Interrogation de rentrée

Exercice 1
Dans tout cet exercice, f désigne la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in\ ]0,+\infty[,\ f(x) = x - \ln(x)$$

Partie I : Étude de la fonction f

1. Dresser le tableau de variations de f en précisant ses limites en 0 et en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
- Soit $x \in\ ]0,+\infty[$.
$$f'(x) \ = \ 1 - \frac{1}{x} \ = \ \frac{x-1}{x}$$
Alors, comme $x > 0$:
$$f'(x) \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ x - 1 \geqslant 0 \ \Leftrightarrow\ x \geqslant 1$$
On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - Tout d'abord : $f(1) = 1 - \ln(1) = 1$.
  - Ensuite : $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Donc : } \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty.}$$

  - Enfin, soit $x \in\ ]0,+\infty[$:
$$f(x) \ = \ x - \ln(x) \ = \ x\Big(1 - \frac{\ln(x)}{x}\Big)$$
De plus, par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

□

2. Montrer que l'équation $f(x) = 2$, d'inconnue $x \in\ ]0,+\infty[$, admet exactement deux solutions, que l'on note a et b, telles que $0 < a < 1 < b$.

Démonstration.

- La fonction f est :
  - × continue sur $]0,1[$ (car dérivable sur $]0,1[$),
  - × strictement décroissante sur $]0,1[$.

Ainsi f réalise une bijection de $]0,1[$ dans $f(]0,1[)$.

$$f(]0,1[) \ = \left] \lim_{x\to 1^-} f(x), \ \lim_{x\to 0} f(x) \right[=]1,+\infty[$$

Or $2 \in]1,+\infty[$.
Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]0,1[$, notée a.

- La fonction f est :
  - × continue sur $]1,+\infty[$ (car dérivable sur $]1,+\infty[$),
  - × strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

  Ainsi f réalise une bijection de $]1,+\infty[$ dans $f(]1,+\infty[)$.

$$f(]1,+\infty[) \ = \left] \lim_{x\to 1^-} f(x), \ \lim_{x\to +\infty} f(x) \right[=]1,+\infty[$$

Or $2 \in]1,+\infty[$.
Donc l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur $]1,+\infty[$, notée b.

Finalement, l'équation $f(x) = 2$ admet exactement 2 solutions sur $]0,+\infty[$ notées a et b telles que $0 < a < 1 < b$.

Commentaire

- Il est important dans cette question d'avoir parfaitement en tête toutes les hypothèses du théorème de la bijection. En particulier, la fonction f doit être **strictement monotone** sur l'intervalle considéré.
- On ne pouvait donc pas appliquer le théorème de la bijection directement sur l'intervalle $]0,+\infty[$, mais il fallait découper cet intervalle en plusieurs sous-intervalles sur lesquels f est strictement monotone (ici $]0,1[$ et $]1,+\infty[$).

□

3. Montrer : $b \in [2,4]$. On donne : $\ln(2) \simeq 0,\ 7$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :
  - × $f(2) = 2 - \ln(2) \leqslant 2$,
  - × $f(4) = 4 - \ln(4) = 4 - \ln(2^2) = 4 - 2\ln(2) = 2(2 - \ln(2))$.
    De plus, $\ln(2) \simeq 0,7$, donc : $2 - \ln(2) \simeq 1,3$ et ainsi : $f(4) = 2(2 - \ln(2)) \simeq 2,6 \geqslant 2$.
  - × $f(b) = 2$.

  On a donc : $f(2) \leqslant f(b) \leqslant f(4)$.
- Notons g la réciproque de f sur $]1,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, $g :]1,+\infty[\to]1,+\infty[$ est strictement croissante sur $]1,+\infty[$. En appliquant g de part et d'autre de l'inégalité précédente :

$$\begin{array}{ccccc} g\big(f(2)\big) & \leqslant & g\big(f(b)\big) & \leqslant & g\big(f(4)\big) \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ 2 & \leqslant & b & \leqslant & 4 \end{array}$$

On a bien démontré : $b \in [2,4]$.

Commentaire

L'indication de l'énoncé $\ln(2) \simeq 0,7$ ne permet pas de savoir s'il s'agit d'une sur ou d'une sous-approximation. Un encadrement, tel que $0,6 \leqslant \ln(2) \leqslant 0,8$, permettrait de résoudre ce problème.

□

Partie II : Étude d'une suite

On pose : $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \left\{ \begin{array}{l} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \in [b, +\infty[\end{array} \right.$

- **Initialisation** :
  $u_0 = 4$. Or, d'après la question ***3.***, $b \leqslant 4$. Donc : $u_0 \in [b, +\infty[$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} \text{ est bien défini} \\ u_{n+1} \in [b, +\infty[\end{array} \right.$)

  Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et $u_n \in [b, +\infty[$.
  - Comme $u_n \geqslant b \geqslant 2$, on a en particulier $u_n > 0$.
    Donc $\ln(u_n)$ est bien définie. D'où u_{n+1} est bien défini.
  - Comme $u_n \geqslant b$

    alors $\ln(u_n) \geqslant \ln(b)$ *(par croissance de la fonction* $\ln$ *sur* $]0, +\infty[$*)*

    et $\underbrace{\ln(u_n) + 2}_{= u_{n+1}} \geqslant \ln(b) + 2$

    Enfin, par définition de b : $f(b) = 2$, c'est-à-dire $b - \ln(b) = 2$. Ainsi : $\ln(b) = b - 2$.
    On obtient alors :
    $$u_{n+1} \geqslant \ln(b) + 2 = (b - \cancel{2}) + \cancel{2}$$

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$\boxed{\text{Par principe de récurrence, on obtient que } (u_n) \text{ est bien définie et : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [b, +\infty[.}$

Commentaire

- Cette question est un classique des suites récurrentes.
  Elle se traite généralement par récurrence.
- Il faut ici faire attention à bien énoncer l'hypothèse de récurrence.
  Pour montrer que « **la suite** (u_n) est bien définie », on démontre en réalité :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \quad \text{où} \quad \mathcal{P}(n) : \textbf{le réel } u_n \text{ est bien défini}$$

□

5. Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
  $$u_{n+1} - u_n = \ln(u_n) + 2 - u_n = 2 - (u_n - \ln(u_n)) = f(b) - f(u_n)$$
  Or, d'après la question précédente : $u_n \geqslant b$.
  De plus, par croissance de la fonction f sur $[b, +\infty[$: $f(u_n) \geqslant f(b)$.
  D'où : $u_{n+1} - u_n = f(b) - f(u_n) \leqslant 0$.

  $\boxed{\text{Ainsi, la suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$

Commentaire

On pouvait aussi démontrer la décroissance de la suite (u_n) par récurrence.
Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- **Initialisation** :
  $u_1 = \ln(u_0) + 2 = \ln(4) + 2 = 2\,\ln(2) + 2 \simeq 2 \times 0,7 + 2 \simeq 3,4$.
  Donc $u_1 \leqslant u_0$.
  D'où $\mathcal{P}(0)$.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$).

Tout d'abord	u_{n+1}	$\leqslant$	u_n	*(par hypothèse de récurrence)*
donc	$\ln(u_{n+1})$	$\leqslant$	$\ln(u_n)$	*(par croissance de la fonction* ln *sur* $]0, +\infty[$*)*
et	$\ln(u_{n+1}) + 2$	$\leqslant$	$\ln(u_n) + 2$	
	$\shortparallel$		$\shortparallel$	
	u_{n+2}		u_{n+1}	

  D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

- La suite (u_n) est donc :
  - × décroissante,
  - × minorée par b (car : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [b, +\infty[$).

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (u_n) \text{ converge. On note } \ell \text{ sa limite.}}$$

- - Tout d'abord : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant b$.
    Par passage à limite, on en déduit : $\ell \geqslant b$.
  - Ensuite : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$.
    Donc, par continuité de ln sur $]0, +\infty[$: $\ell = \ln(\ell) + 2$. Or :

$$\ell = \ln(\ell) + 2 \;\Leftrightarrow\; \ell - \ln(\ell) = 2 \;\Leftrightarrow\; f(\ell) = 2$$

  Or, d'après la question ***2.***, b est l'unique solution de l'équation $f(x) = 2$ sur $]1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Donc } \ell = b.}$$

□

6. a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}\,(u_n - b)$.

Démonstration.
On note h la fonction définie par $h : x \mapsto \ln(x) + 2$.

- La fonction h est dérivable sur $[b, +\infty[$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $[b, +\infty[$.
  Soit $x \in [b, +\infty[$. Alors $h'(x) = \dfrac{1}{x} \geqslant 0$. Ainsi : $\forall x \in [b, +\infty[$, $|h'(x)| = h(x) = \dfrac{1}{x}$.
  Or, d'après la question ***3.***, $b \geqslant 2$. Donc, pour tout $x \in [b, +\infty[$: $x \geqslant b \geqslant 2$.
  Par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$, on en déduit : $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
  Ainsi :

$$\forall x \in [b, +\infty[,\; h'(x) \leqslant \frac{1}{2}$$

- On sait alors :
  × h est dérivable sur $[b, +\infty[$,
  × $\forall x \in [b, +\infty[$, $|h'(x)| = h'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

  On en déduit, par l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in [b, +\infty[^2, \ | \ h(y) - h(x) \ | \leqslant \frac{1}{2} \ |y - x|$$

  Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant cette inégalité à $y = u_n \in [b, +\infty[$ et $x = b \in [b, +\infty[$, on obtient :

$$h(u_n) - h(b) \ = \ | \ h(u_n) - h(b) \ | \leqslant \frac{1}{2} \ |u_n - b| \ = \ \frac{1}{2} \ (u_n - b)$$

  Or :
  × $h(u_n) = \ln(u_n) + 2 = u_{n+1}$
  × $h(b) = \ln(b) + 2 = (b - \cancel{2}) + \cancel{2} = b$, car b est solution de l'équation $f(x) = 2$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b).}$$

□

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question ***4.*** : $u_n \geqslant b$.

$$\boxed{\text{Donc : } u_n - b \geqslant 0.}$$

- Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n)$: $u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
  - **Initialisation** :
    D'une part : $u_0 - b = 4 - b$.
    D'autre part : $\dfrac{1}{2^{0-1}} = \dfrac{1}{2^{-1}} = 2$.
    Ainsi :
$$\begin{array}{rcll} u_0 - b & = & 4 - b & \\ & \leqslant & 4 - 2 & \textit{(car } b \geqslant 2 \textit{ d'après la question } \textbf{\textit{3}}\textit{)} \\ & = & 2 \ = \ \dfrac{1}{2^{0-1}} & \end{array}$$
    D'où $\mathcal{P}(0)$.
  - **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$.
    Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (*i.e.* $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2^n}$).
    D'après la question précédente : $u_{n+1} - b \leqslant \dfrac{1}{2}(u_n - b)$.
    Or, par hypothèse de récurrence : $u_n - b \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
    En combinant ces deux résultats, on obtient :
$$u_{n+1} - b \ \leqslant \ \frac{1}{2}(u_n - b) \ \leqslant \ \frac{1}{2} \, \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$
    D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

□

7. a) Écrire une fonction **Scilab** d'en-tête `function u = suite(n)` qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

Démonstration.

```
1 function u = suite(n)
2     u = 4
3     for k = 1:n
4         u = log(u) + 2
5     end
6 endfunction
```

Expliquons un peu ce programme.
La variable `u` est créée pour contenir successivement les valeurs u_0, u_1, ..., u_n.

- On initialise donc cette variable à $u_0 = 4$ avec la ligne 2

```
2     u = 4
```

- On met ensuite à jour `u` de manière itérative avec la ligne 4

```
4         u = log(u) + 2
```

Commentaire

- On décrit ici de manière précise les instructions afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Scilab**.
Cependant, l'écriture du script démontre la compréhension de toutes les commandes en question et permet sans doute d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.
- Si on avait souhaité afficher tous les n premiers termes de la suite (u_n), on aurait modifié le script précédent de la façon suivante :

```
1 function u = suite(n)
2     u = zeros(1, n)
3     u(1) = 4
4     for k = 2:n
5         u(k) = log(u(k-1)) + 2
6     end
7 endfunction
```

□

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Scilab** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de b à `epsilon` près.

```
1 function b = valeur_approchee(epsilon)
2     n = 0
3     while ..........
4         n = n + 1
5     end
6     b = suite(n)
7 endfunction
```

Démonstration.

- D'après la question ***6.b)*** :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$
S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$, on obtiendra par transitivité :
$$0 \leqslant u_N - b \leqslant \varepsilon$$
Donc u_N est une valeur approchée de b à ε près.
- On complète alors le programme **Scilab** de la façon suivante :

```
3       while 1 / 2 ^ (n-1) > epsilon
```

□

Exercice 2
Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E ($f \in \mathscr{L}(E)$).

1) Démontrer : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \ \Rightarrow \ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Démonstration.
Supposons $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Il s'agit de démontrer : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ ce qui signifie : $\forall x \in E$, $f^2(x) = 0_E$.
Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{array}{rcll} (f \circ f)(x) & = & f(f(x)) & \\ & = & 0_E & \quad \textit{(car } f(x) \in \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)\textit{)} \end{array}$$

Ainsi : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

$$\boxed{\text{On a bien démontré : } \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \ \Rightarrow \ f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}.}$$

Commentaire

- Cette exercice est plus théorique que les précédents. L'endomorphisme f n'est pas connu. On connaît simplement des propriétés sur f et on cherche à en démontrer de nouvelles. Ce type d'exercice d'algèbre théorique peut donc paraître un peu abrupte. Pourtant, on se rend compte, à la lecture de cette démonstration, que de tels exercices peuvent donner lieu à des questions très simples. L'idée est ici de vérifier que les définitions de base (comme celles du noyau et de l'image d'une application linéaire) sont bien connues. En déroulant ces définitions, on obtient le résultat.
- Plus précisément, une telle question commence par la mise en place d'une structure de démonstration. Il faut savoir démontrer :
  - × une propriété quantifiée universellement : $\forall x \in E$, $p(x)$
    `Soit` $x \in E$ `...`
  - × une propriété quantifiée existentiellement : $\exists x \in E$, $p(x)$
    (il s'agit alors d'exhiber un élément $x \in E$ qui vérifie la propriété p)
  - × une inclusion d'ensemble : $A \subset B$
    `Soit` $x \in A$ `... alors` $x \in B$
  - × une égalité d'ensemble : $A = B$
    (on procède par double inclusion à l'aide de la structure de démonstration précédente)
  - × une implication : $p \Rightarrow q$
    `Supposons` p `et démontrons` q.
  - × une équivalence : $p \Leftrightarrow q$
    (on procède par double implication à l'aide de la structure de démonstration précédente)

  Ce n'est qu'une fois la structure de démonstration en place que l'on déroule les définitions.
- On peut en profiter pour remarquer que l'étape d'hérédité d'une récurrence n'est qu'une illustration de ces structures de démonstration. Il s'agit de démontrer la proposition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathcal{P}(n) \ \Rightarrow \ \mathcal{P}(n+1)$$

  En terme de rédaction, il n'y a donc guère le choix :
  `Soit` $n \in \mathbb{N}$.
  `Supposons` $\mathcal{P}(n)$ `et démontrons` $\mathcal{P}(n+1)$

□

2) Démontrer : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \;\Rightarrow\; \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Démonstration.
Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$.
Il existe donc $x \in E$ tel que : $y = f(x)$.
Alors :

$$\begin{array}{rcl} f(y) & = & f(f(x)) \\ & = & (f \circ f)(x) \;=\; 0_E \qquad \textit{(car } f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, $y \in \mathrm{Ker}(f)$.
On en conclut : $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

> On a bien démontré : $f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)} \;\Rightarrow\; \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

Commentaire

- Insistons sur la facilité de cette démonstration. Comme expliqué dans la remarque précédente, il s'agit essentiellement de mettre en place la structure de démonstration et de dérouler les définitions.
- Précisons la manière d'agir.

```
1  Soit y ∈ Im(f).
2  Il existe donc x ∈ E tel que : y = f(x). Alors :
3              f(y) = ...
4                   = ...
5                   = 0_E
6  Ainsi, y ∈ Ker(f).
```

  × Les lignes 1 et 6 correspondent à la mise en place de la structure de démonstration : il s'agit de démontrer une inclusion. On choisit donc un élément dans $\mathrm{Im}(f)$ et on démontre qu'il est dans $\mathrm{Ker}(f)$.
  × La ligne 2 correspond au déroulé de la définition de l'image d'une application.
  Dire : $y \in \mathrm{Im}(f)$ c'est exactement dire que y s'écrit sous la forme $f(x)$ pour un $x \in E$.
  × La ligne 3 correspond au déroulé de la définition du noyau d'une application linéaire. Dire : $y \in \mathrm{Ker}(f)$ c'est exactement dire : $f(y) = 0_E$. Cela permet d'écrire le début de la ligne 3 ainsi que le résultat en ligne 5.

  C'est seulement à ce moment que l'on rentre dans la phase de démonstration à proprement parler et que l'on s'intéresse aux hypothèses (ici, le fait que l'on ait : $f^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$).
- Le message est clair : sur les 6 lignes de présentation, 4 proviennent de la présentation et seules 2 correspondent à la démonstration. Il n'est donc pas acceptable de ne pas savoir **commencer** ce type de questions, car cela démontre un défaut de connaissance du cours (définitions du chapitre et / ou structures de démonstration). □

3) Conclure.

Démonstration.

> On a démontré, par double implication :
> $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \;\Leftrightarrow\; f \circ f = 0_{\mathscr{L}(E)}$

□

Exercice 3
On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E_\lambda(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = \lambda X\}$.

1. Démontrer que la matrice $A - 2I$ est non inversible. Déterminer $E_2(A)$.

Démonstration.

- Tout d'abord :
$$A - 2I \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
La matrice $A - 2I$ possède deux colonnes égales : $C_1 = C_2$.
$$\boxed{\text{La matrice } A - 2I \text{ n'est donc pas inversible.}}$$

- Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{array}{rcl} X \in E_2(A) & \iff & AX = 2X \\ & \iff & (A - 2 \cdot I_3)\ X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \iff & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ x + y - z & = & 0 \\ x + y - z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} & \left\{ x + y - z = 0 \right. \\ & \iff & \left\{ x = -y + z \right. \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} E_2(A) & = & \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -y + z \right\} \\ & = & \left\{ \begin{pmatrix} -y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ & = & \left\{ y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \ = \ \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array}$$

$$\boxed{E_2(A) \ = \ \mathrm{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$$

□

2. Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

Démonstration.
On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_1 \leftrightarrow L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\left\{ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2\, L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow 2\, L_2 + L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\left\{ \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}\, L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}\, L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}\, L_3 \end{array} \right.$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

Commentaire

La première opération a consisté à échanger les lignes L_1 et L_2. Grâce à cette opération, on place le réel 1 (utilisé ensuite comme pivot non nul) en haut à gauche de la matrice.

□

3. Démontrer que la matrice $\Delta = P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure et trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\Delta = \alpha I + J$$

Démonstration.

- La matrice Δ est définie par :

$$\begin{aligned}\Delta \ = \ P^{-1}AP \ &= \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 0 & 4\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice } \Delta = \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \text{ obtenue est bien triangulaire supérieure.}}$$

- On remarque alors :

$$\Delta - J \ = \ \begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \ = \ 2\ I$$

$$\boxed{\text{La valeur } \alpha = 2 \text{ permet d'écrire la matrice } \Delta \text{ sous la forme : } \Delta = \alpha I + J.}$$

□

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Calculer J^2, puis J^k pour tout entier $k \geqslant 2$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$J^2 \ = \ \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geqslant 2$: $J^k = 0$.
(on peut remarquer que, pour tout $k \geqslant 2$: $J^k = J^2 \times J^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \times J^{k-2} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$)

$$\boxed{\text{Pour tout } k \geqslant 2,\ J^k = 0.}$$

□

b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer Δ^n en fonction de I et J.

Démonstration.

- Les matrices $2I$ et J commutent car I commute avec toute matrice carrée de même ordre.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(2I+J)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2I)^{n-k} J^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} I^{n-k} J^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} J^k && \textit{(car on a : } \forall j \in \mathbb{N},\ I^j = I\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^{n-k} J^k + \cancel{\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} J^k} && \textit{(ce découpage est valable car } n \geqslant 1\textit{)} \\
&= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} 2^{n-k} J^k && \textit{(car pour tout } k \geqslant 2 \textit{ : } J^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)} \\
&= \binom{n}{0} 2^n J^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1} J^1 \\
&= 2^n I + 2^{n-1} nJ = 2^{n-1} (2I + nJ) \\
&= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2n \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- Enfin : $(2I+J)^0 = I$ et la formule précédente est donc aussi valable au rang $n = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall n \in \mathbb{N},\ \Delta^n = (2I+J)^n = 2^n I + n 2^{n-1} J.}$$

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leqslant p \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m}^{p} u_k + \sum_{k=p+1}^{n} u_k$$

(la deuxième somme est nulle si $p = n$)
où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
L'argument $n \geqslant 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.

- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geqslant 2,\ J^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'indice 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.

□

c) En déduire l'expression matricielle de A^n.

Démonstration.

- Par récurrence immédiate, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \big(P\Delta P^{-1}\big)^n = P\Delta^n P^{-1}$$

Commentaire

On retrouve ici le résultat dont on s'est notamment servi dans l'Exercice **??**.
Ici, démontrer le résultat n'est pas l'objectif de la question mais un résultat intermédiaire qui n'est pas cité dans l'énoncé. On peut donc utiliser ce résultat directement, en précisant simplement qu'il se montre par récurrence.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} A^n &= P\Delta^n P^{-1} = P\big(2^n I + n2^{n-1}J\big)P^{-1} \\ &= 2^n PIP^{-1} + n2^{n-1}PJP^{-1} \\ &= 2^n PP^{-1} + n2^{n-1}PJP^{-1} \\ &= 2^n I + n2^{n-1}PJP^{-1} \end{aligned}$$

- Enfin :

$$\begin{aligned} PJP^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = A - 2I \end{aligned}$$

Commentaire

On peut aussi faire ce calcul en revenant à l'écriture : $\Delta = 2I + J$.
Ainsi, $J = \Delta - 2I$ et :

$$PJP^{-1} = P\big(\Delta - 2I\big)P^{-1} = P\Delta P^{-1} - 2PIP^{-1} = A - 2I$$

- En conclusion :

$$\begin{aligned} A^n &= 2^n I + n2^{n-1}\,\big(A - 2I\big) = (2^n - n2^n)I + n\,2^{n-1}A = (1-n)\,2^n\,I + n\,2^{n-1}A \\ &= 2^{n-1}\,\big((2-2n)\,I + 2\,nA\big) \\ &= 2^{n-1}\left(\begin{pmatrix} 2-2n & 0 & 0 \\ 0 & 2-2n & 0 \\ 0 & 0 & 2-2n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n & 0 & 0 \\ n & 3n & -n \\ n & n & n \end{pmatrix}\right) \\ &= 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n & 2+n & -n \\ n & n & 2-n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ n & 2+n & -n \\ n & n & 2-n \end{pmatrix}.}$$

□

Exercice 4
Pour chacune des expressions suivantes :

(i) déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

(ii) indiquer, pour chaque variable en présence, si elle est libre ou liée.

1. $x \mapsto \ln(x) + \sqrt{x}$,

(i) Il s'agit d'une fonction réelle d'une variable réelle.

(ii) La variable x est muette car c'est la variable de définition de la fonction (une fonction est un mécanisme d'association : à chaque valeur de x est associée une image par la fonction).

On a ici affaire à une fonction dont l'évaluation en un réel donné ne dépend d'aucune variable.

2. $f(x)$,

(i) Il s'agit d'un réel (et non pas d'une fonction !).

(ii) Les variables f et x sont libres (elles ne sont sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

On a ici affaire à l'évaluation d'une fonction en un point x.

3. u_n,

(i) Il s'agit d'un réel (et non pas d'une suite !).

(ii) Les variables u et n sont libres (elles ne sont sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Le résultat dépend de la suite u étudiée ainsi que du rang n considéré.

4. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

(i) Il s'agit d'une suite.

(ii) La variable n est muette (on considère ici la valeur de la suite u à tous les rangs n entiers).
La variable u est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

C'est une évidence la suite u (autre notation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$) dépend seulement de la valeur de u.

5. $\sum\limits_{n \geqslant 3} u_n$,

(i) Il s'agit d'une série. Autrement dit c'est la suite des sommes partielles (souvent notée (S_n)) d'une suite (u_n).

(ii) La variable n est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole de sommation $\sum$).

La variable u est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

Cette série dépend seulement de la suite u considérée.

6. $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} u_n$,

(i) Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 3} u_n$ est convergente (dans le cas contraire, l'objet considéré dans cette question n'est pas défini), la notation $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} u_n$ désigne la somme de cette série. Il s'agit alors d'un réel.

(ii) La variable n est muette car c'est la variable de sommation (elle est donc sous la portée d'un symbole d'intégration $\sum$).

La variable u est libre (elle n'est sous la portée d'aucun quantificateur ni de symbole mathématique).

$$\boxed{\text{Cette somme dépend seulement de la suite } u \text{ considérée.}}$$

7. $\{y \in \mathbb{R} \mid y^2 - x^2 > 0\}$,

(i) Il s'agit d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

(ii) La variable y est muette (on s'intéresse ici à tous les réels y vérifiant une condition donnée). Cette condition porte sur une variable x qui n'apparaît sous la portée d'aucun symbole mathématique. La variable x est donc libre.

$$\boxed{\text{On a ici affaire à un ensemble qui dépend seulement de la variable } x.}$$

8. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z}, k \leqslant x < k+1$.

(i) Il s'agit d'une proposition quantifiée universellement.

(ii) Les variables x et k sont muettes car elles sont sous la portée d'un quantificateur.

$$\boxed{\text{La valeur de vérité de cette proposition mathématique ne dépend d'aucune variable.}}$$

Exercice 5

1. Étudier la continuité des fonctions suivantes sur l'ensemble E.
Ces fonctions sont-elles prolongeables par continuité au bord de l'ensemble E ?

a) $f : x \mapsto \ln(3x^2 + 2x)$ et $E =]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]0, +\infty[$

Démonstration.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]0, +\infty[$ car elle est la composée $f = f_2 \circ f_1$ où :

× $f_1 : x \mapsto 3x^2 + 2x = x(3x+2)$ est :
  – de classe $\mathcal{C}^0$ sur $]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]0, +\infty[$ car polynomiale.
  – telle que $f_1\Big(]-\infty, -\frac{2}{3}[\cup]0, +\infty[\Big) \subset]0, +\infty[$

× $f_2 : x \mapsto \ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto \ln(3x^2+2x) \text{ est de classe } \mathcal{C}^0 \text{ sur }]-\infty, -\tfrac{2}{3}[\cup]0, +\infty[.}$$

On remarque alors :

× $\lim\limits_{x \to -\frac{2}{3}} f(x) = -\infty$ puisque $\lim\limits_{x \to -\frac{2}{3}} 3x^2 + 2x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, on ne peut pas prolonger la fonction } f \text{ par continuité en } -\frac{2}{3}.}$$

On remarque enfin :

× $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to 0} 3x^2+2x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

$$\boxed{\text{Ainsi, on ne peut pas prolonger la fonction } f \text{ par continuité en } 0.}$$ □

b) $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^3-x}$ et $E =]-\infty,+\infty[$

Démonstration.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $]-\infty,+\infty[$ car elle est la composée $f = f_2 \circ f_1$ où :

× $f_1 : x \mapsto x^3 - x = x(x^2-1)$ est :
  – de classe $\mathcal{C}^0$ sur $]-\infty,+\infty[$ car polynomiale.
  – telle que $f_1\Big(]-\infty,+\infty[\Big) \subset]-\infty,+\infty[$

× $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $]-\infty,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^3-x} \text{ est de classe } \mathcal{C}^0 \text{ sur }]-\infty,+\infty[.}$$ □

2. Les fonctions précédentes sont-elles dérivables sur E ?
Sont-elles dérivables au bord de E ?

Démonstration.

a) • La fonction $f : x \mapsto \ln(3x^2+2x)$ est dérivable sur $]-\infty,-\frac{2}{3}[\cup]0,+\infty[$.
Pour le démontrer, on remplace chaque occurrence de l'expression « de classe $\mathcal{C}^0$ » de la démonstration précédente par le mot « dérivable ».

• Étudions maintenant la dérivabilité de f en $-\frac{2}{3}$.
La fonction f n'étant pas continue en $-\frac{2}{3}$, elle n'est pas dérivable en $-\frac{2}{3}$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas dérivable en } -\tfrac{2}{3}.}$$

• Étudions maintenant la dérivabilité de f en 0.
La fonction f n'étant pas continue en 0, elle n'est pas dérivable en 0.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$

b) • La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^3-x}$ est dérivable sur $]-\infty,+\infty[$.
Pour le démontrer, on remplace chaque occurrence de l'expression « de classe $\mathcal{C}^0$ » de la démonstration précédente par le mot « dérivable ». □

Exercice 6

On considère la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\,dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de G.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.

• Si $x \geqslant 0$: la fonction $f : t \mapsto \sqrt{1+t^4}$ est continue sur le **segment** $[x, 2x]$.
Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\,dt$ est bien définie.

- Si $x < 0$: la fonction $f : t \mapsto \sqrt{1+t^4}$ est continue sur le **segment** $[2x, x]$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt$ est bien définie.

$$\boxed{\text{La quantité } G(x) \text{ étant définie pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } G \text{ a pour ensemble de définition } \mathbb{R}.}$$

□

2. Montrer que pour tout $t \geqslant 0$: $t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$.

Démonstration.
Soit $t \geqslant 0$. On a :

$$\begin{array}{cl} & t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2 \\ \Leftrightarrow & \left(t^2\right)^2 \leqslant \left(\sqrt{1+t^4}\right)^2 \leqslant \left(1+t^2\right)^2 \\ \Leftrightarrow & t^4 \leqslant 1+t^4 \leqslant 1+2t^2+t^4 \\ \Leftrightarrow & 0 \leqslant 1 \leqslant 1+2t^2 \end{array}$$

(par **stricte** *croissance de la fonction élévation au carré sur* $[0,+\infty[$*)*

La dernière inégalité étant vérifiée, il en est de même de la première.

$$\boxed{\forall t \geqslant 0,\ t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2}$$

□

3. En déduire un encadrement de $G(x)$, pour $x \in [0,+\infty[$.

Démonstration.
Soit $x \in [0,+\infty[$.

- D'après la question précédente, pour tout $t \geqslant 0$:

$$t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$$

  Par croissance de l'intégration, les bornes étant dans l'ordre croissant ($x \leqslant 2x$ car $x \geqslant 0$) :

$$\begin{array}{ccccc} \displaystyle\int_x^{2x} t^2\, dt & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} \sqrt{1+t^4}\, dt & \leqslant & \displaystyle\int_x^{2x} (1+t^2)\, dt \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\ \left[\dfrac{t^3}{3}\right]_x^{2x} & \leqslant & G(x) & \leqslant & \left[t+\dfrac{t^3}{3}\right]_x^{2x} \end{array}$$

- Or :

$$\left[\frac{t^3}{3}\right]_x^{2x} = \frac{1}{3}\left[\,t^3\,\right]_x^{2x} = \frac{1}{3}\left((2x)^3 - x^3\right) = \frac{1}{3}\left(8x^3 - x^3\right) = \frac{7}{3}x^3$$

$$\left[t+\frac{t^3}{3}\right]_x^{2x} = \left(2x + \frac{(2x)^3}{3}\right) - \left(x + \frac{x^3}{3}\right) = x + \frac{7}{3}x^3$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \forall x \geqslant 0,\ \frac{7}{3}x^3 \leqslant G(x) \leqslant x + \frac{7}{3}x^3.}$$

□

4. Montrer alors : $G(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{7}{3}x^3$.

Démonstration.
Soit $x > 0$.

- D'après la question précédente, on obtient par division par $\dfrac{7}{3}\,x^3$ (> 0) :

$$1 \ \leqslant\ \frac{G(x)}{\frac{7}{3}x^3} \ \leqslant\ \frac{x}{\frac{7}{3}x^3} + 1$$

- Or :
  $\times$ $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$,
  $\times$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\frac{7}{3}x^3} + 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{7x^2} + 1 = 1$.

  Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, que $\dfrac{G(x)}{\frac{7}{3}x^3}$ admet pour limite 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\boxed{G(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{7}{3}\,x^3}$$

□

5. Démontrer que G réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers un intervalle à préciser.

Démonstration.

- La fonction $f : t \mapsto \sqrt{1+t^4}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  Elle admet donc une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$G(x) \ = \ \int_x^{2x} f(t)\ dt \ = \ [\ F(t)\ ]_x^{2x} \ = \ F(2x) - F(x)$$

  La fonction $G_1 : x \mapsto F(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ car elle est la composée $G_1 = F \circ h$ où :
  $\times$ $h : x \mapsto 2x$ est :
  – de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ car polynomiale.
  – telle que : $h(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$.
  $\times$ F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ car elle est la somme $G = G_1 - F$ de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

  (le caractère dérivable est suffisant pour la question demandé comme on le voit ci-dessous)

- On obtient alors, pour tout $x \geqslant 0$:

$$G'(x) \;=\; 2\; F'(2x) - F'(x) \;=\; 2\; f(2x) - f(x) \;=\; 2\; \sqrt{1+(2x)^4} - \sqrt{1+x^4} \;>\; 0$$

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[.}$$

- La fonction G est :
  - × continue sur $[0,+\infty[$.
  - × strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

  Elle réalise donc une bijection de $[0,+\infty[$ sur $G\big([0,+\infty[\big)$ où :

$$G\big([0,+\infty[\big) \;=\; [G(0), \lim_{x\to+\infty} G(x)[\;=\; [0,+\infty[$$

  En effet :
  - × $G(0) = \displaystyle\int_0^0 f(t)\ dt = 0$.
  - × $G(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{7}{3}\ x^3 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

$$\boxed{\text{La fonction } G \text{ réalise une bijection de } [0,+\infty[\text{ sur } [0,+\infty[.}$$ □

Exercice 7
On pose f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x\ \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. a) Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ admettant f pour densité.

Démonstration.

- La fonction f est continue :
  - × sur $]-\infty, 0[$ en tant que fonction constante,
  - × sur $]0,+\infty[$ en tant que produit de fonctions continues sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en } 0.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in]-\infty, 0[$, alors : $f(x) = 0$. Ainsi : $f(x) \geqslant 0$.
  - × si $x \in [0,+\infty[$, alors, comme $x \geqslant 0$: $f(x) = x\ \exp\left(-\dfrac{-x^2}{2}\right) \ \geqslant\ 0$.

$$\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0.}$$

- Montrons que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge et vaut 1.
  - × Tout d'abord, comme la fonction f est nulle en dehors de $[0,+\infty[$:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt$$
  - × Soit $A \in [0,+\infty[$.
$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^A f(t)\ dt & = & \displaystyle\int_0^A t\ \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\ dt \\ & = & \left[-\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right]_0^A \\ & = & -\exp\left(-\frac{A^2}{2}\right) + 1 \end{array}$$
    Or : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \exp\left(-\frac{A^2}{2}\right) = 0$.

$$\boxed{\text{On en déduit que l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt \text{ converge et vaut 1.}}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la fonction } f \text{ est une densité de probabilité.}}$$

□

b) Déterminer la fonction de répartition F de X.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
- × si $x \in\ ]-\infty,0[$, alors, comme f est nulle en dehors de $[0,+\infty[$:
$$F(x) \ = \ \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt \ = \ 0$$
- × si $x \in [0,+\infty[$, alors :
$$\begin{array}{rcll} F(x) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt & \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\ dt & \textit{(car } f \textit{ est nulle en dehors de } [0,+\infty[\textit{)} \\ & = & \displaystyle\int_{0}^{t} t\ \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\ dt & \\ & = & \left[-\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right]_0^x & \\ & = & 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } F : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \in\ ]-\infty,0[\\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{array} \right.}$$

□

2. On pose : $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y ?

Démonstration.

- Tout d'abord, par définition : $Y = X^2$. Donc : $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  × si $x \in \,]-\infty, 0[$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$, car $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[$. Donc :
  $$F_Y(x) \;=\; \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\varnothing) \;=\; 0$$
  × si $x \in [0, +\infty[$, alors :
  $$\begin{array}{rcll} F_Y(x) & = & \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \;=\; \mathbb{P}(\left[X^2 \leqslant x\right]) & \\ & = & \mathbb{P}([-\sqrt{x} \leqslant X \leqslant \sqrt{x}]) & \\ & = & F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) & \textit{(car X est une v.a.r. à densité)} \\ & = & \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}}\right) - 0 & \textit{(d'après la question précédente,} \\ & & & \textit{car } -\sqrt{x} \in \,]-\infty, 0]\textit{)} \\ & = & 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \end{array}$$
  Finalement : $F_Y : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, 0[\\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{array} \right.$.
- On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Or la fonction de répartition caractérise la loi.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

□

Exercice 8
Soit $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. a) Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- On remarque tout d'abord :

$$\mathbb{P}([X > k]) \;=\; 1 - \mathbb{P}(\overline{[X > k]}) \;=\; 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k])$$

- Par ailleurs, comme $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$: $[X \leqslant k] \;=\; \bigcup\limits_{i=1}^{k} [X = i]$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X \leqslant k]) & = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} [X = i]\right) & \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left([X = i]\right) & \textit{(par incompatibilité de } [X=1], \ldots, [X=i]\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{i=1}^{k} p\, q^{i-1} \;=\; p \sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i & \\ & = & p\, \dfrac{1-q^k}{1-q} & \textit{(car } q \neq 1\textit{)} \\ & = & 1 - q^k & \end{array}$$

$$\boxed{\text{Enfin : } \mathbb{P}([X > k]) \;=\; 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k]) \;=\; 1 - (1 - q^k) \;=\; q^k.}$$

□

b) On suppose maintenant : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

(i) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([X = k]) \;=\; \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll} [X > k-1] & = & [X \geqslant k] & \textit{(car } X \textit{ est à valeurs entières)} \\ & = & [X = k] \cup [X > k] & \end{array}$$

Les événements $[X = k]$ et $[X > k]$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}([X > k-1]) = \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([X > k])$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]).}$$

□

(ii) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{P}([X = k]) & = & \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & q^{k-1} - q^k & \textit{(par hypothèse de la question } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)} \\ & = & q^{k-1}(1-q) \ = \ q^{k-1}p & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ suit la loi } \mathcal{G}(p).}$$

□

c) Conclure.

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)*** : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.
- D'après la question ***1.b)*** : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k \quad \Rightarrow \quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
- Ainsi, si X est une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On obtient ainsi une nouvelle caractérisation de la loi géométrique, à savoir :} \\ X(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k.\end{array}}$$

□

Exercice 9

1. Une puce se déplace en faisant des sauts aléatoires sur un axe gradué. Initialement à l'origine, la puce se déplace à chacun de ses sauts d'une unité vers la droite avec probabilité $p \in]0,1[$, ou d'une unité vers la gauche avec probabilité $1-p$. On note Y_n le nombre de fois où elle s'est déplacée vers la droite entre le premier et le $n^{\text{ème}}$ saut (compris).
Quelle est la loi de Y_n ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession de n d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p, paramètre qui correspond à la probabilité que la puce se déplace d'une unité vers la droite.
- La v.a.r. Y_n correspond au nombre de succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p).}$$

□

2. Une urne contient des boules blanches en proportion b et vertes en proportion v. Donc $0 < b < 1$, $0 < v < 1$ et $b + v = 1$. On effectue des tirages successifs avec remise dans cette urne. On note X le numéro du tirage où la première boule verte apparaît.
Quelle est la loi de X ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre v, paramètre qui correspond à la probabilité de l'obtention d'une boule verte.
- La v.a.r. X correspond au rang du premier succès de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } X \hookrightarrow \mathcal{G}(v).}$$

□

3. Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. On suppose que les conducteurs arrivant au péage choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. On note Z le numéro du guichet choisi par le 1^{er} conducteur arrivant au péage.
Quelle est la loi de Z ?

Démonstration.

- L'expérience consiste en un choix effectué de manière équiprobable parmi 10 issues numérotées de 1 à 10.
- La v.a.r. Z correspond au numéro obtenu lors de cette expérience.

$$\boxed{\text{On en déduit : } Z \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 10 \rrbracket).}$$

□

Commentaire

Lorsqu'une v.a.r. suit une loi usuelle, il est impératif de respecter la rédaction suivante :
1) description de l'expérience,
2) description de la v.a.r. aléatoire.
On s'attachera toujours à bien détailler ces deux points.

Exercice 10
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Une urne contient une boule noire non numérotée et $n-1$ boules blanches dont $n-2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire.
Pour chaque i de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on note B_i l'événement : « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche », on pose $\overline{B_i} = N_i$, et on note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

Commentaire

- Formellement, l'événement N_n n'est pas défini dans cet énoncé. Il aurait fallu ajouter :

  on note N_n l'événement : « le $n^{\text{ème}}$ tirage donne la boule noire »

- Notons au passage qu'on ne définit pas non plus l'événement B_n : « le $n^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche ». Ce n'est pas primordial ici puisque $B_n = \varnothing$ (comme l'urne ne contient que $n-1$ boules blanches et qu'on procède sans remise, on ne peut piocher une boule blanche lors du $n^{\text{ème}}$ tirage).
- On peut enfin remarquer : $N_n \cancel{=} \overline{B_n}$.
  En effet : $\overline{B_n} = \overline{\varnothing} = \Omega$ est toujours réalisé mais ce n'est pas le cas de N_n.
  Par exemple, la boule noire peut être piochée lors du 1^{er} tirage.

1. Donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs que peut prendre la variable X.

Démonstration.
L'urne contient n boules dont une seule est noire. Le tirage s'effectuant sans remise, la boule noire apparaît au pire lors du $n^{\text{ème}}$ tirage dans l'urne. Elle peut aussi apparaître lors de n'importe quel autre tirage précédent.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket.}$$

□

2. a) Pour tout i de $[\![2, n-1]\!]$, justifier que $\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-i}{n-i+1}$.

Démonstration.
Soit $i \in [\![2, n-1]\!]$.

Si l'événement $B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}$ est réalisé, c'est qu'une boule blanche a été piochée lors des $i-1$ premiers tirages dans l'urne. À l'issue de ces tirages, l'urne est alors constituée de $(n-\cancel{1})-(i-\cancel{1}) = n-i$ boules blanches et de la boule noire (l'urne contient donc $n-i+1$ boules en tout).

Dans ce cas, l'événement B_i est réalisé si et seulement si le $i^{\text{ème}}$ tirage amène une boule blanche. Autrement dit, si l'on obtient l'une des $n-i$ boules non encore piochées. Chaque boule étant piochée de manière équiprobable :

$$\mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}$$

$$\boxed{\forall i \in [\![2, n-1]\!], \ \mathbb{P}_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-i}{n-i+1}.}$$

□

b) Utiliser la formule des probabilités composées pour trouver $\mathbb{P}\big([X=k]\big)$, pour tout k de $X(\Omega)$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Deux cas se présentent.

- Si $k = 1$, alors : $[X = 1] = N_1$.
  On rappelle que l'urne contient n boules dont 1 noire.

  $$\boxed{\text{Chaque boule étant piochée de manière équiprobable : } \mathbb{P}\big([X=k]\big) = \frac{1}{n}.}$$

- Si $k \in [\![2, n]\!]$, alors l'événement $[X = k]$ est réalisé si et seulement si on a pioché successivement $(k-1)$ boules blanches puis une noire. Ainsi :

  $$[X = k] \ = \ B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k$$

  On en déduit par la formule des probabilités composées :

  $$\begin{aligned}
  & \mathbb{P}\big([X=k]\big) \\
  = \ & \mathbb{P}\big(B_1 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k\big) \\
  = \ & \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \cdots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(N_k) \\
  = \ & \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{n-(k-1)+1} \times \frac{1}{n-k+1}
  \end{aligned}$$

  Précisons cette dernière égalité :

  $\times$ $\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}\left(\overline{N_1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n-1}{n}$.

  $\times$ $\mathbb{P}_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(N_k) = \dfrac{1}{n-k+1}$ car chaque boule a même probabilité d'être tirée.

  Plus précisément, si l'événement $B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}$ est réalisé, c'est que les $k-1$ permiers tirages ont donné une boule blanche.

  Dans ce cas, l'événement N_k est réalisé si et seulement si lors du $k^{\text{ème}}$ tirage la boule noire est tirée dans l'urne contenant $n-k+1$ boules.

Finalement, en procédant à des simplifications successives, on obtient :

$$\mathbb{P}\big([X=k]\big) \;=\; \frac{1}{n}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}\big([X=k]\big) \;=\; \frac{1}{n}.}$$

□

c) Reconnaître la loi de X et donner son espérance et sa variance.

Démonstration.

- D'après ce qui précède :
  - × $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
  - × $\forall k \in X(\Omega),\ \mathbb{P}\big([X=k]\big) \;=\; \dfrac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!]).}$$

- On en déduit que X admet une espérance et une variance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(n-1)(n+1)}{12}.}$$

Commentaire

Une bonne connaissance du cours est une condition *sine qua non* de réussite au concours. En effet, on trouve dans toutes les épreuves de maths (même pour les écoles les plus prestigieuses), des questions d'application directe du cours. En l'occurrence, il s'agit ici simplement de connaître les caractéristiques d'une loi usuelle.

□

3. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente et qui vaut 0 sinon.

a) Pour tout k de $X(\Omega)$, montrer, toujours grâce à la formule des probabilités composées, que :

$$\mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=0]\big) = \frac{n-k}{n(n-1)}$$

Démonstration.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

- Remarquons tout d'abord :

	L'événément $[X=k]\cap[Y=0]$ est réalisé		
$\Leftrightarrow$	L'événément $[X=k]$ est réalisé	et	l'événement $[Y=0]$ est réalisé
$\Leftrightarrow$	On a effectué k tirages (la boule noire a été obtenue lors du $k^{\text{ème}}$ tirage)	et	la boule blanche numérotée 1 n'a pas été piochée lors de l'expérience

On en déduit :

$$[X=k]\cap[Y=0] \;=\; B_1^{(0)}\cap\ldots\cap B_{k-1}^{(0)}\cap N_k$$

Où l'on a noté, pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$, $B_i^{(0)}$ l'événement « le $i^{\text{ème}}$ tirage donne une boule blanche numérotée 0 » (en particulier, $B_{n-1}^{(0)} = \varnothing$).

- On en déduit par la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\big(\,[X=k]\,\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big(B_1^{(0)} \cap \ldots \cap B_{k-1}^{(0)} \cap N_k\big) \\
= \ & \mathbb{P}\big(B_1^{(0)}\big) \times \mathbb{P}_{B_1^{(0)}}\big(B_2^{(0)}\big) \times \mathbb{P}_{B_1^{(0)} \cap B_2^{(0)}}\big(B_3^{(0)}\big) \times \ \cdots \ \times \mathbb{P}_{B_1^{(0)} \cap \cdots \cap B_{k-2}^{(0)}}\big(B_{k-1}^{(0)}\big) \times \mathbb{P}_{B_1^{(0)} \cap \cdots \cap B_{k-1}^{(0)}}(N_k) \\
= \ & \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \ \cdots \ \times \frac{(n-\cancel{2})-(k-\cancel{2})}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1}
\end{aligned}$$

Précisons cette dernière égalité :

× $\mathbb{P}\big(B_1^{(0)}\big) = \dfrac{n-2}{n}$ car chaque boule a même probabilité d'être tirée et que l'urne contient initialement n boules dont $(n-2)$ sont blanches et numérotées 0.

× $\forall i \in [\![2, n-1]\!]$, $\mathbb{P}_{B_1^{(0)} \cap \cdots \cap B_{i-1}^{(0)}}\big(B_i^{(0)}\big) = \dfrac{n-i-1}{n-i+1}$.

En effet, si les $i-1$ premiers tirages ont donné une boule blanche numérotée 0, il reste $n-(i-1) = n-i+1$ boules dans l'urne dont $(n-2)-(i-1) = n-i-1$ blanches numérotées 0.

× $\mathbb{P}_{B_1^{(0)} \cap \cdots \cap B_{k-1}^{(0)}}(N_k) = \dfrac{1}{n-k+1}$ en procédant comme à la question précédente.

- Dans le produit précédent, les termes apparaissant au numérateur se simplifient avec les termes présents au dénominateur de la fraction présente deux rangs après.

$$\boxed{\text{Après simplification, on obtient : } \forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\big(\,[X=k] \cap [Y=0]\,\big) \ = \ \frac{n-k}{n(n-1)}.}$$

Commentaire

Comme $Y(\Omega) = \{0, 1\}$, on obtient à l'aide du système complet d'événements $\big(\,[Y=0]\,, [Y=1]\,\big)$:

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}\big(\,[X=k] \cap [Y=1]\,\big) \ = \ 1 - \mathbb{P}\big(\,[X=k] \cap [Y=0]\,\big) \ = \ 1 - \frac{n-k}{n(n-1)}$$

On obtient ainsi la loi du couple (X, Y), c'est à dire la valeur de $\mathbb{P}\big(\,[X=k] \cap [Y=\ell]\,\big)$ pour $k \in X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $\ell \in Y(\Omega) = \{0, 1\}$.

□

b) En déduire $\mathbb{P}\big([Y=0]\big)$.

Démonstration.
La famille $\big([X=k]\big)_{k\in[\![1,n]\!]}$ forme un système complet d'événements.
D'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([Y=0]\big) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\big([X=k]\cap[Y=0]\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n\,(n-1)} \\
&= \frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (n-k) \\
&= \frac{1}{n\,(n-1)} \sum_{j=0}^{n-1} j && \textit{(à l'aide du décalage d'indice } j=n-k\textit{)} \\
&= \frac{1}{n\,(n-1)} \frac{n\,(n-1)}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\big([Y=0]\big) = \frac{1}{2}}$$

Commentaire

Le changement d'indice $j=n-k$ est en fait une sommation dans l'autre sens :

$$\begin{array}{rcccccccccc}
\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (n-k) & = & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & (n-(n-1)) & + & (n-n) \\
& = & (n-1) & + & (n-2) & + & \cdots & + & 1 & + & 0 \\
\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} j & = & 0 & + & 1 & + & \cdots & + & (n-2) & + & (n-1)
\end{array}$$

□

c) Reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

Démonstration.

- Comme $Y(\Omega)=\{0,1\}$, on obtient à l'aide du système complet d'événements $\big([Y=0]\,,[Y=1]\big)$:

$$\mathbb{P}\big([Y=0]\big)+\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = 1$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big([Y=1]\big) = 1-\mathbb{P}\big([Y=1]\big) = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.}$$

- Finalement :
  × $Y(\Omega)=\{0,1\}$,
  × $\mathbb{P}\big([Y=0]\big)=\dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}\big([Y=1]\big)=\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right).}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On en déduit que } Y \text{ admet une espérance et une variance. De plus :} \\ \mathbb{E}(Y)=\dfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y)=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}.\end{array}}$$

□