **est réalisé et l'événement** $[Y = 0]$ **est réalisé**
- **1 pt : on en déduit** $[X = k] \cap [Y = 0] \;=\; B_1^{(0)} \cap \ldots \cap B_{k-1}^{(0)} \cap N_k$
- **1 pt : formule des probas composées énoncée correctement**
- **1 pt :** $\mathbb{P}\big(B_1^{(0)}\big) = \dfrac{n-2}{n}$ **et** $\mathbb{P}_{B_1^{(0)} \cap \cdots \cap B_{k-1}^{(0)}}(N_k) = \dfrac{1}{n-k+1}$
- **1 pt :** $\forall i \in [\![2, n-1]\!]$**,** $\mathbb{P}_{B_1^{(0)} \cap \cdots \cap B_{i-1}^{(0)}}\big(B_i^{(0)}\big) = \dfrac{n-i-1}{n-i+1}$ **et conclusion**

b) En déduire $\mathbb{P}\big(\, [Y = 0] \,\big)$.

- **1 pt : FPT correcte** $\mathbb{P}\big(\, [Y = 0] \,\big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big(\, [X = k] \cap [Y = 0] \,\big)$ **(dont SCE)**
- **1 pt : calcul** $\mathbb{P}\big(\, [Y = 0] \,\big) = \dfrac{1}{2}$

c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

- **1 pt :** $\big(\, [Y = 0]\,, [Y = 1] \,\big)$ **est un SCE donc** $\mathbb{P}\big(\, [Y = 0] \,\big) + \mathbb{P}\big(\, [Y = 1] \,\big) = 1$
- **1 pt : on en déduit** $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{2}$ **et** $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ **(tout ou rien)**